



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11 · 101 = 1111
101 - простое
i) $A = 1111a$
 $Ba; C$
 $A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C \cdot a$; $C < 101$
 $\Rightarrow B = 101$
 $1 \cdot B \cdot B \Rightarrow B = 101$ $C = 11$; $5 \cdot B \cdot C \Rightarrow$
 $C = 55$; $A \cdot B \cdot C$ - квадрат $\Rightarrow a = 5$
 $(5555; 101; 55)$ - единственный случай.
Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = xy + 3y + 3x - 9$$

$$-3y + 3x = 9$$

$$x - y = 3$$

$$x = y + 3$$

$$(y+3)^3 - y^3 = 9(y+3)^2$$

$$y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 = 9(y^2 + 6y + 9)$$

$$9y^2 + 27y + 27 = 9y^2 + 54y + 81$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}; \quad \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = xy - 3y + 3x - 9$$

$$3x - 3y = 9$$

$$x - y = 3 \quad x = y + 3$$

$$(y+3)^3 - y^3 = 9(y^2 + 3y) = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

Ответ: 27.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

u) $y_2 - y$

$x \in \{-2, 0, 2, 4\}$ т.к. $(-u; -y)$ — не может быть пересечением

тогда: $y = -y \quad x \in [-2, 0; 2, 4]$

$$-3 < y \leq 9 \quad y - \text{ur. } K \in \{-3; -1; \cancel{0}; 1; 3\}$$

$$\begin{array}{l} -3 \leq y \leq 9 \\ \text{---} \end{array} \quad y\text{-вер.} \quad x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$$

→ кол-во пер:

$$4 + 4.9 + 5.9 = 40 + 45 = 85$$

Отбук. 86 ноп.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(2\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \pi\right) = \cos 2 \cos \pi - \sin 2 \sin \pi$$

$$1) \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y$$

$$\alpha + \beta = \pi x \quad \alpha + \beta = \pi x + 2\pi$$

$$\cos(2\pi) = \cos 2 \cos \pi - \sin 2 \sin \pi$$

$$\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right) = 0$$

$$\frac{3\pi x}{2} - \frac{\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$3\pi x - \pi y = \pi + 4\pi k$$

$$3x - y = 1 + 4k$$

$$y = 3x - 1 - 4k$$

a) Ответ: $\begin{cases} y = 3x - 1 + 2k & k \in \mathbb{Z} \\ y = 1 - x + 2k & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

b) $\arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arccos\frac{y}{9} < 2\pi$
 $\Rightarrow -x; y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} \neq -1 & \frac{y}{9} \neq -1 \text{ одновременно} \\ -4 \leq x \leq 4 & -9 \leq y \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9 \leq y \leq 9 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

в) ~~$(-\frac{8}{3}, -4), (-\frac{8}{3}, -2), (-\frac{8}{3}, 0), (-\frac{8}{3}, 2), (-\frac{8}{3}, 4)$~~

1) ~~$y = 9, x \in \emptyset$~~

2) ~~$y = 8, x \in \emptyset$~~

3) ~~$y = 7, x \in \{-2\}$~~

4) ~~$y = 6$~~

1) $y = -8$

$$-8 = 3x - 1 + 2k$$

$$-7 = 3x + 2k$$

$$x \in \emptyset$$

$$-8 = 1 - x + 2k$$

$$-9 = -x + 2k$$

$$x \in \{-5, -3, -1, 1, 3\}$$

3) $y = -6$

$$-6 = 1 - x + 2k$$

$$-7 = -x + 2k$$

$$x \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

2) $y = -7$

$$-7 = 3x - 1 + 2k$$

$$-6 = 3x + 2k$$

$$x = -2 + 2k$$

$$x \in \{-2, 0, 2, 4\}$$

$$-7 = 1 - x + 2k$$

$$-8 = -x + 2k$$

$$x = 8 + 2k$$

Ответ: $y \in [-8, 9]$ при $y = -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
 $x \in \{-5, -3, -1, 1, 3\}$ при $y = -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~3.

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

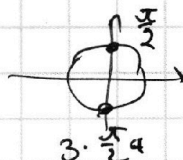
$$\cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \left(\sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 & \text{①} \\ \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x = 0 & \text{②} \end{cases}$$

$$1) \cos \frac{\pi}{2} (x+y) = 0$$

$$x+y = 1+2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1-x+2k$$



$$2) \sin \frac{\pi}{2} (x-y) \sin \pi x - \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x = 0$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \alpha$$

$$\alpha + \beta = \pi x$$

$$\alpha = \pi x - \beta$$

$$2\pi x - \beta = \pi x - \pi y$$

$$\pi x - \beta = -\pi y$$

$$\beta = \pi x + \pi y$$

$$\beta = \frac{\pi x + \pi y}{2}$$

$$\alpha = \pi x - \frac{\pi x}{2} - \pi y = \frac{\pi x}{2} - \pi y$$

$$\pi x = \alpha$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \beta$$

1) $\alpha \neq 0$
 $\beta \neq 0$
 $\alpha \neq \beta$
 $\alpha \neq -\beta$
 $\alpha \neq \pi$
 $\alpha \neq -\pi$

$$\cos \alpha \cos \beta = 1$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$|\alpha - \frac{\pi}{4}| = |\beta - \frac{\pi}{4}|$$

$$(\alpha - \frac{\pi}{4} - \beta + \frac{\pi}{4})(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}) = 0$$

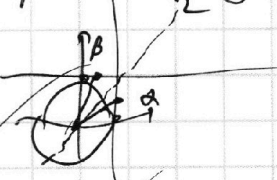
$$\alpha - \beta = 0 \quad \pi x = \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi y}{2}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \pi x = \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2}$$

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi y}{2}$$

$$x = y$$

$$3\pi x = 2\pi y + \pi \quad y = 3x - 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч. p_1 - вероятность выиграть Всю сумму
 p_2 - в конце
 a - новые билеты

$$p_1 = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$$

$$p_2 = \frac{(4+a)(3+a)}{x(x-1)}$$

$$3.5 p_1 = p_2$$

$$3.5 \cdot 12 = (4+a)(3+a)$$

$$42 = a^2 + 7a + 12$$

$$a^2 + 7a - 30 = 0$$

$$(a-3)(a+10) = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow a = 3 \rightarrow \text{Ответ: 7 билетов}$$

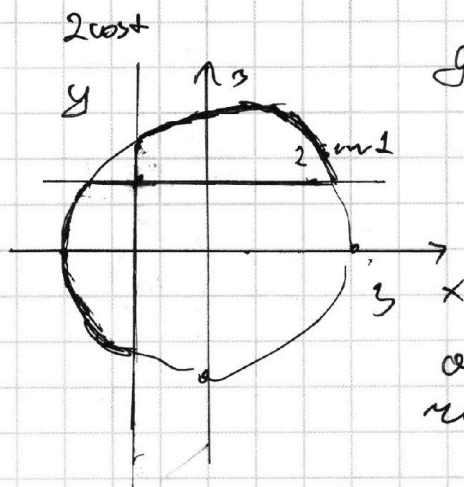


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



длина отрезков такая же

длина дуги равна

$$\cancel{2\pi \cdot 3} \rightarrow 2\pi \cdot 3 - 3t = 3\pi.$$

- такая же.

аналогично в остальных
четвертях

то есть максимальный
периметр, равный $4\sqrt{7} + 3\pi$
достигается при $t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$



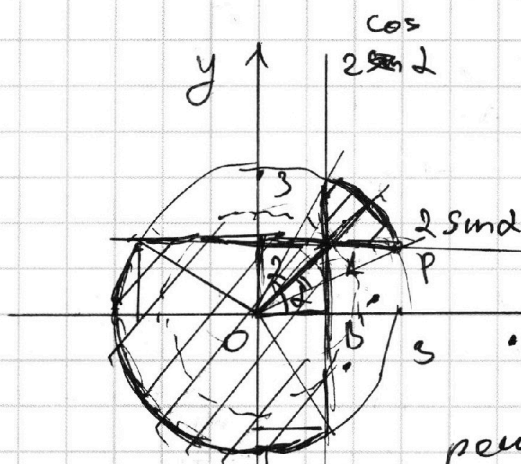
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$нб. \begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



$$4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha = 4 \Rightarrow$$

точка пересечения

этих прямых

лежит на окружности

с центром в начале координат и радиусом 2

решим триг. $\triangle AOB$:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{AO} = \frac{2\sin\alpha}{2} \Rightarrow \angle AOB = \alpha$$

$M(\alpha) = 2 \cdot \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$. Рассмотрим, когда α в первой четверти.

$$M(\alpha) = 2 \cdot \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + 2 \cdot \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + 2\pi \cdot 3.$$

$$\frac{\arcsin(\frac{2}{3}\sin\alpha)}{2\pi} + \frac{2\pi \cdot 3}{4} + \frac{\arccos(\frac{2}{3}\cos\alpha)}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot 3 +$$

$$d\pi \cdot 3 = \arcsin(p)$$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ - первая четверть. P_1 - периметр верхней части.

$$P_1 = \frac{2\pi \cdot 3}{4} - 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{\arcsin(\frac{2}{3}\sin\alpha)}{2\pi} - 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{\arccos(\frac{2}{3}\cos\alpha)}{2\pi}$$

$$\Rightarrow M(\alpha) = 2 \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} + 2 \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + 3\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

найдём производную.

$$M'(2) = \frac{1}{\sqrt{9-4\sin^2 2}} \cdot (4 \cdot 8 \sin 2 \cdot \cos 2) + \frac{1}{\sqrt{9-4\cos^2 2}} \cdot (-8 \cos 2 \cdot -\sin 2)$$

$$= \frac{8 \cos 2 \sin 2}{\sqrt{9-4\sin^2 2}} + \frac{8 \sin 2 \cos 2}{\sqrt{9-4\cos^2 2}}$$

$$\begin{cases} \sin 2 = 0 \\ \cos 2 = 0 \end{cases}$$

$$\sin 2 = \cos 2$$

1) $\sin 2 = 0$

$$6 + 2\sqrt{5} + 3\pi$$

2) $\cos 2 = 0$

$$6 + 2\sqrt{5} + 3\pi$$

3) $\sin 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2 \cdot \sqrt{9-2} + 2 \cdot \sqrt{9-2} + 3\pi = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$6 + 2\sqrt{5} + 3\pi$$

$$2\sqrt{9-2} + 2\sqrt{9-2} + 3\pi = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

$$6 + 2\sqrt{5} + 3\pi$$

тогда при $\alpha = 45^\circ$ периметр максимален.

в других четвертях периметр не максимален.

то есть он максимален при $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

рассмотрим их

рассмотрим остальные четверти

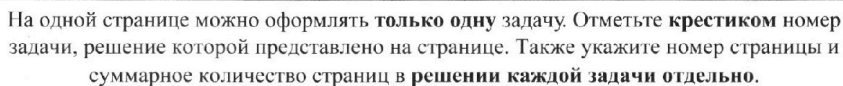
$$\begin{array}{r} \times 101 \\ \times 101 \\ + 101 \\ \hline 10201 \\ \times 105 \\ \times 106 \\ + 525 \\ + 656 \\ \hline 11025 \\ 11256 \end{array}$$

$$\sqrt{2000} \approx 44.7$$

$$\sqrt{20} \approx 4.4$$

$$\sqrt{112} \approx \frac{\sqrt{400}}{6} \approx 10.5$$

$$\Rightarrow \sqrt{112} > 6 + \sqrt{20}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

