



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- ✓1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- ✓2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- ✓3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

- ✓4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$[n=1]$$

(A; B; C)

$A \cdot B \cdot C$ ~~является~~ - ~~натуральный~~ квадрат nat. числа.

- 1) Рассмотрим число A. Оно сост. из одинаковых цифр, а значит является произведением $111 \cdot n$, где $n \in \mathbb{N}$ и n принимает значения от 1 до 9.

$$A = 111 \cdot n = 101 \cdot 11 \cdot n$$

- 2) Так как произведение $A \cdot B \cdot C$ - ~~является~~ точный квадрат, то числа B и C должны содержать множители 11, и 101. ~~В~~ Так как $A \cdot B$ - трёхзначное, а C - двухзначное, то $B = x \cdot 101$, $C = 11 \cdot y$, $x, y \leq 9$, $x, y \in \mathbb{N}$

- 3) Одна из цифр B - единица. Это возможно только когда $x = 1$. Значит $B = 101$.

Одна из цифр C - 5. Это возможно только при $y = 5$, т.е. $C = 55$.

- 4) Получаем, что произведение $A \cdot B \cdot C = 111 \cdot n \cdot \overset{111}{\uparrow} 101 \cdot 11 \cdot 5$

$$\sqrt{A \cdot B \cdot C} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{111 \cdot n \cdot 101 \cdot 11 \cdot 5} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 111 \sqrt{n \cdot 5} \in \mathbb{N} \Rightarrow [n=5] \Rightarrow A = 5555$$

Ответ: (5555; 101; 55).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N = 2$$

$$x, y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad | \cdot xy(x-3)(y+3)$$

$$(x-3)(y+3)(y+x+1) = xy(x-3+y+3+1)$$

$$(x-3)(y+3)(y+x+1) = xy(x+y+x+1) \rightarrow \boxed{y = -x-1} \rightarrow \text{к границе!!!}$$

$$\cancel{xy} - 3y + 3x - 9 = \cancel{xy}$$

$$\boxed{y = x-3}$$

- выиграл границу

$$\boxed{\begin{matrix} y = -x-1 \\ y = x-3 \end{matrix}}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy =$$

$$= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

Подставляем сначала $y = x-3$:

$$(x-x+3)(x^2+x^2-3x+x^2-6x+9) - 9(x^2-3x) =$$

$$= 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = \boxed{27}$$

Теперь $y = -x-1$:

$$(x+x+1)(x^2-x^2-x+x^2+2x+1) + 9(x^2+1)$$

Заметим, что по усл. $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow -x-1 < -1$

Однако тогда $y = -x-1 < -1$, но по усл. $y > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ противоречие. Такого быть не может.

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x-y} \geq 3 \quad (x; y) \in \mathbb{R}$$

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

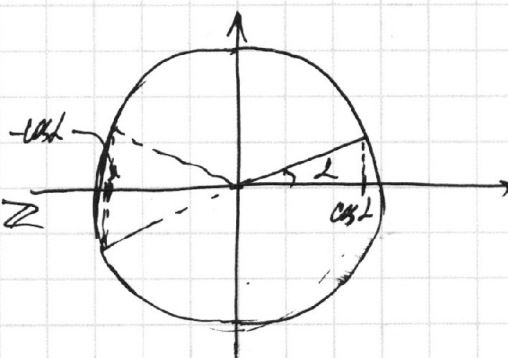
$$\frac{x - \cos 2\pi x}{2} - \frac{\cos \pi(x-y) - \cos \pi(x+y)}{2} = \frac{x + \cos 2\pi x}{2} + \frac{\cos \pi(x+y) + \cos \pi(x-y)}{2}$$

$$\cancel{\cos \pi(x+y)} - \cancel{\cos \pi(x-y)} = 2 \cos 2\pi x + \cos \pi(x-y) + \cancel{\cos \pi(x+y)}$$

$$2 \cos 2\pi x + 2 \cos \pi(x-y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\pi x) = -\cos(\pi(x-y))$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi + \pi(x-y) + 2\pi k \\ 2\pi x = \pi - \pi(x-y) + 2\pi m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}$$



$$\begin{cases} 2x = 1 - x - y + 2k \\ 2x = 1 - x + y + 2m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\begin{cases} y = 1 - x + 2k \\ y = 3x - 1 + 2n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}}$$

$$b) \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Заметим, что $\arccos 1 \in [0; \pi]$, поэтому



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

неравенство может не выполняться в ед. случае:

$$\arcsin \frac{x}{4} = \arcsin \frac{y}{9} = \pi \quad (\text{нельзя}) \Rightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases} \rightarrow \text{табл. не вып.}$$

Область определения арксинуса:

$$x \in [-1; 1] ; \text{ в нашем случае } \arcsin x \neq \pi \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow x \in (-1; 1]$$

Подставим значения в арксинус из нашего нер-ва:

$$\begin{cases} -1 < \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 < \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x \leq 4 \\ -9 < y \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x \leq 4 \\ -9 < 1-x+2k \leq 9 \\ -9 < 3x-1+2n \leq 9 \end{cases}$$

Проверяем сколько пар для всех целых x от -3 до 4 включительно:

x	кол-во пар.
-3	$9+9=18$
-2	$9+9$
-1	18
0	18
1	18
2	18
3	18
4	18

$$\text{Всего: } 18 \cdot 8 = 80 + 64 = 144 \text{ пары}$$

Ответ: 144 пары.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[4]

Пусть всего было n двенадцатиклассников.

Вероятность, что Петя и Вась вместе идут на концерт ~~в~~ в начале месяца:

$$P_1 = \underbrace{\left(\frac{4}{n}\right)}_{\text{вер., что П или В идёт}} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{n-1}\right)}_{\text{вер., что идёт второй}}$$

Пусть в конце месяца^а оказалось, что было x билетов, причём $x > 4$. Тогда вероятность тама:

$$P_2 = \frac{x}{n} \cdot \frac{(x-1)}{(n-1)} ; \text{ по условию: } P_1 = \frac{P_2}{3,5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 = 3,5 P_1$$

$$\text{Подставим } P_1 \text{ и } P_2: \frac{x(x-1)}{n(n-1)} = 3,5 \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} \quad \left| \cdot n(n-1) \right. \quad \begin{matrix} n > 4 \\ n > 3 \end{matrix}$$

$$x^2 - x = 42 \Leftrightarrow x^2 - x - 42 = 0$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ x = -6 < 0 \end{cases}$$

7 билетов было выделено на концерт в конце месяца.

Ответ: 7.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[N=6]

$$\begin{cases} (x-2\cos 2)(y-2\sin 2) \geq 0 & (1) \\ x^2+y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим нр-во (2).

Уравнение $x^2+y^2=9$ —

окружность с центром

в т. $(0; 0)$, ~~и~~ радиусом 3, а

$x^2+y^2 \leq 9$ — внутр. область
этой окружности.

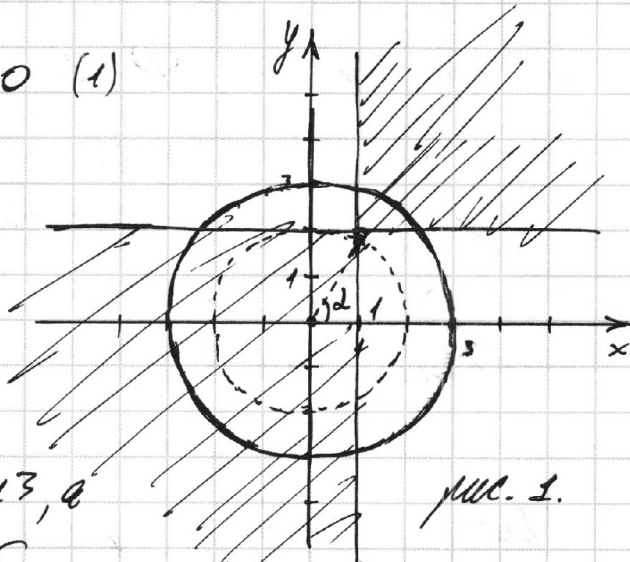


рис. 1.

Теперь рассмотрим (1).

Пусть O' есть т. $O'(2\cos 2; 2\sin 2)$.

Тогда в сист. коорд, где

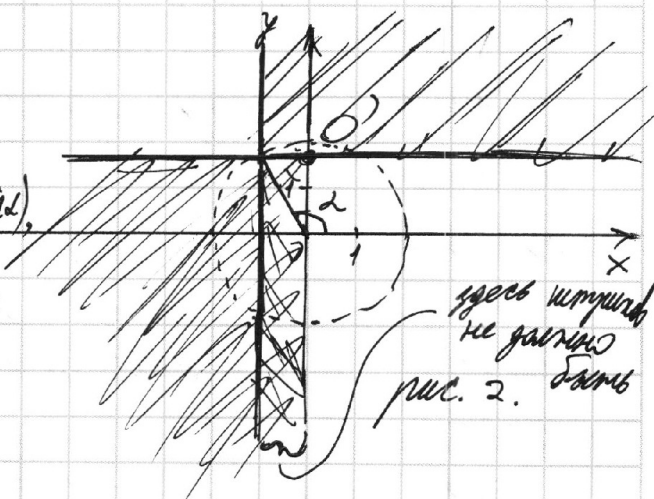
O' — центр:

$$x' = x - 2\cos 2$$

$$y' = y - 2\sin 2$$

(1): $x'y' \geq 0 \Rightarrow x'$ и y' либо имеют одинаковый знак, либо ~~заключаются~~ ^{заключаются} в т.е. $x'y' \geq 0$ — области пр-во в 1-ой и 3-й четвертях новой сист. коорд. (см. рис. 2.) (в иск. сист. коорд.)

При этом точка O' ~~и~~ принадлежит окружности радиусом 2 с центром в т. O



здесь итераций
не должно
быть
рис. 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

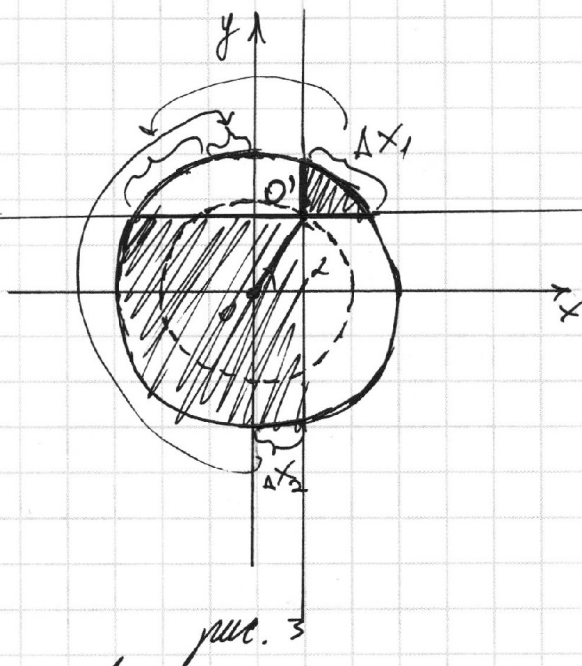
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь можно понять, как выглядит фигура $\Phi(L)$.

Это две части окр. радиусом 3, ограниченные дугой α перп. прямыми, пересекающимися в центре $O'(2 \cos L; 2 \sin L)$



Периметр этой фигуры складывается из дуги дуг окружностей и дуги отрезков, параллельных координатным осям.

Заметим, что сумма длин α дуг окр. остается постоянной и равной половине длины окружности.

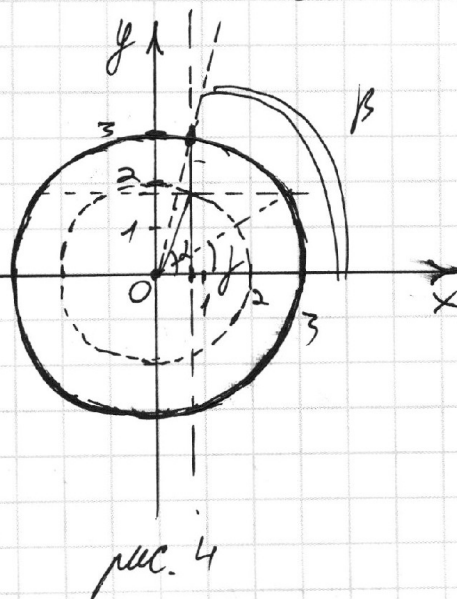
Остается посчитать длину отрезков. Введем углы β и γ . Можно записать:

$$\begin{aligned} 2 \cos L &= 3 \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{3} \cos L \\ 2 \sin L &= 3 \sin \gamma \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2}{3} \sin L \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 L} \\ \cos \gamma &= \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 L} \end{aligned}$$

Сумма длин, которую мы ищем:

$$M_1 = 2 \cdot 3 \sin \beta + 2 \cdot 3 \cos \gamma$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M_1 = 2 \cdot 3 \left(\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 L} + \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 L} \right)$$

Найдём производную:

$$\frac{dM_1}{dL} = 6 \cdot \left(\frac{2 \cos L \cdot (-\sin L)}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 L}} + \frac{2 \sin L \cos L}{2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 L}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 L} = 2 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 L} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin L = \pm \cos L$ — в нашем случае это всегда выполняется $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{L = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k}$$

$$\frac{1}{2} \text{ длины окружности: } M_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3 = 3\pi$$

$$M_1 = 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = 4\sqrt{2}$$

Общий периметр:

$$\boxed{M = 4\sqrt{2} + 3\pi}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8447

3 5 7 11

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 7 \overline{) 15} \\ \underline{7} \\ 41 \\ \underline{35} \\ 61 \end{array}$$

11.10.1

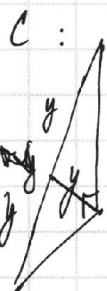
A: $x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101$

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 17} \\ \underline{101} \\ 23 \end{array}$$

B: $1 - 1 - 1$

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 17} \\ \underline{101} \\ 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ \underline{11} \\ 011 \\ \underline{11} \\ 0 \end{array}$$



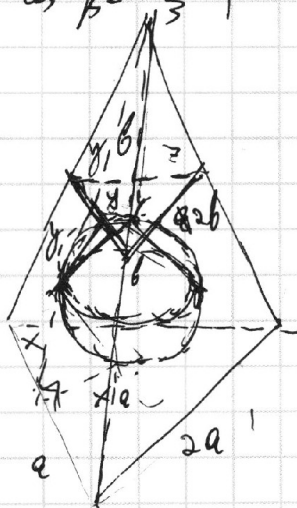
$$\cos \alpha = \frac{x}{z}$$

$$\cos \beta = \frac{x}{z}$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{3} \cos \alpha$$

$$k = \frac{y}{x}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \sin \beta$$



$$R = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow OA =$$

$$R = \sqrt{1 - 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha + 1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow b = a + b$$

$$\frac{z}{b} = \frac{a+b+z}{a} \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{z}{z+x+y} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow z \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a} \right) = \frac{a+b}{a}$$

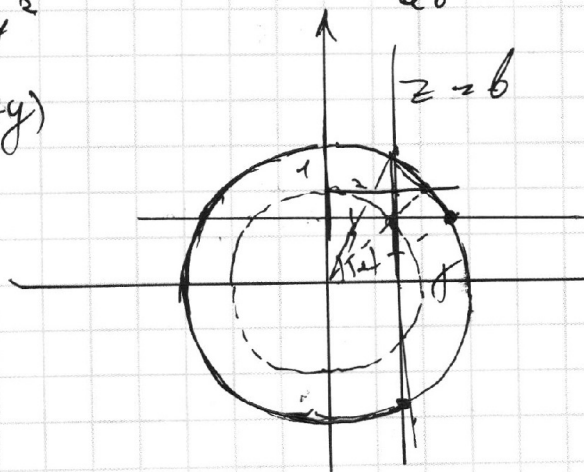
$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow z = \frac{a+b}{ab} = (a+b)$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$zx = zy + y^2$$

$$z(x-y) = y(x+y)$$



$$R = \sin \alpha R$$

$$R = \cos \alpha R$$

$$\sin \alpha = \frac{z}{2}$$

$$\sin \beta = \frac{x}{y}$$

$$\sin \beta = \frac{2}{3} \sin \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3} \cos \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

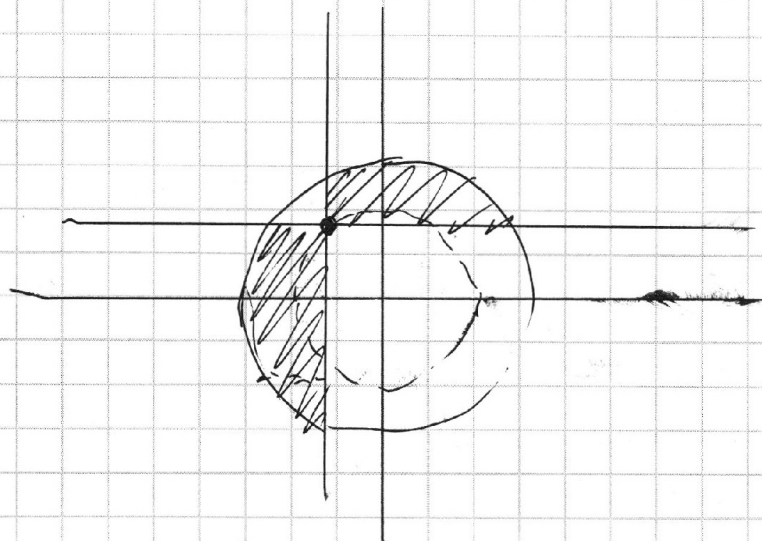
5
☐

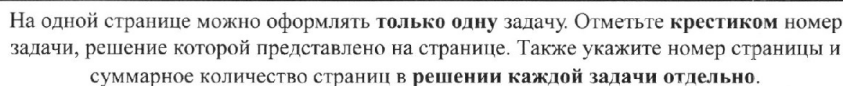
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Пороча OR-кода недопустима!

~~2 sets copy - my copy~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

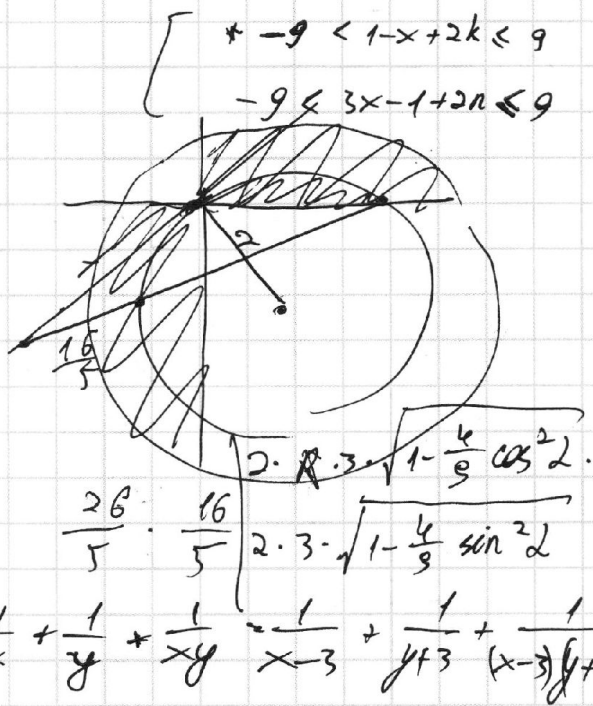
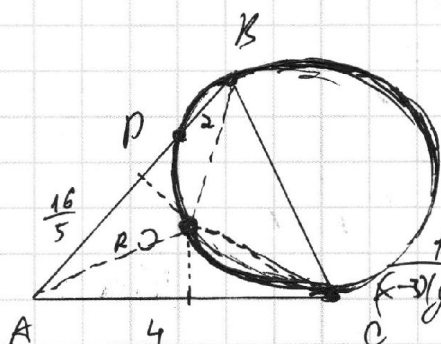
$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$-9 < y \leq 9$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3} \cos 2$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 2}$$



$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy$$

$$(x-3)(y+3)(y+x+1) = xy(y+x+1)$$

$$xy - 3y + 3x - 9 = xy$$

$$y = x - 1$$

$$y = x - 3$$

$$y = x - 1$$

$$y = x - 3$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$(x-x+3)(x^2 + x^2 - 3x + x^2 - 6x + 9) - 9(x^2 - 3x)$$

$$x(y-2) = 0 \quad y = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

