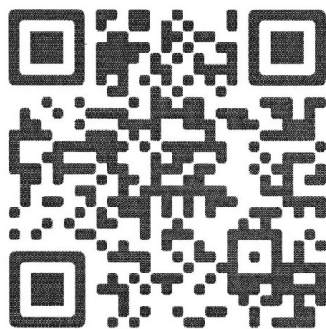




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A : aaaa = a \cdot 1111 = a \cdot 101 \cdot 11 \quad (1) \quad (101 \text{ и } 11 - \text{простые})$$

$$B : \text{--- есть цифра } 1 \quad (2)$$

$$C : \text{--- есть цифра } 5 \quad (3)$$

$$A \cdot B \cdot C - \text{квадрат}^{\text{натур. ч.}} \quad (4)$$

• $A = a \cdot 11 \cdot 101$, крестик 11 и 101 , простые, значит встреч. в виде множителей в B и C для выполн. (4)

• C двузнач. $\Rightarrow$ не может содержать множитель 101 , тогда a его содержит
 $B : \overline{b0b} = b \cdot 101$; но при $b \in [1; 9]$ это число записывается $\overline{b0b}$ $\leftarrow$ меньше
 $\leftarrow$ цифра 0

• в $\overline{b0b}$ есть 1 по условию, $\Rightarrow b=1$; $B = \underline{101}$

• $B \cdot 11 \Rightarrow C : 11$; $C = c \cdot 11$, запис. $\overline{cc}$, однако a в записи $a55$
 $5 \Rightarrow c=5 \Rightarrow C = \underline{55}$ $(c \in \mathbb{N})$

$$A = a \cdot 101 \cdot 11$$

$$B = 101$$

$$C = 55 = 5 \cdot 11$$

$$ABC = a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 - \text{квадрат нат. числа}$$

$\Rightarrow a \cdot 5$ - квадрат. при $a \in [1; 9]$ единств. цифр.
 значение $a=5 \Rightarrow A = \underline{5555}$

Ответ: ~~(5555; 101; 55)~~.

Ответ: (5555; 101; 55).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}; \quad \begin{matrix} x \neq 3; \\ \text{иначе} \\ \text{неопр.} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} x, y > 0 \\ \text{по усл.} \end{matrix}$$

приведу к общ. знаменателю: $xy(x-3)(y+3)$ $M = x^3y^3 - 9xy = ?$

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = xy(y+3) + xy(x-3) + xy;$$

$$(y+x+1)(x-3)(y+3) = xy(y+3+(x-3)+1);$$

$$(y+x+1)(x-3)(y+3) = xy(y+x+1);$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y+x+1=0 & \text{невозможно, т.к. } y>0 \text{ и } x>0 \Rightarrow x+y+1>0 \\ (x-3)(y+3)=xy & \text{тогда } -9+xy-3y+3x=xy \end{cases}$$

$$3x = 3y + 9$$

$$x = y + 3. \text{ подставлю в } M:$$

$$M = \underbrace{(y+3)^3 - y^3}_{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)} - 9(y+3)y = (y+3-y)(y+3)^2 + y(y+3) + y^2 - 9y^2 - 27y$$

$$= 3 \cdot \underbrace{(y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2)}_{3y^2 + 9y + 9} - 9y^2 - 27y = 9y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 27y = 27$$

($x=y+3$ по ученому равнос. преобр. $\Rightarrow$ нет других знач.)

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \sqrt[3]{x} (\sin \sqrt[3]{x} - \sin \sqrt[3]{y}) = \cos(\sqrt[3]{x}) \cdot (\cos \sqrt[3]{x} + \cos \sqrt[3]{y}), \quad x, y - \text{действ.}$$

но не $\sin \alpha - \sin \beta$ но не $\cos \alpha + \cos \beta$

$$\sin \sqrt[3]{x} \cdot 2 \sin \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{2} \cos \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{2} = \cos \sqrt[3]{x} \cdot 2 \cos \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{2} \cos \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{2};$$

$$\cos\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}(x+y)\right) = 0 \quad (1)$$

$$\sin \sqrt[3]{x} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}(x-y)\right) = \cos \sqrt[3]{x} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}(x-y)\right) \quad (2);$$

но не $\sin \alpha \sin \beta$ но не $\cos \alpha \cos \beta$

(2):

$$\cos\left(\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2}x + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}y\right) - \cos\left(\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}x - \frac{\sqrt[3]{x}}{2}y\right) = \frac{\cos\left(\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}x + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}y\right) + \cos\left(\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2}x + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}y\right)}{2}$$

$$- \cos\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2}y\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2}y\right); \quad 2\cos\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}(3x-y)\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}(3x-y)\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}(x+y)\right) = 0 & (1); \\ \cos\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}(3x-y)\right) = 0 & (2); \end{cases}$$

$$(1): \quad \frac{\sqrt[3]{x}}{2}(x+y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[3]{x}n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 2n+1; \quad y = 2n+1-x.$$

Вывод:

$$(c; 2n+1-c), \quad c \in \mathbb{R}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(2): \quad \frac{\sqrt[3]{x}}{2}(3x-y) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[3]{x}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x-y = 2k+1;$$

$$y = 3x-2k+1;$$

$$\text{Вывод: } (d; 3d-2k+1); \quad d \in \mathbb{R}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(любые числа, гг. этим условиям - решения)

$$d) \quad \arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arccos\left(\frac{y}{9}\right) < 2\pi; \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [-4; 4]; \quad y \in [-9; 9]. \quad \arccos\left(\frac{x}{4}\right) \in [0; \pi]; \quad \arccos\left(\frac{y}{9}\right) \in [0; \pi].$$

чтобы не выполн., нужно, чтобы $\arccos\left(\frac{x}{4}\right) = \pi$ и $\arccos\left(\frac{y}{9}\right) = \pi$

(т.к. слева $\leq 2\pi$ а справа 2π) $\begin{cases} \frac{x}{4} = -1 & x = -4 \\ \frac{y}{9} = -1 & y = -9 \end{cases}$ - единст. пара, где которой не выполн.

перепроверь, сколько y подходит к каждому x

(среди $x \in [-4; 4]$ и $y \in [-9; 9]$)

нужно;



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

перев. по 9. карт

$n, k \in \mathbb{Z}$

	$(2n+1-x)$	$(3x+1-2k)$
n	$y \in \mathbb{Z}$ 1 серия	$y \in \mathbb{Z}$ 2 серия
-4	$2n+5: [-9; 9]$ кроме -9 (ранее показ.) 9 по $\{-4, -5, -3, -1\}$ по знач. $\{1, 3, 5, 4, 9\}$	$-2k-11: [-9; 9]$ 9 те же по знач. y по 9.
-3	$2n+4$ $[-8; 8]$ 9 знач. $(\frac{8-(-8)}{2}+1=9)$ $\{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$	$-8n-2k$

} по знач. 9 знач.

- заметим, что обе серии имеют одинак. чётность $(3x+1-2k)$, а также одинак. периодичность $(2n+4-2k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$

значит карт из обеих серий совпа

- заметим, что в зависимости от чётности x есть либо $y \in [-9; 9] \Rightarrow 10$ знач. y , либо $y \in [-8; 8] \Rightarrow 9$ знач. y

тогда для $x \in [-4; 4]$ будет всего $10 + 9 + 10 + 9 + 10 + 9 + 10 + 9 + 10$

-1 $\Rightarrow$ 85 значений $\mathbb{R} [-4; -9]$

Вспомогат. формулы, используя бинарные:

$$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha \sin 2\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}; \cos 2\alpha \cos 2\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Answer: а) $(c, 2n+1-c)$, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $(d; 3d-2k+1)$, $d \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$;
в) 85.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пусть x - ^{новое} кол-во билетов, n - количество учеников
т.к. исход ^{х74} равновер., $P(\text{вероятность}) = \frac{\text{кол-во благоприят. распр. билетов}}{\text{кол-во всевозможн. распр.}}$

• в начале месяца:

всего исходов - C_n^4 (4 билета на n человек)

нужных: C_{n-2}^{4-2} (2 билета достались Бете и Вале, распр. остальные)

$$P = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \left(\frac{2}{24} \right) \cdot \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{24}{2} = \frac{12}{n(n-1)} = P_1$$

• в конце месяца: $P = \frac{C_{n-2}^{2+1}}{C_n^{4+1}} \quad P = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = \frac{\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-2-x+2)!}}{\frac{n!}{x!(n-x)!}}$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{(x-1)x}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)} = P_2$$

по усл.: $\frac{P_2}{P_1} = 3,5$; $\frac{x(x-1)}{\frac{12}{n(n-1)}} = \frac{7}{2}$; $x(x-1) = \frac{7}{2} \cdot 12 = 42$;

$$x^2 - x - 42 = 0;$$

$$(x-7)(x+6) = 0;$$

$$x = \begin{cases} -6 \leftarrow \text{невозможно} \\ 7 \end{cases}$$

Ответ: 7



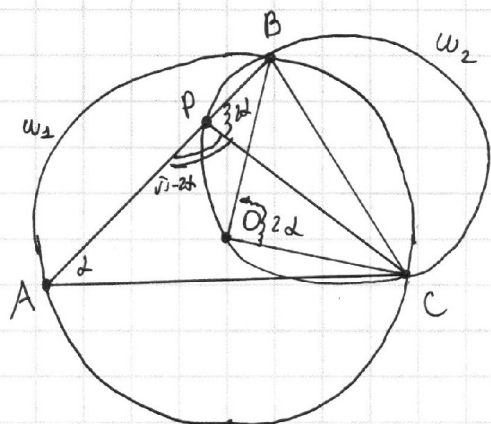
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AP = \frac{16}{5}; PB = 2; AC = 4$$

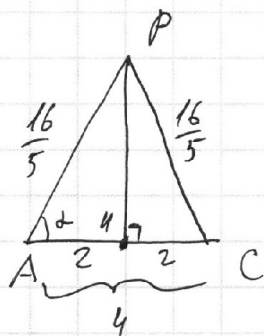


1) пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда
 $\angle BOC = 2\alpha$ (центр дуги AC и $\triangle BOC$ - центр; $\angle CAB$ - впис.)

2) $\angle CPB = \angle BOC$ (опис. в ω_2 на дугу BC)
 $= 2\alpha$
 Тогда $\angle APC = 180 - 2\alpha$ (на 1 прямой $C \in CPB$)

3) в $\triangle APC$ $\angle ACP = 180 - \angle APC - \angle PAC$
 $= 180 - (180 - 2\alpha) - \alpha = \alpha$
 вывод: $\triangle APC$ - равноб.; $AP = PC = \frac{16}{5}$
 $AC = 4$

4) рассм. $\triangle APC$:



(провед. PH - высоту и одну из медиан)

$$AH = HC = \frac{4}{2} = 2$$

$$\sin \alpha = \frac{PH}{AP}$$

$$PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 2^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{16-10}{5}\right)\left(\frac{16+10}{5}\right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3}{5^2}} = \frac{2}{5} \sqrt{39}$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{2}{5} \sqrt{39}}{\frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$5) \triangle ABC: S = \frac{BA \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{2} = \frac{\left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}}{2}$$

$$= \frac{26 \cdot 4 \cdot \sqrt{39}}{5 \cdot 2 \cdot 8} = \frac{13 \sqrt{39}}{10}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13 \sqrt{39}}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

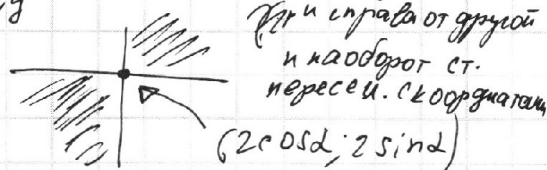
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 & (1); & (1): \begin{cases} x-2\cos\alpha \geq 0 \\ y-2\sin\alpha \geq 0 \\ x-2\cos\alpha \leq 0 \\ y-2\sin\alpha \leq 0 \end{cases} \\ x^2+y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

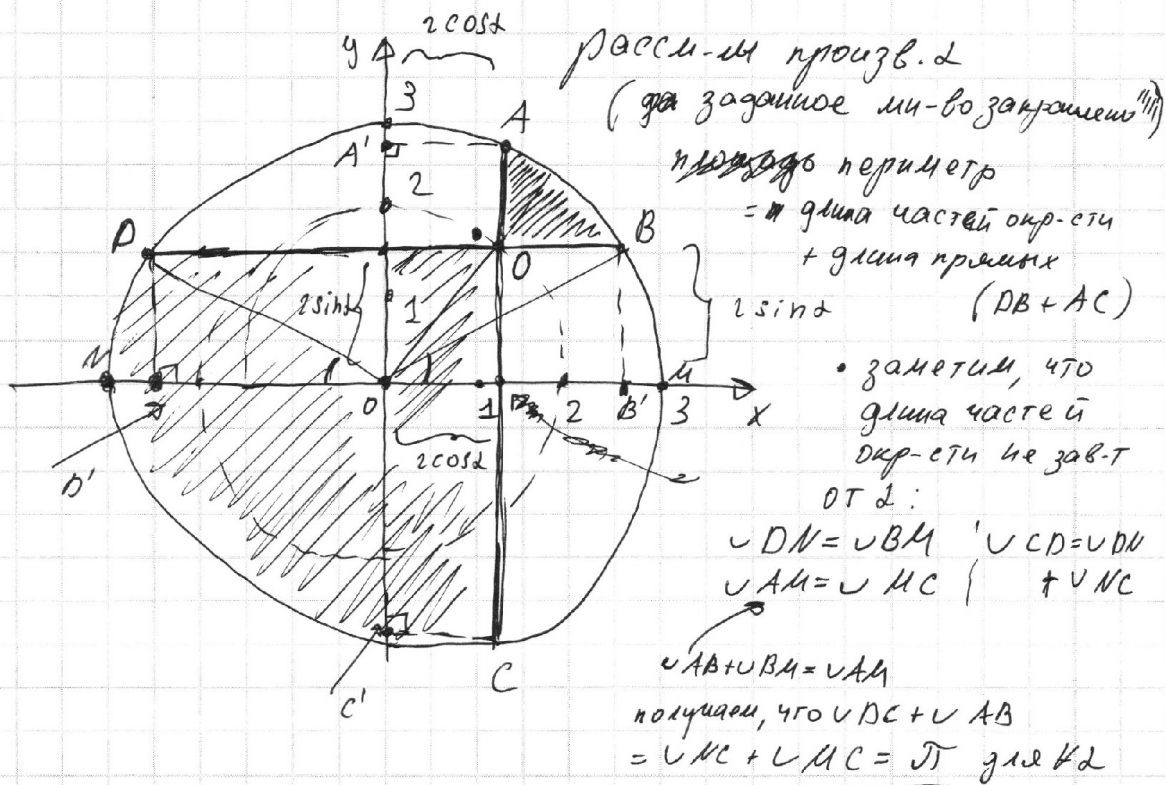
$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$

при фикс. α (1) задаёт на координ. пл-сти 2 области: выше одной прямой и ниже другой



• заметим, что мн-во точек, зав-с. от α с коорд. -ми $(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$ - окр-сть радиуса 2 (из отрез. $\sin$ и $\cos$) (на x, y)

(2) задаёт мн-во точек, лежащих внутри окр-сти радиуса $R=3$ с центром в т. $(0;0)$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, периметр $M = \pi R + [\text{длина прямых}]$

3
const

$$DB + AC = D'B' + C'A' \text{ (на рис.)} = 2\sqrt{R^2 - 4\sin^2 \alpha} + 2\sqrt{R^2 - 4\cos^2 \alpha}$$

(по теор. Пифагора) * введём $x = 2\sin \alpha$; $x \in [-2; +2]$;

$R = 3$ $4\sin^2 \alpha = x^2$; $4\cos^2 \alpha = 4 - 4\sin^2 \alpha = 4 - x^2$;

Тогда длина прямых (далее $f(x)$) $= 2\sqrt{9 - x^2} + 2\sqrt{5 + x^2}$

$$f(x) = 2\sqrt{9 - x^2} + 2\sqrt{5 + x^2}; \quad \frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \cdot -2x + \frac{1}{\sqrt{5 + x^2}} \cdot 2x$$

$$= 2x \left(\frac{1}{\sqrt{5 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \right) \text{ или производных: } x = 0 \text{ и } \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{5 + x^2}$$

$f'(-2) = -4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) > 0$
 $f'(-1) = -2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) < 0$
 $f'(1) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) > 0$
 $f'(2) = 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) < 0$

$9 - x^2 = 5 + x^2$
 $2x^2 = 4$
 $x = \pm \sqrt{2}$

$f(x)$ max при $x = \pm \sqrt{2}$ тогда $f(x) = 4\sqrt{4}$
 это происх. при $2\sin \alpha = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(2 \cdot \sqrt{9 - 2} + 2 \cdot \sqrt{5 + 2})$

$M(\alpha)_{\max} = \pi \cdot 3 + 4\sqrt{4}$, достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $3\pi + 4\sqrt{4}$. $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$



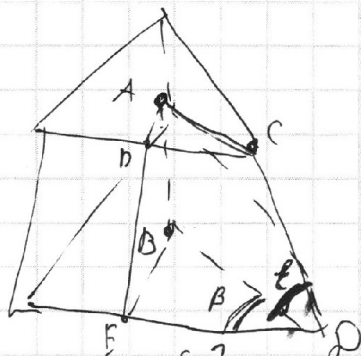
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

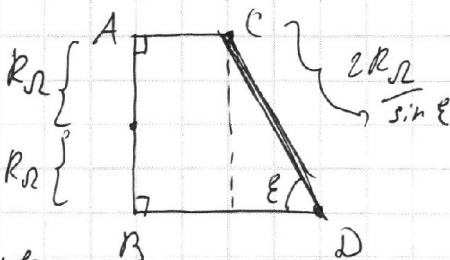
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

прав. усеч. пирамида $\rightarrow$ в осн-е n -угольником, из центра пер. линия через
их центры перпендикулярна им



рассм-м сечение, перпенг. основанию и
проход. через центр и вершину одного (тогда
обоих)

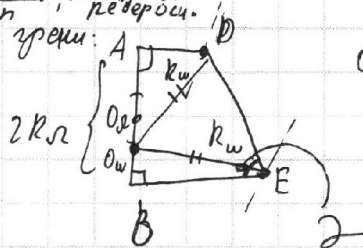


ϵ -угол при вершине п. сн
 $\angle \beta = \frac{180(n-2)}{2n}$, n -кол-во
ребер осн.

сечение, перпенг. ребрам:

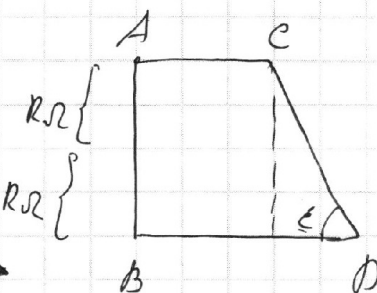
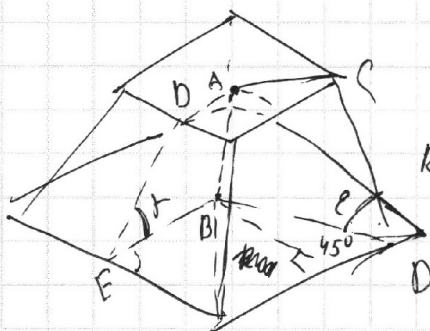
$$\cos \epsilon = \cos \angle CDB \cdot \cos \beta;$$

по теор. о 3х cos



Ом равны уг. от D и E, т.к.
касательн. прямых через эти
т., перпендикулярных им

при $n=4$:



$$\begin{aligned} CD \sin \epsilon &= 2R_n \\ &= DE \cdot \sin \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \delta \cdot \cos 45^\circ &= \cos \epsilon; \\ \cos \delta &= \sqrt{2} \cos \epsilon \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A \ aaaa = a \cdot 1111$$

$$B \ \cancel{x} \ \cancel{x} \ \cancel{x} \ 1$$

$$C \ \dots 5$$

$$1111: * \ 11 \cdot 101$$

В B или C есть 51 и 101

В C не может быть 101 ,

$$\Rightarrow B = B \cdot 101, \text{ но в } B \text{ есть } 1 \Rightarrow$$

$$\cancel{11} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{11} \cdot 101$$

$$B = 101$$

$$11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$$

$$a \cdot 11 \cdot 101$$

$$a \cdot 11 \cdot 101$$

$$55$$

$$101$$

$$a \cdot 5 - \text{полн. кв-т}$$

$$a = 5$$

$$11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}, \quad x, y > 0;$$

$$= x(x^2 - 3y)$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}; \quad (x-3)(y+3)$$

$$y(x-3)(y+3) + x(x-3)(y+3) + (x-3)(y+3) = x y (y+3) + x y (x-3) + x y;$$

$$(x+y+1)(x-3)(y+3) = xy(y+3+x-3+1);$$

$$x \cdot y + 1 = 0 \quad x$$

$$(x-3)(y+3) = xy;$$

$$xy - 3y + 3x - 9 = xy; \quad x = y+3;$$

$$M = (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = (y+3-y)(y^2 + (y+3)y + y^2) - 9y(y+3)$$

$$= 3(y^2 + 6y + 9 + y^2 + 3y + y^2) - 9y^2 - 27y;$$

$$= 9y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 27y = 27$$

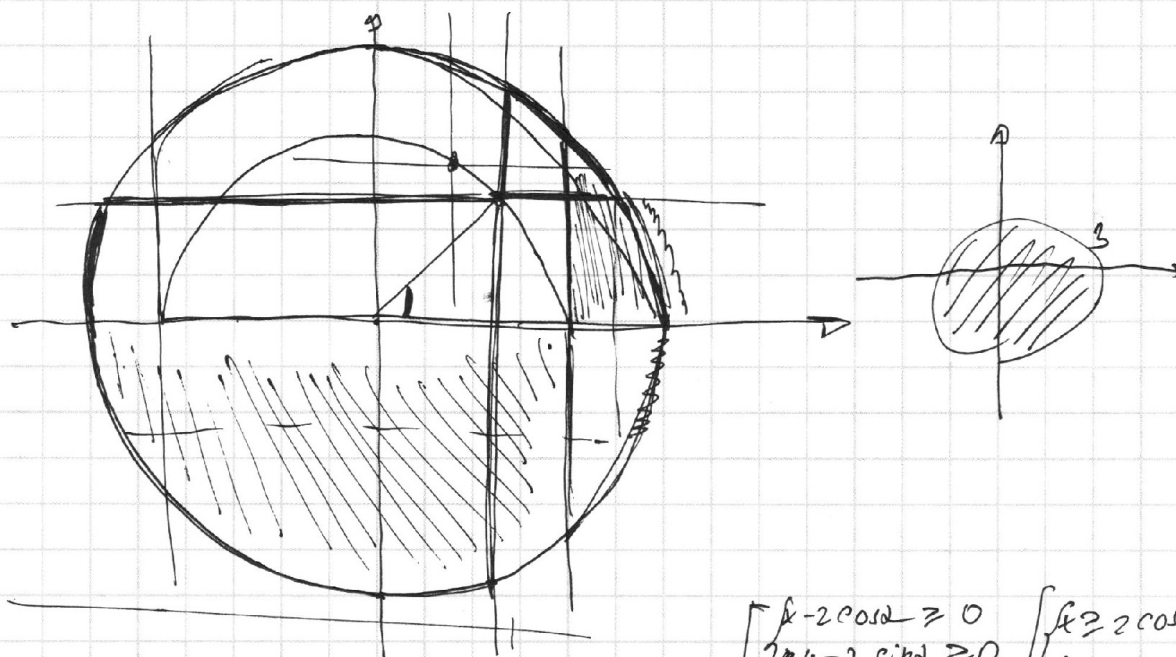


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

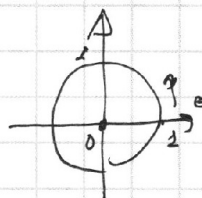
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0; \\ x^2 + y^2 \leq 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2\cos\alpha \geq 0 \\ y-2\sin\alpha \geq 0 \\ x-2\cos\alpha \leq 0 \\ y-2\sin\alpha \leq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$

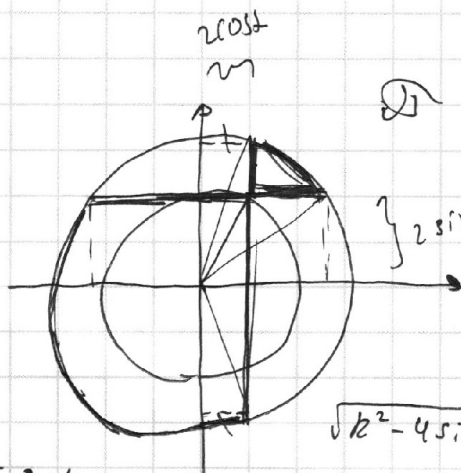
$$\cos 2\alpha = 1$$



$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 0 \\ x \leq 2 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \begin{aligned} \sin 2\alpha &= 1 \\ \cos 2\alpha &= 0 \end{aligned}$$



$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - 4\sin^2 \alpha}} \cdot -4$$

$$2\sqrt{R^2 - 4\cos^2 \alpha}$$

$$+ 2\sqrt{R^2 - 4\sin^2 \alpha}$$

$$\left(\sqrt{R^2 - 4\cos^2 \alpha} + \sqrt{R^2 - 4\sin^2 \alpha} \right)$$

$$\sqrt{R^2 - 4\sin^2 \alpha} \times \sqrt{R^2 - 4\cos^2 \alpha} \rightarrow \max$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

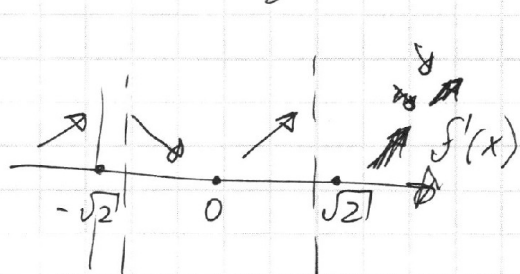
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{R^2 - 4\sin^2 \alpha} + \sqrt{R^2 + 4\sin^2 \alpha - 4} \quad 2\sin \alpha = x \quad x \in [-1; 1];$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot -2x + \frac{1}{2\sqrt{R^2 + x^2 - 4}} \cdot 2x = x \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2 - 4}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)$$

$$\frac{d}{dx} = 0 : \text{ либо } x = 0, \text{ либо } \sqrt{R^2 + x^2 - 4} = \sqrt{R^2 - x^2}$$



$$R^2 + x^2 - 4 = R^2 - x^2$$

$$2x^2 = 4$$

$$x = \pm \sqrt{2} \quad R = 3$$

$$g(x) = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{9 + x^2 - 4}} - \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} \right)$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) > 0$$

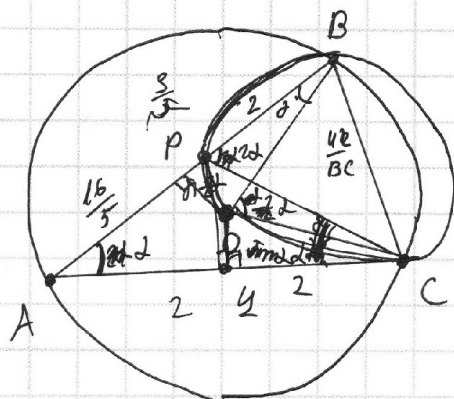


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

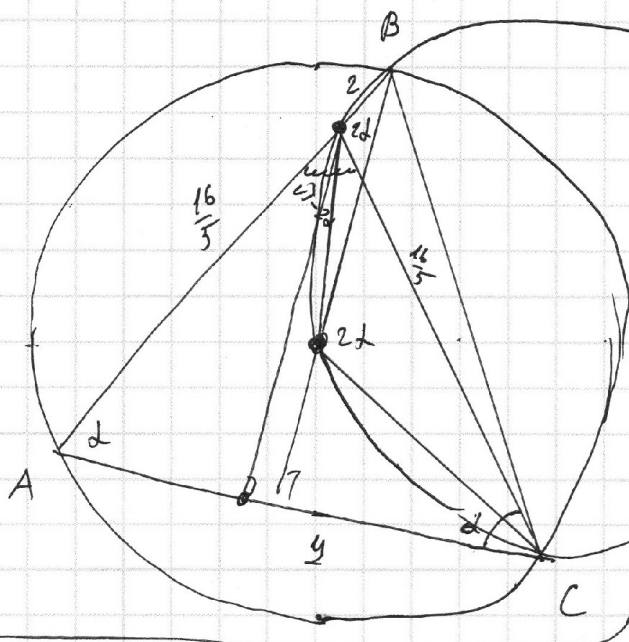
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S = \frac{AB \cdot BC \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$= \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$

$$\sqrt{\left(3\frac{1}{5}\right)^2 - (2)^2} = \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{26}{5}} = \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13}{5^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \sqrt{39}$$



$$\sin \alpha = \frac{\frac{2}{5} \sqrt{39}}{\frac{16}{5}}$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{39}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{39} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4$$

$$= \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

дано: окр. W_2 (Р-не случ. т.)

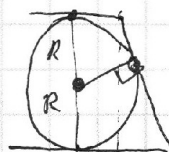
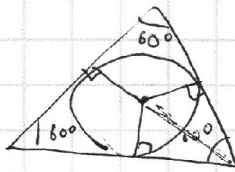
$$OC = BE$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}; BC = \frac{4R}{AB \cdot AC}$$

$$2R = \frac{\frac{4R}{BC}}{\sin \alpha}$$

$$BC = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$2R = \frac{BC}{\sin \alpha}; \sin \alpha = \frac{BC}{2R}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha (\sin \alpha - \sin \beta) = \cos \alpha (\cos \alpha + \cos \beta)$$

$$\underbrace{\sin(\alpha+\beta)}_f - \underbrace{\sin(\alpha-\beta)}_g = 2 \underbrace{\cos \alpha}_{\frac{f+g}{2}} \underbrace{\sin \beta}_{\frac{f-g}{2}}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

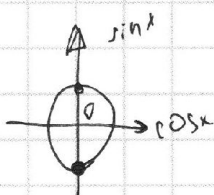
$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}$$



4 ; 4n + x

n

$$P = \frac{\text{благотвор.}}{\text{Все}} = \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}$$

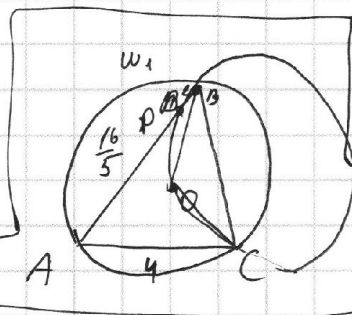
P в начале

C_n^k

8 1 2 3

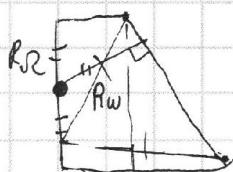
$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!}$$

12
13
14
23
34
34



4 1 2 3 4

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$



$\frac{R}{\sin \alpha}$

