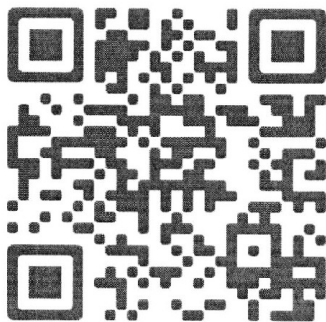




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 1

Число A представим как: $A = 11 \cdot 101 \cdot x$ *

Заметим, что, поскольку ABC — квадрат натурального числа, либо B , либо C должно содержать 101 как множитель. Это не может быть C , так как оно двузначное, значит, это B . Из всех двузначных чисел, делящихся на 101 число $(101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909)$, только одно содержит цифру 1 — это число 101 . Значит, $B = 101$. 101 не делится на 11 , значит, чтобы ABC было квадратом, C должно делиться на 11 . Из всех двузначных чисел, делящихся на 11 $(11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99)$, только одно содержит цифру 5 — это число 55 . Значит, $C = 55$. Тогда $ABC = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5x$. Чтобы оно было квадратом, $5x$ должно быть квадратом. При $1 \leq x \leq 9$ единственный квадрат — 25 при $x = 5$. Тогда $A = 5555$

Ответ: $(5555; 101; 55)$

* : $1 \leq x \leq 9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x + y + 1}{xy}$$

$$K^* = \frac{(x-3) + (y+3) + 1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x + y + 1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x + y + 1}{xy} = \frac{x + y + 1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\begin{cases} x \neq 0; x \neq 3 \\ y \neq 0; y \neq -3 \\ x + y + 1 = 0 \\ xy = (x-3)(y+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0; x \neq 3 \\ y \neq 0; y \neq -3 \\ y = -x - 1 \quad (1) \\ y = x - 3 \quad (2) \end{cases}$$

При $x > 0$: y в (1) будет отрицательно-
ным, что противоречит условию задачи.
При $y > 0$: x в (2) будет больше трёх,
откуда следует выполнение всех нера-
венств в системе. Таким образом,
она сводится к:

$$\begin{cases} x > 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 8xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 8xy = \\ &= (x - x + 3)(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2) - 8x(x-3) = \\ &= 3(3x^2 - 8x + 9) - 8x^2 + 24x = 9x^2 - 24x + 27 - \\ &- 8x^2 + 24x = \boxed{27} - \text{Ответ} \end{aligned}$$



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3

$$\begin{aligned} a) \quad & (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ & 2 \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \sin \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos \pi x \\ & \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) (\sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \sin \pi x - \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos \pi x) = 0 \\ & \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) (\cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x\right) = 0 \\ & \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k & 0 & k \in \mathbb{Z} \\ \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2k \\ 3x - y = 1 + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 + 2k \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

б) Ограничения: $-4 \leq x \leq 4$
 $-8 \leq y \leq 8$

Заметим, что $\arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arccos\left(\frac{y}{8}\right) < 2\pi$ выполняется при любых x и y (с учетом ограничений), кроме случая $x = -4$ и $y = -8$. Также заметим, что при фиксированном x $y = -x + 1 + 2k$ и $y = 3x - 1 - 2k$ дают в качестве решений множество четных (если x — нечетное) или нечетных (если x — четное) чисел. Воспользуемся этим при переборе:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

x	y										n	
-4	-7,	-5,	-3,	-1,	1,	3,	5,	7,	9		9	
-3	-8,	-6,	-4,	-2	-2,	0,	2,	4,	6,	8	9 9	
-2	-9,	-7,	-5,	-3,	-1,	1,	3,	5,	7,	9	10	
-1	-8	-6	-4	-2	-2	0	2	4	6	8	9 9	
0	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	10	
1	-8	-6	-4	-2	-2	0	2	4	6	8	9 9	
2	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	10	
3	-8	-6	-4	-2	-2	0	2	4	6	8	9 9	
4	-9	-7	-5	-3	-1	1	1	3	5	7	9	10

Ответ: 85 решений

Решение: а) $\begin{cases} y = -x + 1 + 2k \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
б) 85



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть n — число одинадцатиклассников;
 x — число билетов на концерт в
конце месяца; p_1 и p_2 — вероятности
попасть на концерт в начале и
в конце месяца. Тогда

$$p_1 = \frac{C_4^2}{C_n^2} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!(n-2)!}{n!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$p_2 = \frac{C_x^2}{C_n^2} = \frac{x!}{2!(x-2)!} \cdot \frac{2!(n-2)!}{n!} = \frac{x!}{(x-2)!} \cdot \frac{\cancel{n!}}{(n-2)!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$p_2 = 3,5 p_1$$

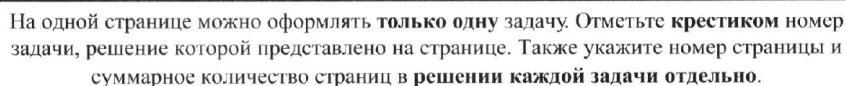
$$\frac{x(x-1)}{n(n-1)} = 3,5 \cdot \frac{12}{n(n-1)}$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ x = -6, \end{cases} \text{ неважно по условию задачи}$$

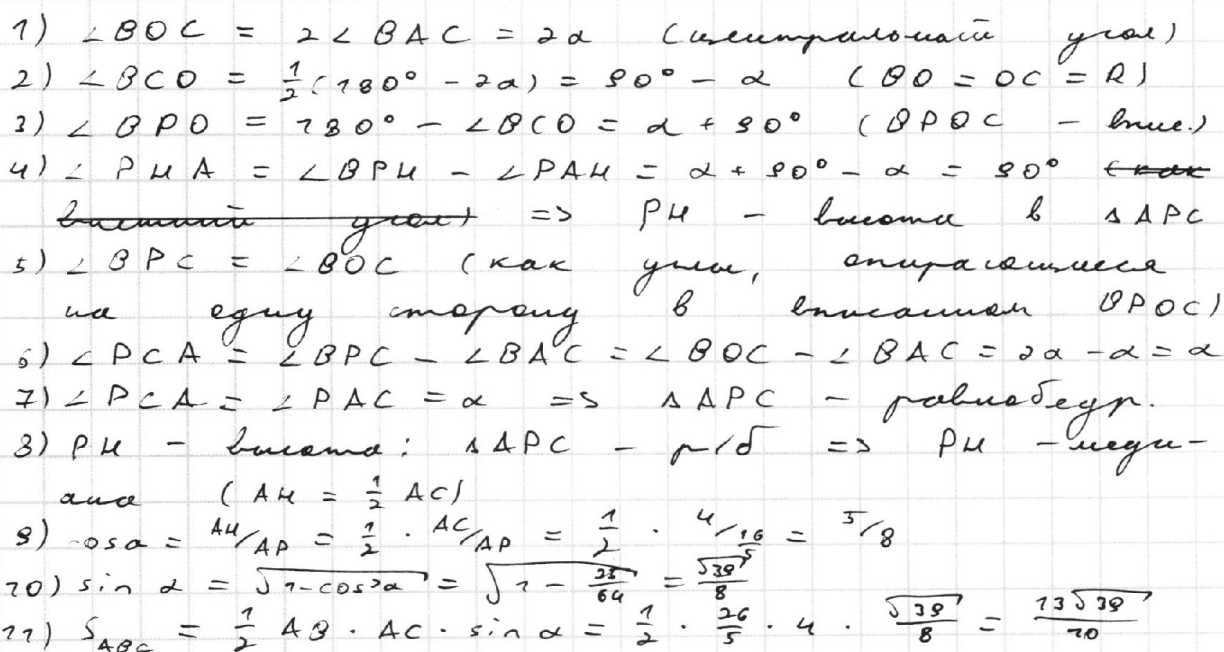
$$x = 7$$

Ответ: 7



СТРАНИЦА
7 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Orbiter: $S_{ABC} = \frac{73538}{20}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

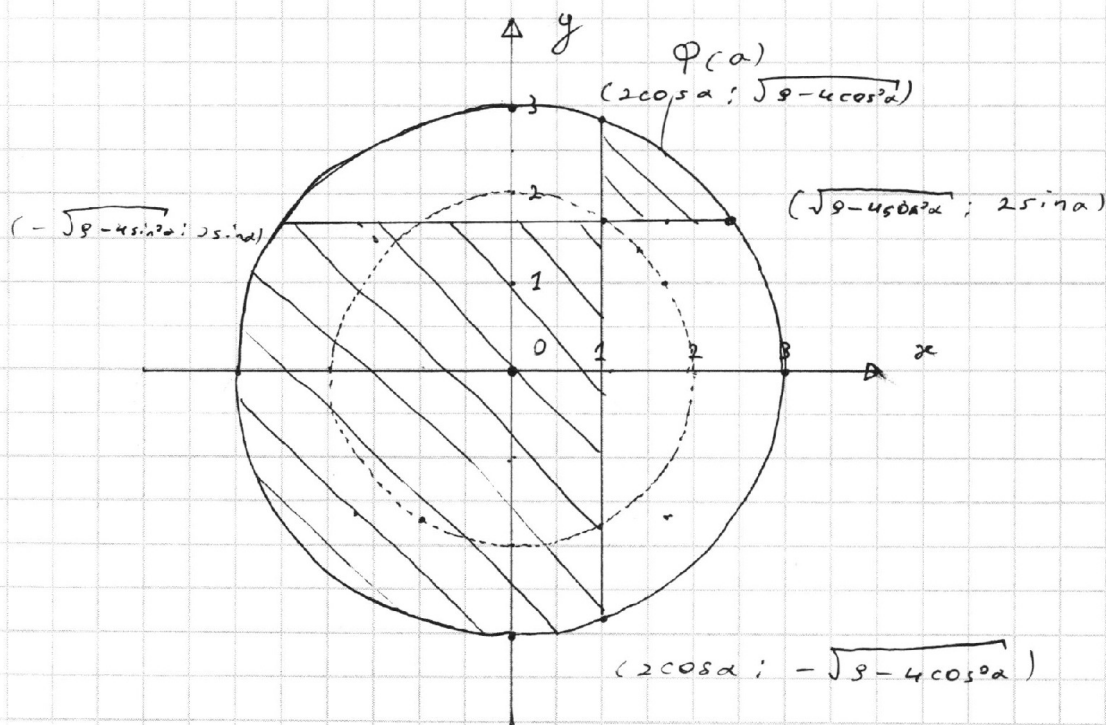
№ 6

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases} \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

- круг с радиусом 3 и центром $(0; 0)$

$(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$ пробегает при изменении α окружность радиуса 2 и центром $(0; 0)$



Длина хор - 20 отрезка: $2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$
Длина хор - 20 отрезка: $2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$

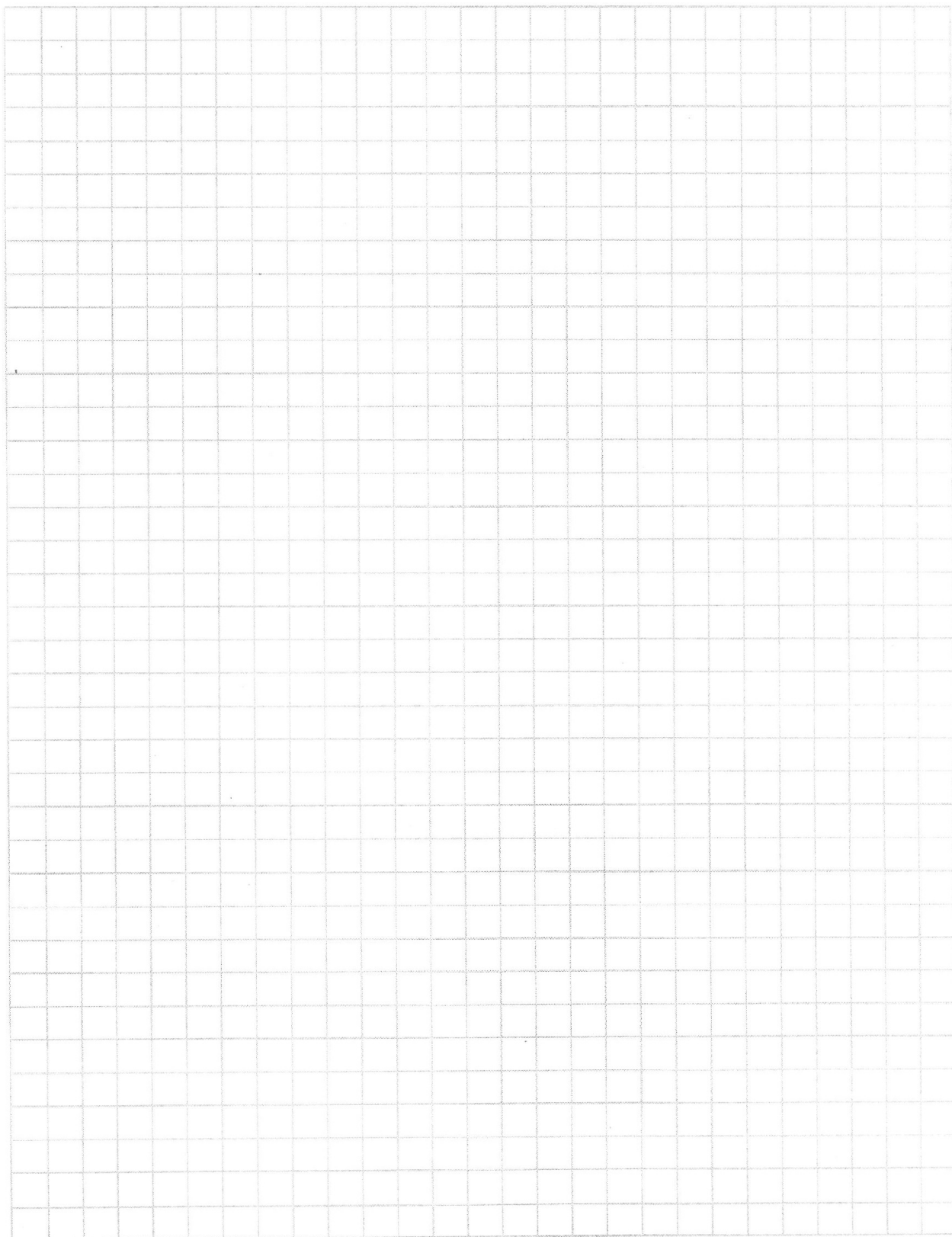


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

$$AB = AP + PB$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad h_1$$

$$\cos \alpha = \frac{AH}{AP} \quad (\text{в т.т.})$$

$$AH = \frac{1}{2} AC \quad (\text{ср. кат.})$$

$$\angle PCA = \angle PAC$$

$$\angle PCA = \angle OPC = \angle PAC$$

$$\angle OPC = \angle OOC = 2\alpha$$

$$\frac{OC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{OC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{OC}{\cos \alpha} = \frac{OC}{\sin 2\alpha}$$

$$OC = \frac{2 \cos \alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$OC^2 = 16 + \left(\frac{26}{5}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{26}{5} \cos 2\alpha$$

$$R = \frac{OC}{2 \sin \alpha}$$

$$\frac{h_a}{p_{u_2}} - 1 = \frac{p_{u_1}}{h_0}$$

$$\frac{p_{u_2}}{h_a} = \frac{PB}{AB}$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{p_{u_1}}{h_0}$$

$$\frac{PB}{h_a} = \frac{AB}{PB} - 1$$

$$16 + \left(\frac{26}{5}\right)^2 - \frac{208}{5} \cos 2\alpha = \frac{2026}{25} - \frac{208}{5} \cos \alpha = 4R^2 \sin^2 \alpha$$

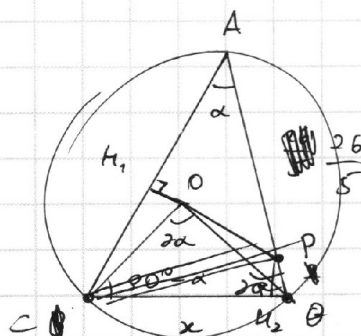
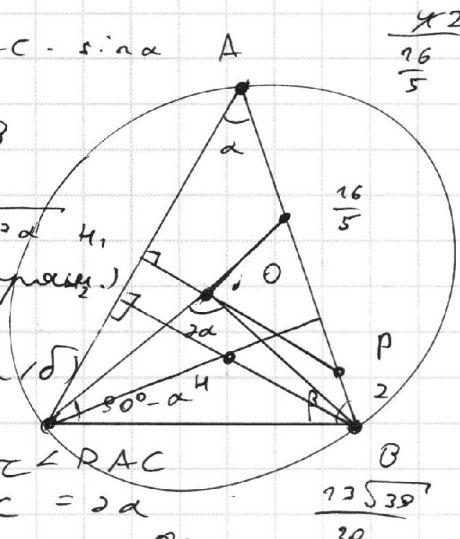
$$h_a h_0 - h_0 p_{u_2}$$

$$AP + PB = AB$$

$$\frac{AP}{PB}$$

$$x' = 2R \sin \alpha$$

$$S = \frac{abx}{4R}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1/A: 1111
2222
3333
4444
5555
6666
7777
8888
9999

11.101
22.101
33.101
44.101
55.101
66.101
77.101
88.101
99.101

B: 101
202
303
404
505
606
707
808
909

C: 51
52
53
54
55
56
57
58
59

75
76
77
78
79
80
81
82
83

$x = r \cos \alpha$
 $y = r \sin \alpha$
 $(r-2)(r-2)$
 $(r-2)^2 \sin \alpha \cos \alpha \geq 0$

$$7 \leq x \leq 9$$

$$101.101.11.11.55$$

$$5555:101:55$$

$$2) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) - 9xy$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x^3 + (x+1)^3 + 9x(x+1)$$

$$x-3 = -7$$

$$x = 2$$

$$y =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$$

$$0.5 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$-x-1 > 0$$

$$x < -1$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$y \neq 0$$

$$y \neq -3$$

$$x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3)$$

$$27$$

$$(x^2 + x^2 - 3x + x^2 - (x+9))$$

$$3x^2 - 3x + 27 - 9x^2 + 27x$$

$$\sin(\pi x) - \sin(\pi y) \sin(\pi x) =$$

$$= (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) = \cos(\alpha) + \cos(\beta)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) = \sin(\alpha) + \sin(\beta)$$

$$2 \sin(\frac{\pi(x-y)}{2}) \cos(\frac{\pi(x+y)}{2}) \sin(\pi x) = 2 \cos(\frac{\pi(x-y)}{2}) \cos(\frac{\pi(x+y)}{2})$$

$$\cdot \cos(\pi x)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi y) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \sin \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos \pi x$$

$$\cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \sin \pi x - \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \cos \pi x \right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x\right) = 0 \right)$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$3x - y = 1 + 2k$$

$$x = \frac{2x}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2k \\ 3x - y = 1 + 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x + 2k \\ y = 3x - 1 - 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 - 2k \end{cases}$$

$$d) -4 \leq x \leq 4$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

$$-4 : 9 \quad -3 : 8 \quad -2 : 9 \quad -1 :$$

$$P(x) = \frac{7}{5}$$

$$= P\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{7}$$

$$P(x) = \frac{-1}{-3}$$

$$= P(x + 2\pi) = \frac{-5}{-7}$$

$$n \quad 4$$

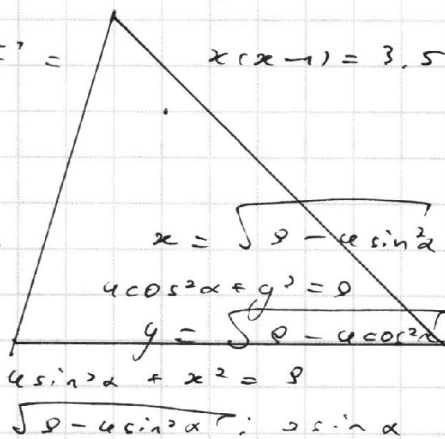
$$n \quad x$$

$$s.$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{cases}$$

$$y = 2 \sin \alpha$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{9}{4 \cos^2 x} - 1}$$



$$x(x-1) = 3,5 \cdot 12 \quad (n-1)n$$

$$= \frac{1}{3,5} \cdot \frac{x!}{(x-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\frac{\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}}{2 \sin \alpha}$$