



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Число A имеет вид: $1111 \cdot a$ (где a - цифра от 1 до 9),

$$A = 1111 \cdot a = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{простое}}}{11} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{простое}}}{101} \cdot a$$

2) $A \cdot B \cdot C$ - квадрат числа, т.к. $A : 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C$ должно делиться на 101^2 , т.к. в A содержится только один множитель 101 , а $C < 100 \Rightarrow$ не может делиться на $101 \Rightarrow B : 101$; B содержит цифру 6 $\Rightarrow$ единственное подходящее число $B = 606$

3) Аналогично т.к. $A : 11 \Rightarrow A \cdot B \cdot C$ должно $: 11^2$, в A только один множитель 11 (т.к. a - цифра от 1 до 9 и не может $: 11$), $B = 606 / 11 \Rightarrow C$ должно делиться на 11 ; C содержит цифру 3 и $10 \leq C \leq 99 \Rightarrow$ единствен. подходящее число $C = 33$

$$4) A \cdot B \cdot C = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot a}_A \cdot \underbrace{101 \cdot 2 \cdot 3}_B \cdot \underbrace{11 \cdot 3}_C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2a$$

$\Rightarrow$ т.к. $A \cdot B \cdot C$ - квадрат числа $\Rightarrow 2a$ тоже должно быть квадратом числа, а так как $1 \leq a \leq 9$, существуют только два подходящих значения a :



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = 2 \quad (\text{тогда } 2a = 2 \cdot 2 = 2^2)$$

$$a_2 = 8 \quad (\text{тогда } 2a = 2 \cdot 8 = 16 = 4^2)$$

$\Rightarrow$ получится существует два подходящих числа A :

$$A = 2222 \text{ и } A = 8888$$

5) Проверим, что тройки $(2222; 606; 33)$ и $(8888; 606; 33)$ действительно подходят:

$$2222 \cdot 606 \cdot 33 = 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 3 = (101 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 2)^2$$

$$8888 \cdot 606 \cdot 33 = 11 \cdot 101 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 3 = (101 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 3)^2$$

Ответ: 1) $(A_1; B_1; C_1) = (2222; 606; 33)$

2) $(A_2; B_2; C_2) = (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[2] Из условия: значение K не зависит при $x_1 = x-2$ и $y_1 = y+2$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

Опр: по условию: $x, y > 0$, $x \neq 2$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{(y+2)+(x-2)+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$
$$xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$2y - 2x + 4 = 0 \Rightarrow y = x - 2$$

($\Rightarrow$ опр: $x > 2$)

Подставим в $M = x^3 - y^3 - 6xy$, что $y = x - 2$:

$$M = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) = \cancel{x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x}$$

$$= x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$

Ответ: $M = 8$ (при $x > 2$, $y > 0$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☒ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) а) Пусть $\pi x = \alpha$, $\pi y = \beta$:

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha - \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

↓ по формулам приведения

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(2\alpha)$$

$$\Rightarrow 2 \text{ случая: } 1) \alpha - \beta = 2\alpha$$

$$2) \alpha - \beta = -2\alpha$$

Обратные замены:

$$1) \pi x - \pi y = 2\pi x \Rightarrow y = -x$$

$$2) \pi x - \pi y = -2\pi x \Rightarrow y = 3x$$

Ответ: 1) $y = -x$; 2) $y = 3x$

↑ все пары $(x; y)$ из этих функций

$$b) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

Для первого набора ответов:

$$1) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{-x}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} - \arcsin \frac{x}{2} < \pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{6} = \begin{cases} \frac{x}{6}, & -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ \pi - \frac{x}{6} & (\text{где } \text{ост. } x) \end{cases} \quad \downarrow \quad 2\pi n \approx 6,28n$$

$$-1,57 + 2\pi n \leq x + 2\pi n \leq 1,57 + 2\pi n$$

$$\arcsin \frac{-x}{2} = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & -1,57 + 2\pi n \leq x + 2\pi n \leq 1,57 + 2\pi n \\ \pi + \frac{x}{2}, & \text{где } \text{ост. } x \end{cases} \quad \times$$

$$\Rightarrow \text{где } x \in [-1,57 + 2\pi n; 1,57 + 2\pi n]$$

$$\frac{x}{6} - \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow -\frac{1}{3}x < 3,14$$

$$\Rightarrow x > 9,42 - \text{не в интервале}$$

2) второй набор:

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{3x}{2} < \pi$$

$$\text{аналогично где } x \in [-1,57 + 2\pi n; 1,57 + 2\pi n]$$

$$\frac{x}{6} + \frac{3x}{2} < \pi$$

$$\frac{10x}{6} < \pi \Rightarrow x < \frac{3\pi}{5} \approx 1,8$$

подходит 3
корня (1, 0 и -1)

Ответ: 3 пары



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14 Пусть всего x одинадцатилетних, а в конце месяца было выдано a билетов.

1) Вероятность, что Петя и Вова вместе попадут на концерт для 4х билетов $= p_1 = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$

(вер., что Вова попадет при условии, что Петя тоже попал)

2) Вероятность для a билетов $= p_2 = \frac{a}{x} \cdot \frac{a-1}{x-1}$

3) Из усов. известно, что $\frac{p_2}{p_1} = 6 \Rightarrow \frac{a(a-1) \cdot x(x-1)}{x(x-1) \cdot 4 \cdot 3} = 6$

$$\Rightarrow \frac{a(a-1)}{12} = 6$$

$$a^2 - a - 72 = 0$$

т.к. по усов. $a > 0 \Rightarrow a = 9$ - единственный корень, подходящий по усов.

Ответ: 9 билетов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

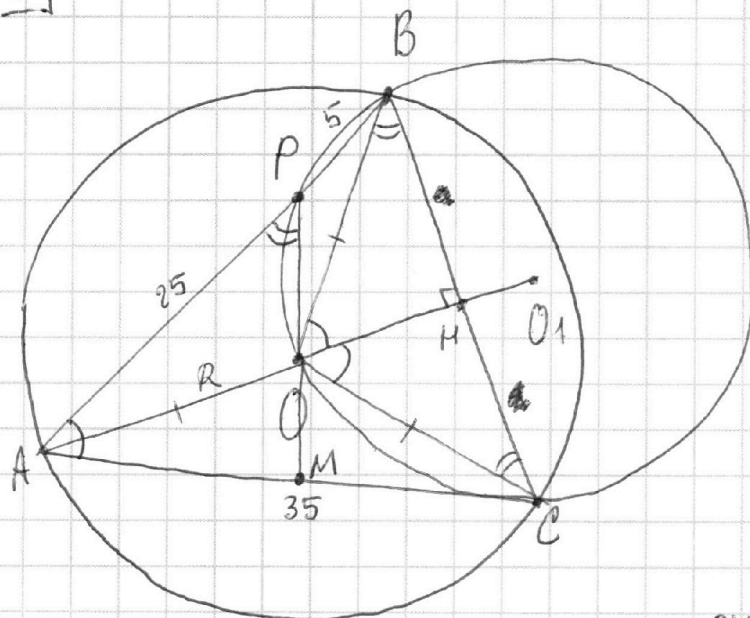


СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



1) Пусть O_1 - центр ω_2

$$AO = OB = OC = R$$

$\Rightarrow OBC$ - равноб.,

$\Rightarrow OH$ - сер. перп. к BC ,

$$O_1 \in OH$$

2) Пусть $\angle BAC = \alpha$,

$\angle BOC$ - центр. $\Rightarrow = 2\alpha$

OH - биссектр $\Rightarrow \angle BOK = \angle COH = \alpha$

3) Пусть $\angle OCM = \angle OBN = \beta$ (т.к. OBC - равноб.)

$\angle OHC$ - прям $\Rightarrow \angle \beta = 90 - \alpha$

4) $POCB$ - впис $\Rightarrow \angle OPB = 180 - \beta \Rightarrow \angle APO = \beta$ - смежные

5) продолжим PO , пусть $PO \cap AC = M$

в $\triangle APM$ $\angle A = \alpha$, $\angle P = \beta \Rightarrow \angle AMP = 90^\circ$ - прямоугольный.

$\Rightarrow PM \perp AC$

6) $PM \perp AC$, PM соед. O - центр опис $\Rightarrow PM$ - сер. перп. к AC

$$\Rightarrow AM = MC = \frac{35}{2}$$

7) по теор. Пифаг. $PM = \sqrt{25^2 - \left(\frac{35}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{(50+35)(50-35)}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\sqrt{17}}{2}$

8) $\sin \alpha = \frac{PM}{AP} = \frac{5\sqrt{3}\sqrt{17}}{2 \cdot 25} = \frac{\sqrt{51}}{10}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$g) S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{30 \cdot 35 \cdot \sqrt{51}}{10 \cdot 2} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$



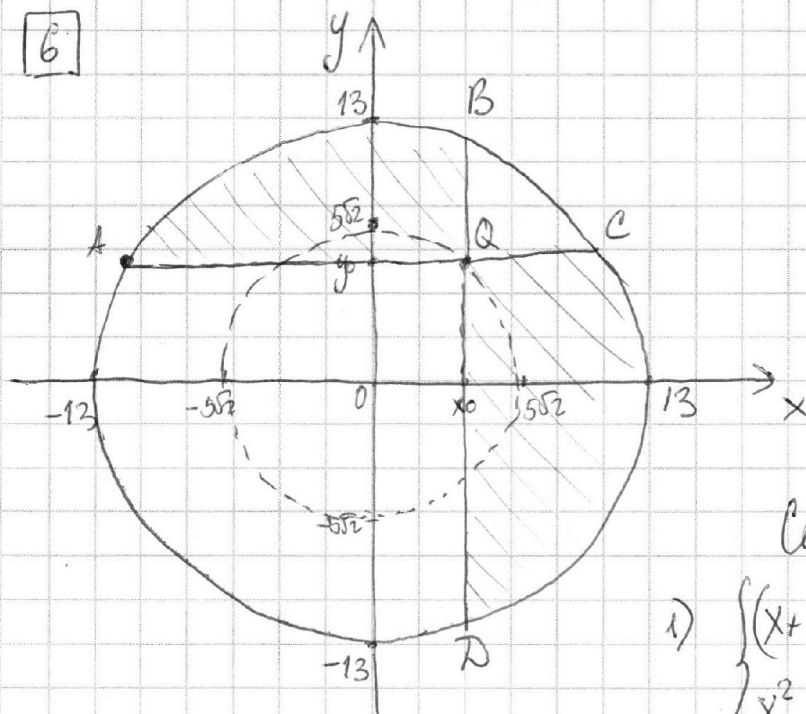
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6



Пусть $\cos \alpha = n$,
тогда $\sin \alpha = \pm \sqrt{1-n^2}$

~~Следовательно:~~
 ~~$(x+5\sqrt{2}n)(y \pm 5\sqrt{2}\sqrt{1-n^2}) \leq 0$~~

Система:

$$1) \begin{cases} (x+5\sqrt{2}n)(y \pm 5\sqrt{2}\sqrt{1-n^2}) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

↑
траект. окружн. с $r=13$
 $\Rightarrow$ точки внутри окружн.

$$2) (x+5\sqrt{2}n)(y \pm 5\sqrt{2}\sqrt{1-n^2}) \leq 0$$

$$x_0 = -5\sqrt{2}n \quad y_0 = \pm 5\sqrt{2}\sqrt{1-n^2}$$

Ограничение имеет вид:

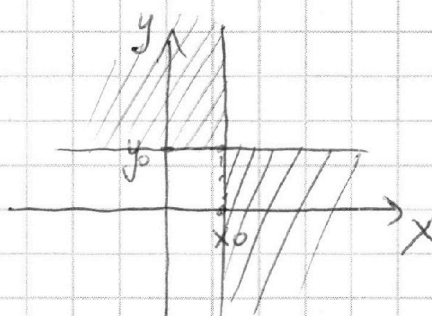
$$x_0^2 = 50n^2, \quad y_0^2 = 50 - 50n^2$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 50 \Rightarrow \text{точки } x_0 \text{ и } y_0 \text{ лежат на окружн. с } r=5\sqrt{2}$$

3) Посмотрим на график: периметр M нашей фигуры

$$\text{равен } \widehat{AB} + \widehat{CD} + AC + BD \rightarrow \max$$

$$\text{т.к. } \angle AQB = 90^\circ = \angle AQD \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ - \text{всегда}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

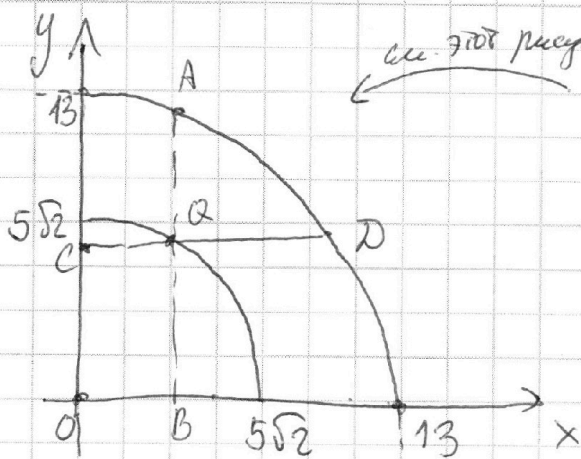
1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⇒ достаточно проанализировать $AC + BD$

$$Ay_0 = y_0C = \frac{1}{2}AC, \quad Bx_0 = x_0D = \frac{1}{2}BD \Rightarrow y_0C + x_0D \rightarrow \max$$

Все 4 четверти (сектора круга) симметричны ⇒ достаточно найти значения 1 радиуса на 1 секторе ⇒ и получим еще 3 симметричных.



$$4) AB + CD \rightarrow \max$$

$$AB + CD = \sqrt{169 - x_0^2} + \sqrt{169 - y_0^2} = \sqrt{169 - x_0^2} + \sqrt{119 + x_0^2} \quad | \cdot 2 \uparrow$$

$$169 - x_0^2 + 119 + x_0^2 + 2\sqrt{(169 - x_0^2)(119 + x_0^2)} \rightarrow \max$$

$$169 + 119 + 2\sqrt{(169 - x_0^2)(119 + x_0^2)} \Rightarrow 169 \cdot 119 + 50x_0^2 - x_0^4 \rightarrow \max$$

Это параб. ветв. вниз относ. x_0^2

$$\Rightarrow \text{Вершина в точке } x_0^2 = 25$$

$$\Rightarrow x_0 = 5$$

$$\text{При } x_0 = 5 \quad y_0 = \sqrt{50 - 25} = 5$$

$$\Rightarrow AB = CD = \sqrt{169 - 25} = 12$$

$$\Rightarrow \text{перим. } M = 12 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} (2\pi \cdot 13) = 48 + 13\pi$$

(половина длины окружности)



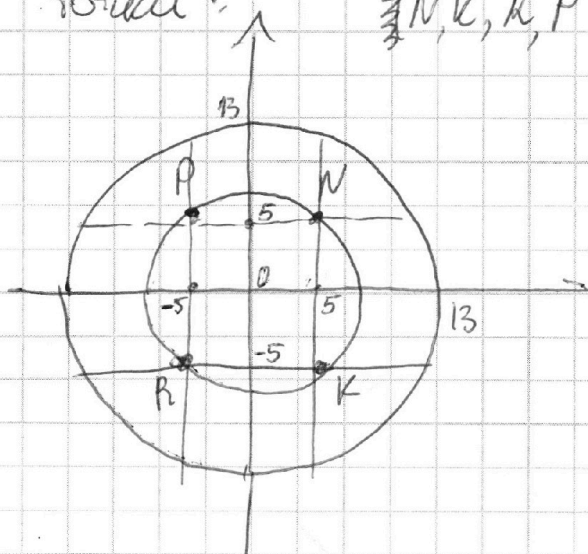
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Из симметрии следует, что также подходят все такие точки: N, K, R, P — подходят



б) $x_0 = -5\sqrt{2}n$

$$x_0 = -5\sqrt{2}n = \pm 5$$

$$\Rightarrow n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Обратим. замечаем

$$\cos a = n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: 1) $M_{\max} = 48 + 13\pi$

2) $a = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

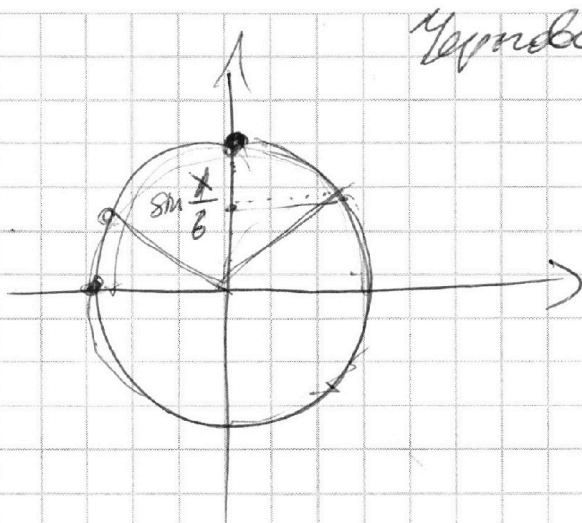
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{1}{2}$$

$$\pi + \pi =$$

$$\begin{array}{r|l} 942 & 5 \\ \hline 5 & 1,8 \\ \hline 44 & \\ \hline 40 & \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6

Черновик

$$x - y = 2x$$

$$y = -x$$

$$\cos \alpha = n$$

$$-1 \leq n \leq 1$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - n^2}$$

$$(x + 5\sqrt{2}n)(y + 5\sqrt{2}\sqrt{1 - n^2}) \leq 0$$

$$x_0 = -5\sqrt{2}n \quad n = \frac{x_0}{-5\sqrt{2}}$$

$$y_0 = -5\sqrt{2}\sqrt{1 - n^2}$$

$$-5\sqrt{2} \leq x_0 \leq 5\sqrt{2}$$

$$25 \cdot 2 + h^2$$

$$h = \sqrt{169 - 50}$$

$$= \sqrt{119} = \sqrt{7 \cdot 17}$$

$$\frac{1,7}{5,2}$$

$$y_0 = -5\sqrt{2} \pm \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{50}} = -5\sqrt{2} \pm \frac{\sqrt{50 - x_0^2}}{5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-50 \pm \sqrt{50 - x_0^2}}{5\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{169 - 50} = \sqrt{119}$$

$$y_0^2 = 50(1 - n^2)$$

$$x_0^2 = 50n^2$$

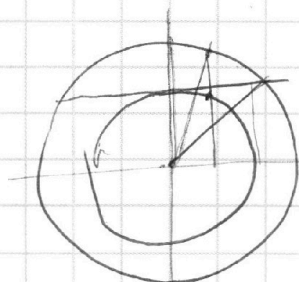
$$x_0^2 + y_0^2 =$$

$$P = 13 + \sqrt{119}$$

$$P_2 =$$

$$\cos \frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} + \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2 \cdot 2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

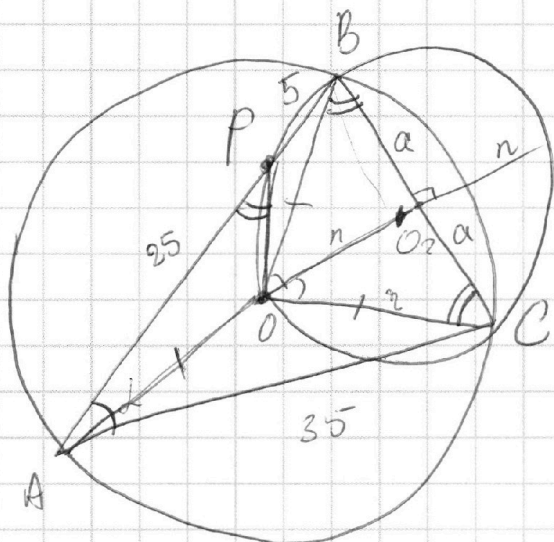
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

6)



$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$\frac{15 \cdot 30 \cdot 35}{4R}$$

$$S = 6 = \frac{12 \cdot 5}{10} = 6$$

$$\frac{2a}{\sin \alpha} = 2r = \frac{a}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{r}$$

$$\frac{2a}{\sin 2\alpha} = 2r \Rightarrow r = \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$25 \cdot 30 = r \left(r + \frac{2a}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \right)$$

$$25 \cdot 30 = r \left(r + \frac{2a \cdot r}{2 \cdot r \cdot \cos \alpha} \right)$$

$$\cos \alpha = \frac{30^2 + 35^2 - 4a^2}{2 \cdot 30 \cdot 35} = \frac{30}{35}$$

$$25 \cdot 30 = r^2 + \frac{r^2 (2 \cdot 30 \cdot 35)}{30^2 + 35^2 - 4a^2}$$

$$r^2 = \frac{25 \cdot 30}{1 + \frac{2 \cdot 30 \cdot 35}{30^2 + 35^2 - 4a^2}}$$

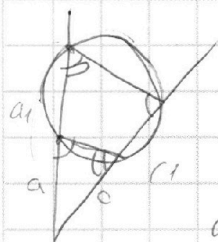
$$= \frac{25 \cdot 30}{30^2 + 35^2 - 4a^2 + 60 \cdot 35} \quad 15 \cdot 35 r = \frac{a}{\frac{1}{r} \cdot 2} \dots$$

$$= \frac{25 \cdot 30}{30^2 + 35 \cdot 95 - 4a^2}$$

$$c = \sqrt{r^2 - a^2}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} = \frac{r^2 + r^2 - a^2 - a^2}{2r^2 \cdot r} = \frac{r^2 - a^2}{25r - a^2}$$

$$\frac{a^2}{r^2} + \frac{r^2 - a^2}{r^2} = 1$$



$$\frac{a}{c} = \frac{c_1}{a_1}$$

$$a \cdot a_1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

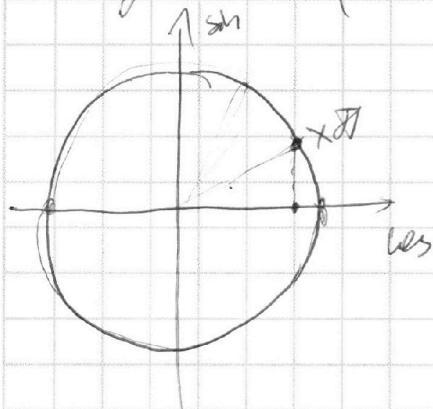
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

3) $x, y \in \mathbb{R}$



$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi y$$

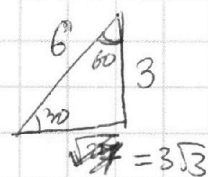
$$(\sin x + \sin y) \sin x = (\cos x - \cos y) \cos y$$

$$\sin^2 x + \sin x \sin y = \cos x \cos y - \cos^2 y$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$$

$$\# \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = \cos(\alpha + \beta) \quad 1) \alpha = \beta = \pi$$



4) Пусть $орнакс = x$

$$\text{вер 1: } \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$$

$$\text{вер. 2: } \frac{a}{x} \cdot \frac{a-1}{x-1}$$

$$S = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2 \cdot 2}$$

$$\frac{a(a-1)}{12} = 6$$

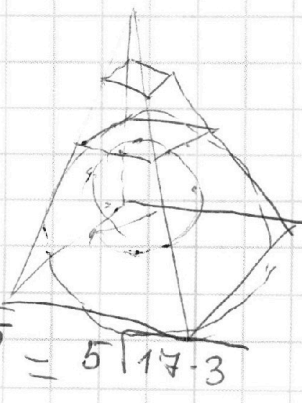
$$a^2 - a - 72 = 0$$

$$D = 1 + 288 = 289 \leftarrow 17^2$$

$$a_1 = \frac{1+17}{2} = 9$$

отв: 9

$$\frac{17}{17}$$



$$\sqrt{\frac{25^2 \cdot 4 - 35^2}{4}} = \frac{\sqrt{(50+35)(50-35)}}{2} = \frac{\sqrt{85 \cdot 15}}{2} = 5\sqrt{17 \cdot 3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

(1)

$$\begin{array}{r|l} 222 & 11 \\ 22 & 20a \\ \hline & 22 \end{array}$$

$$A = 11 \cdot \underbrace{a0a}_{\text{цифра}} = 11 \cdot 101 \cdot a$$

$$B = a \underline{6} \underline{6}$$

$$C = \underline{1} \underline{1} \underline{3}$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = x^2$$

$$\Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = 606$$

$$11 \cdot a \cdot 6 \cdot C = x^2$$

$$\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 33$$

$$11 \cdot a \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \Rightarrow a = 2$$

Ответ: 222, 606, 33

(2) $x, y > 0$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x+2)(y+2)}$$

$$= \frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$x - y - 2 = 0$$

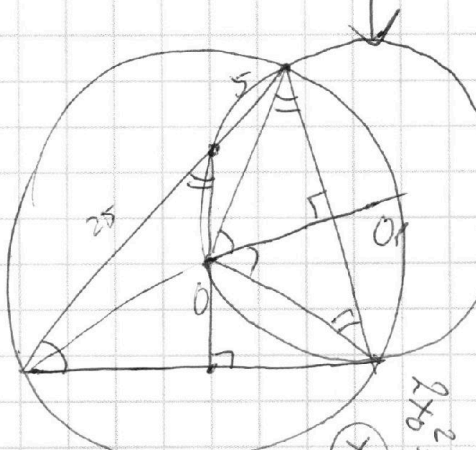
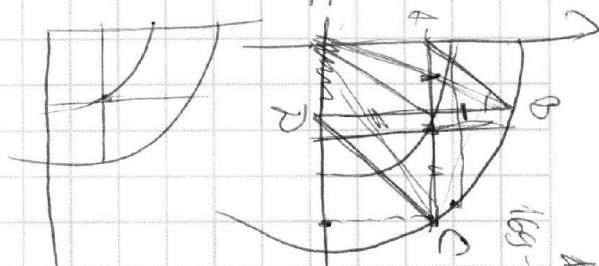
$$x = y + 2$$

$$M = (y+2)^3 - y^3 - 6y(y+2)$$

$$= x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy$$

$$= x^3 + x^2y + xy^2$$

$$= (y^2 + 4y + 4)(y+2) - y^3 - 6(y^2 + 2y) = y^3 + 2y^2 + 4y^2 + 8y + 4y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$



$$AC = \sqrt{169 - 10^2} + \sqrt{169 - y^2}$$

$$13 + \sqrt{119} \approx 24$$

$$x=5$$

$$2x^2 = 50$$