



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 4



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
  - $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N1.

По усл. число  $A$  состоит из одинак цифр, значит, оно можно представить в виде  $A = 1111 \cdot a$ , где  $a \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$   
 $A = 11 \cdot 101 \cdot a$

т.к. по условию  $A \cdot B \cdot C$  - квадрат ~~натурального числа~~, значит, что  $B \cdot C$  кратно нечетной степени 101 и нечет. степени 11.

Числа 101 и 11- простые и по усл. В-трехзначное, С-двухзначное, значит возможен только один случай: В-точно кратно 101, следовательно, оно представимо в виде  $B = 101B$ , где  $B$  может быть только цифрой (кроме нуля), т.к. иначе не будет выполнено условие его трехзначности. По условию число В содержит хотя бы одну цифру сим и из всех возможных вариантов для В ( $101, 202, 303, \dots, 909$ ) подходит только 707, то есть  $B = 7 \cdot 101$

Число В определилось однозначно и оно не кратно 11, значит число С: 11 и оно представимо в виде  $C = 11c$ , где с-цифра (кроме нуля). По условию содержит хотя бы одну единицу и из всех вариантов ( $11, 22, 33, \dots, 88, 99$ ) подходит только 11, значит,  $C = 11$  однозначно.

Для того, чтобы выполнялось условие квадрата натур. числа, а определялся как однозначн. и  $A = 7777 = 7 \cdot 101 \cdot 11$

В результате, возможна одна пара.

Ответ: (7777; 707; 11)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

По условию:  $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow \frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$$

возможны два случая: 1) числители равны нулю, знаменатели не равны нулю.

2) числители не равны нулю, знаменатели равны друг другу и не равны нулю.

1) Заметим, что  $y+x+3 > 0$  - всегда, т.к. по условию  $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$  значит, первый случай не дает корней при положительных  $x$  и  $y$ .

2) Числители точно не равны нулю, значит просто проверяем равенство знаменателей (и их не равенство нулю).

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4x = 4y + 16$$

$$x = y + 4$$

Подставим в выражение  $M$ :

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) =$$

$$= y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$

Выражение  $M$  при положительных  $x$  и  $y$  может принимать только значение 64.

Ответ: 64.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) \sin^2(\pi y) - \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) = \cos^2(\pi y) + \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y)$$

$$\underbrace{\cos^2(\pi y)}_{\text{косинус двойного угла}} - \underbrace{\sin^2(\pi y)}_{\text{косинус разности}} + \underbrace{\cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y)}_{\text{косинус разности}} + \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) = 0$$

$$\cos(2\pi y) + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

по формуле суммы косинусов:  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

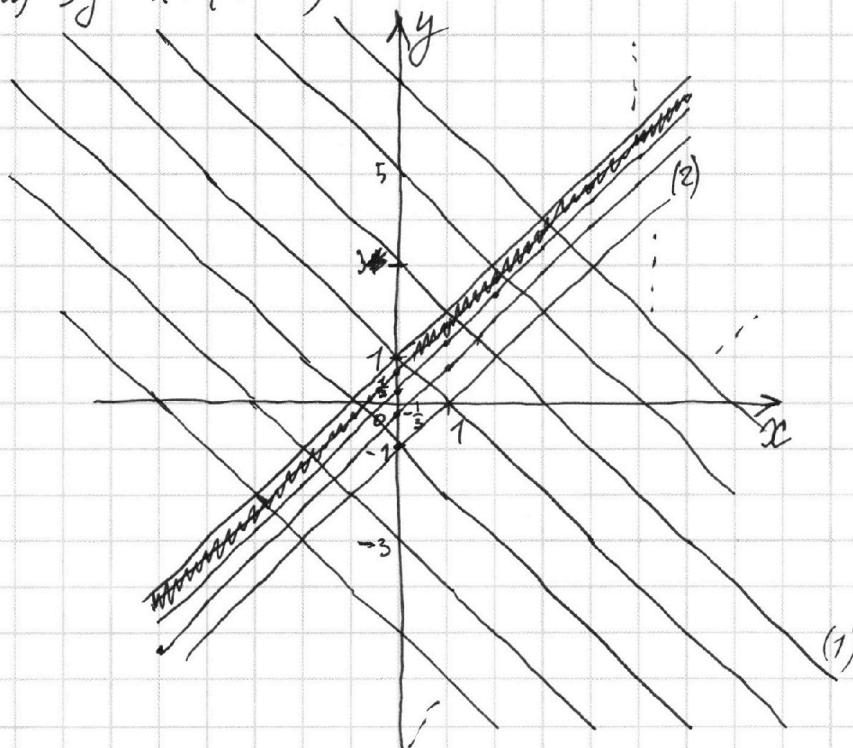
$$2 \cos\left(\frac{2\pi y + \pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi y - \pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi y + \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y - \pi x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi y + \pi x}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi y - \pi x}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2n \quad (1) \\ 3y - x = 1 + 2m \quad (2) \end{cases}, n, m \in \mathbb{Z}$$

2n+1 - нечетное число, все  $(x; y)$  удобно представить на графике  $xOy$  в виде множества прямых:

- 1)  $y = -x + (2n+1)$
- 2)  $3y = x + (2n+1)$  - прямая  $y = x + (2n+1)$ , спущенная по  $Oy$  в 3 раза.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N<sup>3</sup> (продолжение)

δ)  $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

Пусть  $\alpha = \arccos \frac{x}{7} \Rightarrow \alpha \in [0; \pi]$

и  $\beta = \arcsin \frac{y}{4} \Rightarrow \beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Замечаем, что ~~минимальное~~ <sup>такое</sup> значение  $(\alpha - \beta)$

достигается <sup>тогда</sup> при  $\min(\alpha) = 0$  и  $\max(\beta) = \frac{\pi}{2}$  и

равняется  $-\frac{\pi}{2}$ , значит, неравенство  $\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2}$

эквивалентно:

$$\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

При этом есть ограничение:

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{4} \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

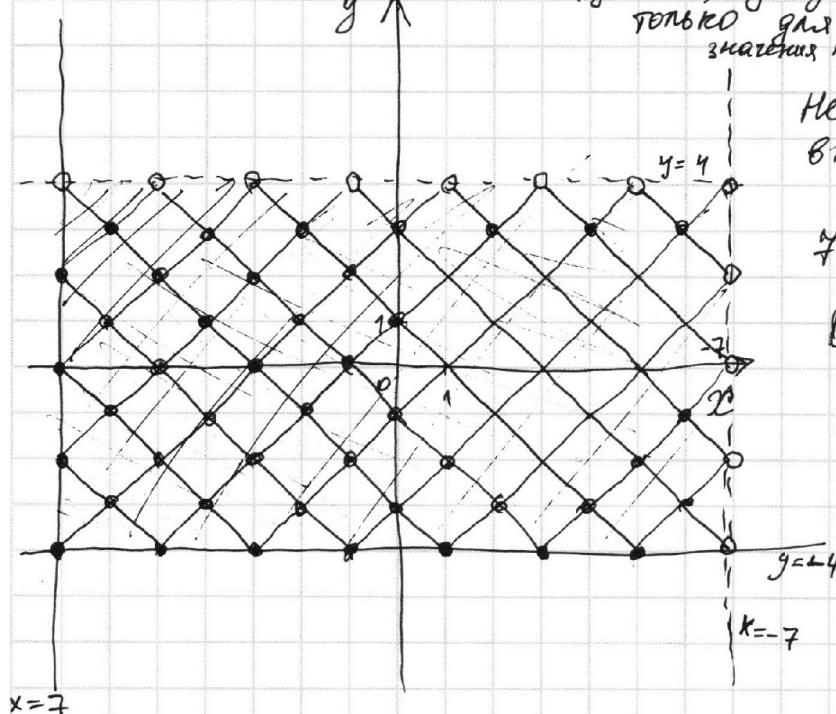
- Обозначим эти области на <sup>3</sup> графике ранее и посчитаем количество целых  $(x; y)$  (для (2) из пункта а) будем рисовать только для  $2n+1 : 3$ , т.к. иные будут значения не целые)

Не выходящих точек внути зоны  $\begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$

$$7 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 56$$

Ответ: а)  $\begin{cases} x+y=2n+1, \\ 3y-x=2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) 56.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№4.

Пусть всего в классе  $N$  учеников (включая Петя и Васю) и пусть  $x$ -столько билетов добавили Васю) к концу месяца,  $N \in \mathbb{N}$  и  $x \in \mathbb{N}$

Тогда вероятность в начале месяца для Пети и Васи:

$C_N^4$  - всего способов раздать четыре билета

$C_{N-2}^2$  - способов раздать два билета ученикам (кроме Васи и Пети, поэтому из  $N-2$ ) и два билета оставить Петя и Васе

$$P_1 = \frac{C_{N-2}^2}{C_N^4} = \frac{\frac{(N-2)(N-3)}{2}}{\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{12}{N(N-1)} \text{ - вероятность в начале месяца.}$$

В конце месяца билетов стало  $x+4$ :

$C_N^{x+4}$  - всего способов раздать  $x+4$  билета

$C_{N-2}^{x+2}$  - оставляем 2 билета Петя и Васе, оставляем раздать  $(N-2)$  ученикам (кроме Пети и Васи)

$$P_2 = \frac{C_{N-2}^{x+2}}{C_N^{x+4}} = \frac{\frac{(N-2)(N-3) \dots (N-x-3)}{2 \cdot 3 \dots (x+1)(x+2)}}{\frac{N(N-1)(N-2)(N-3) \dots (N-x-3)}{2 \cdot 3 \dots (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}} = \frac{(x+3)(x+4)}{N(N-1)} \text{ - вероятность в конце месяца}$$

По условию:  $P_2 = 11P_1$ . Тогда:

$$\frac{(x+3)(x+4)}{N(N-1)} = \frac{11 \cdot 12}{N(N-1)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{таким образом} \\ \text{может делиться на } N(N-1), \\ \text{т.к. } N \in \mathbb{N} \text{ и } N \geq 2 \text{ (т.к. минимум} \\ \text{распределение} \\ \text{в классе)} \end{array} \right.$$

$$(x+3)(x+4) = 11 \cdot 12$$

Два последовательных натуральных числа ( $x \in \mathbb{N}$ ) ~~132~~ представим в виде произведения двух натуральных последовательных чисел единственный обра́зом  $\Rightarrow \begin{cases} x+3=11 \\ x+4=12 \end{cases} \Rightarrow x=8 \Rightarrow$  в конце месяца выпадут  $x+4=8+4=12$  билетов

Ответ: 12.

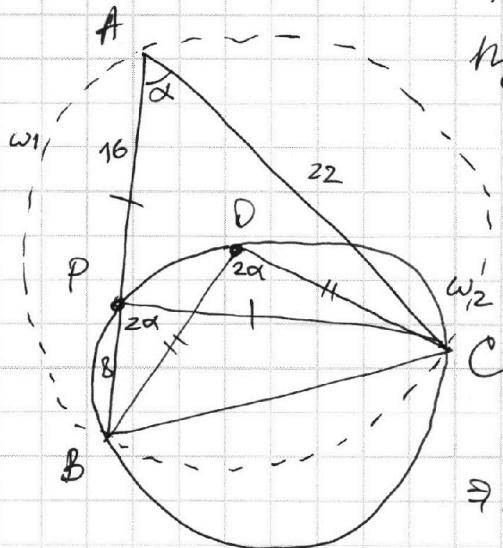


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N5.

пусть  $\angle BAC = \alpha$

Тогда  $\angle BOC$  - центральный для  $\angle BAC$  в окружности  $w_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$$

проведем  $PC$ ;  $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ , т.к. опираются на одну дугу в  $w_2$ .

$\angle BPC$  - внешний для  $\triangle APC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BDC = \angle PAC + \angle ACP \quad | \quad \Rightarrow \angle ACP = \alpha \Rightarrow \\ 2\alpha = \alpha + \angle ACP \quad | \quad \Rightarrow \angle ACP = \alpha \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle APC$  рт и  $AP = PC = 16$ .

в  $\triangle APC$  опустим высоту из  $P$ :

она же и высота, и медиана, и биссектриса  $\Rightarrow CH = AH = \frac{AC}{2} = 11$

Тогда из прямоугольного  $\triangle PAH$ :

$$\cos \alpha = \frac{AH}{AP} = \frac{11}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

по основному тригонометрическому

$\sin \alpha > 0$ , т.к. по условию  $\triangle ABC$  - остроугольный.

Тогда:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} =$

$$= 24 \cdot 11 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{6 \cdot 11 \cdot 3\sqrt{15}}{4} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 3\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

Ответ:  $S_{\triangle ABC} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \quad (1) \\ x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

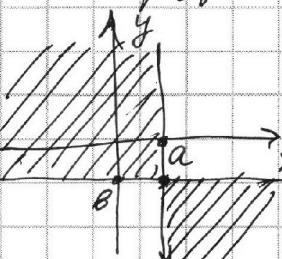
— круг с радиусом 6 и центром  $(0; 0)$

(1): Сделаем замену:  $\begin{cases} a = -4\sin\alpha \\ b = 4\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-a)(y-b) \leq 0 \end{cases} \rightarrow$  Этому неравенству соответствует область на графике:

$$a^2 + b^2 = 16$$

1  
y  
II  
I  
III  
IV



(независимо от знака  $a$  и  $b$ )

Точка их пересечения  $(a; b)$  будет в будущем точкой  $\Phi$  задавать общую точку двух секторов. Но если эта точка будет лежать на окружности  $x^2+y^2=16$  — окружность  $c=R=4$

Максимальное значение  $M$  будет достигаться при условии, что точка  $(a; b)$  лежит на пересечении окружности  $x^2+y^2=16$  и биссектрисы II и IV четвертей

при  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Построили на плоскости: это значение периметра:

$$(a; b) = (2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \quad P = 2 \cdot 4\sqrt{2} +$$

длина ограниченных окр.югами прямых

$$\text{Ответ: } M = 2 \cdot 4\sqrt{2} + \frac{\pi}{2} \sqrt{2(2\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2} + \text{бисектриса}$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sqrt{2(2\sqrt{2}+2\sqrt{2})^2} = M.$$

Задача: Сумма длин полукотоночек дуг у кругов  $\Phi$  носившими, т.к. в окр-ти  $c=R=4$  угол  $90^\circ$  всегда соответствует половине окр-ти, дуга дуга и линии всегда будет высекать равные дуги на больших окр-ти.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1

2

3

1

1

1

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2} \quad \text{чертёжик } \alpha \in [0; \pi]$$

предусловие:  $\beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$   $\sqrt{(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{6}-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}(\sqrt{6}-1)$

$\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$  минимальная разность при альфа и бета.

$\cos \alpha \neq \frac{x}{r} \Rightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{2} \sqrt{2(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2}$  равносильно  $x \neq \pm 2\sqrt{2}$

$\sin \beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y \neq 0$

$x^2 + y^2 = 4$

$x^2 = 4 - y^2$

$y = \pm \sqrt{2x}$

$2\sqrt{2}x = 4\sqrt{6}$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

$x^2 = 8$

$\frac{x}{r} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

$\frac{y}{r} \in [-1; 1] \Rightarrow y \in [-4; 4]$

№. пусть всего  $N$  одиннадцатиклассников и в конце число белородых увеличилось на  $x$ .

Всего способов:  $C_N^4$

Нет и есть:  $C_N^2$

$$P_1 = \frac{C_N^2}{C_N^4} = \frac{\frac{N(N-1)}{2}}{\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{N(N-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{N(N-1)}{24}$$

Всего сп.:  $C_N^{4+x}$

Нет и есть:  $C_N^{2+x}$

$$P_2 = \frac{C_N^{2+x}}{C_N^{4+x}} = \frac{\frac{N(N-1)\dots(N-x-1)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (x+1)/(x+2)}}{\frac{N(N-1)\dots(N-x-3)}{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (x+3)/(x+4)}} = \frac{N(N-1)\dots(N-x-1)}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (x+1)/(x+2)} \cdot \frac{(x+3)/(x+4)}{N(N-1)\dots(N-x-3)}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)!}{k!}$$

$$= \frac{(N-x-2)(N-x-1)}{(x+3)(x+4)} = \frac{132}{(N-2)(N-3)}$$

$$N-2-x+1 = N-x-1$$

$$N-4-x+1 = N-x-3$$

$$(2\sqrt{6}; 2\sqrt{2})$$

$$(2\sqrt{6}-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

$$(x+3)(x+4) \text{ нет ср. } N-2=S_1=S+1$$

$$\frac{11 \cdot 12}{(S_1-x)(S_2-x+1)} = \frac{11 \cdot 12}{(S_1)(S_1+1)} \cdot \frac{x(x+3)(x+4)}{x(S-x)(S+1-x)} = \frac{11 \cdot 12}{S(S+1)}$$

хорошо

$$\begin{array}{l} 1) 11 \cdot 3 \cdot 4 \\ 2) 12 \cdot 11 \cdot 1 \end{array}$$

$$11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$N1. A \cdot B \cdot C = N^2$$

$$A = 1111 \cdot a =$$

=  $101 \cdot 11 \cdot a$  - цифра

~~$\therefore 101$  ам~~

С не может быть:  $101 \Rightarrow B: 101 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(\alpha+\beta)}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$

$B$  - трехзначное  $\Rightarrow B = 101 \cdot b$ , где  $b \in [1; 9]$   
по условию должна быть семерка  $\Rightarrow$  (иначе будет не трехзнач.)

$$\Rightarrow B = 707$$

$$B = 101 \cdot 7 \quad A = 101 \cdot 11 \cdot a \quad C = 11 \quad N = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot b \cdot c$$

$$a = 7$$

$$A = 7777$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\begin{cases} xy > 0 \end{cases}$$

$$N2. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow \begin{cases} \text{равно при } y+x+3=0 \\ \text{или при } y+x+3 \neq 0 \end{cases} \quad (a) \quad (b)$$

$$a) y = -x - 3 \not\models \text{(X с условием)}$$

$$3 \cdot 16$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$b) xy + 4x - 4y - 16 = 0$$

$$\begin{aligned} 4x &= 4y + 16 & (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) &= \\ x &= y + 4 & y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 12y^2 &= 48y \end{aligned}$$

$$\boxed{64}$$

$$N3. \sin^2(\pi y) - \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) = \cos^2(\pi y) + \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y)$$

~~$\cos^2(\pi y) - \sin^2(\pi y) + \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) + \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) = 0$~~

$$\cos(2\pi y) + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

коинцидентность

$$\cos\left(\frac{\pi y + \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y - \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{2\pi y + \pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi y + \pi x}{2}$$

$$\frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \begin{cases} x+y = 1 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\frac{2\pi y - \pi x + \pi y}{2}$$

$$\frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \begin{cases} 3y - x = 1 + 2k\pi \end{cases}$$

$$4y = 2 + 2(h+k)$$

$$2y = 1 + (h+k)^2 \quad \boxed{y = \frac{z+1}{2}} \quad z \in \mathbb{Z}$$



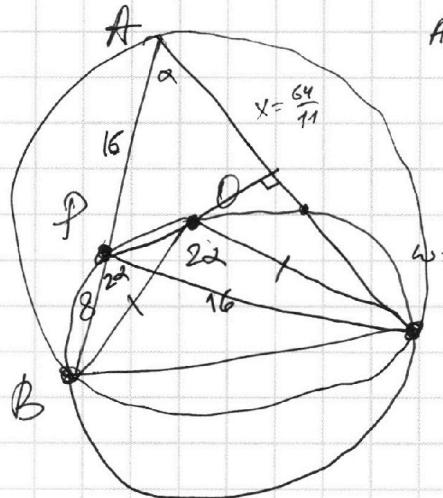
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.



$$AC = 22$$

$$16 \cdot 8 = x \cdot 22$$

$$8 \cdot 8 = x \cdot 11 \quad x = \frac{64}{11}$$

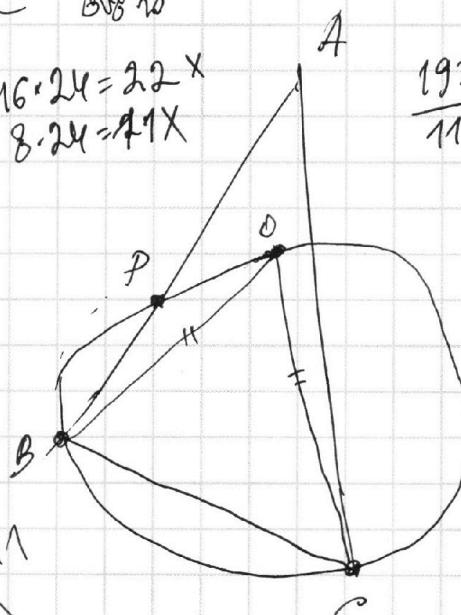
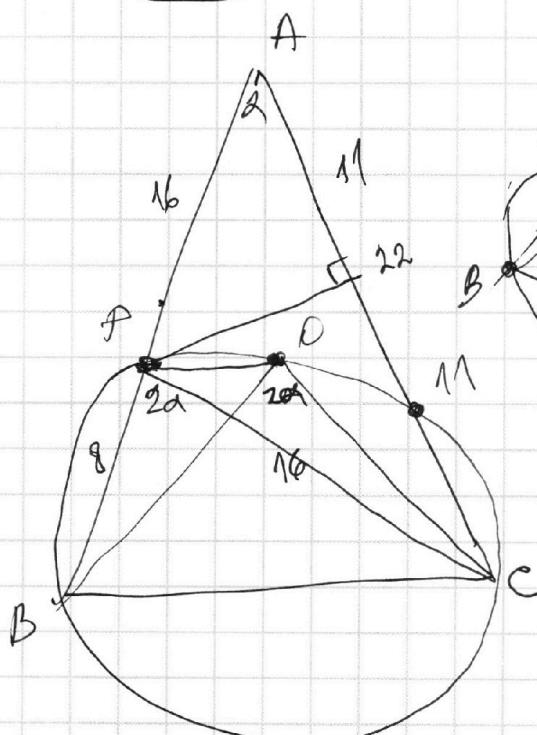
$$\begin{array}{r} 1410 \\ - 242 \\ \hline 64 \\ - 178 \end{array}$$

$$\frac{242 - 64}{11} = \frac{178}{11}$$

$$26 \cdot 8 = \\ \approx 160 + 32 =$$

$$\frac{192}{11} \quad \frac{242}{11}$$

$$16 \cdot 24 = 22 \cdot x \\ 8 \cdot 24 = 11 \cdot x$$



$$\cos \alpha = \frac{11}{16}$$

$$\begin{array}{r} 13515 \\ - 1027 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\frac{6 \cdot 11 \cdot 3\sqrt{15}}{4}$$

$$3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$3\sqrt{15}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ \hline 116 \\ \hline 256 \\ \hline 160 + 96 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

№. всего учеников  $N$ , добавляем балла  $x$ .

$$P_1 = \frac{\binom{N}{x}}{\binom{N}{4}} = \frac{(N-2)(N-3)}{\binom{N-2}{2}} \Leftrightarrow \frac{12}{N(N-1)}$$

$$\frac{4!}{x+4} \cdot \frac{N!}{N-x}$$

$$N-2-x-2+1=$$

$$= N-x-3$$

$$P_2 = \frac{\binom{N}{x+4}}{\binom{N}{x+2}} = \frac{(N-2)(N-3)(N-x-3)}{\binom{N-3}{2} \cdot \dots \cdot (x+1)(x+2)} \Leftrightarrow N-x-4+1=N-x-3$$

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$b^2 = 16 - a^2$$

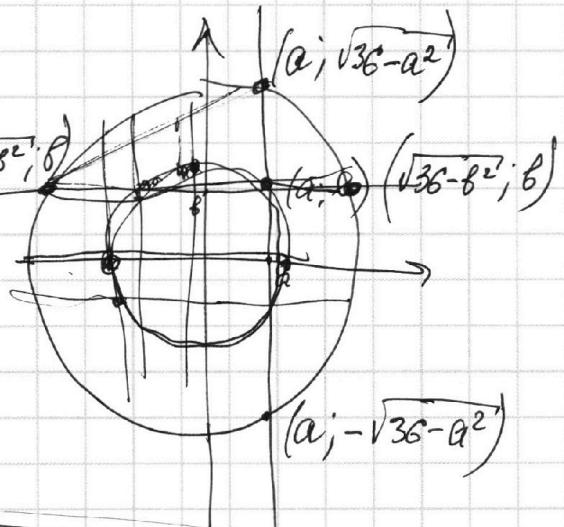
$$= \frac{(N-2)(N-3) \dots (N-x-3)}{(x+3)(x+4)} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{N(N-1)} = 11 \cdot 12$$

$$11 \cdot 3 \cdot 4$$

$$11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

$$2\sqrt{20+a^2}$$

$$2\sqrt{36-a^2}$$



длина коробки:

$$\sqrt{(a+\sqrt{36-a^2})^2 + (\sqrt{36-a^2}-b)^2}$$

- губка.

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{l}{d} \Rightarrow \alpha = \frac{l}{d} + \frac{\pi}{2\pi} \cdot 2\pi R$$

$$\alpha R$$

$$L = \frac{e}{\alpha} \pi R$$

$$\frac{\sqrt{(36-a^2)-a^2} + (b+\sqrt{36-a^2})^2}{12} \pi \cdot B$$

~~24π/12~~

• πB

длина ручки

$$(a; \sqrt{16-a^2})$$

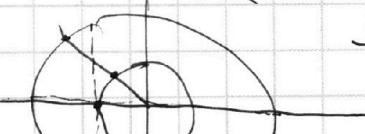
$$x \sqrt{16-x^2}$$

$$16-a^2 \geq 0$$

$$a^2 \leq 16 \Rightarrow$$

$$a \in [-4; 4]$$

$$\begin{array}{c} x \\ \frac{x^2}{2} \\ \frac{y^2}{2} \\ y^2 = 16 - x^2 \\ y^2 + x^2 = 16 \end{array}$$



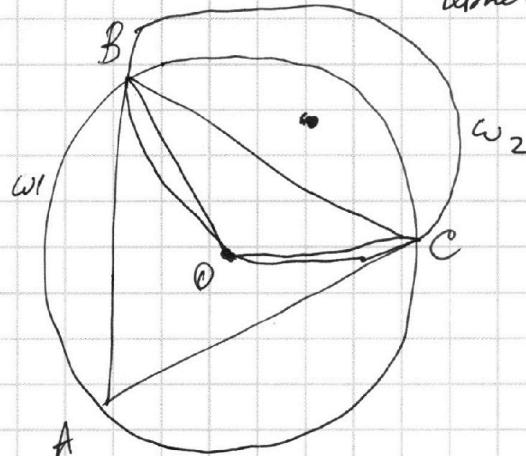
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

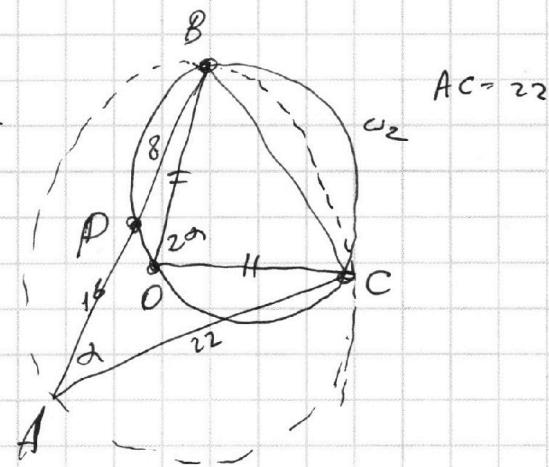
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

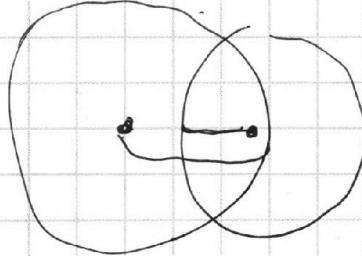
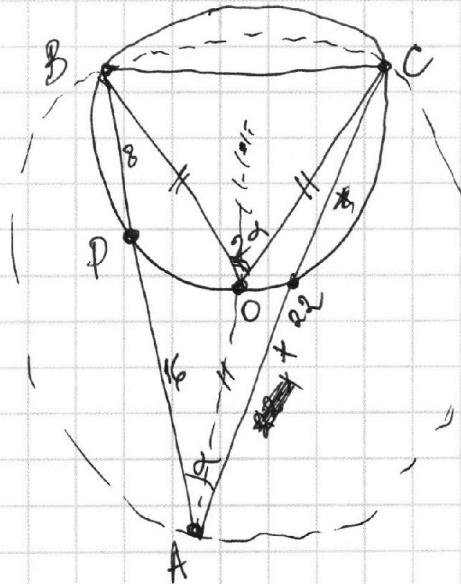
н5.



Чертёжник.



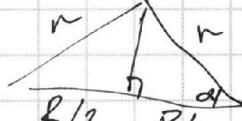
$$AC = 22$$



$$\frac{BC}{\sin \alpha} = r$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = R$$

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2 \cos \alpha}$$



$$\cos \alpha = \frac{R/2}{R}$$

$$2 \cos \alpha = \frac{R}{r}$$

$$R < 2r$$

$$60^\circ$$

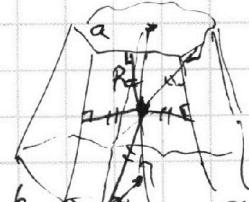
$$(22-x)x=$$

$$16 \cdot 24 = 22x$$

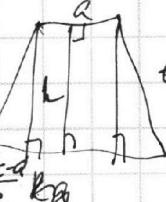
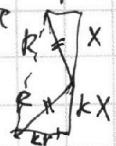
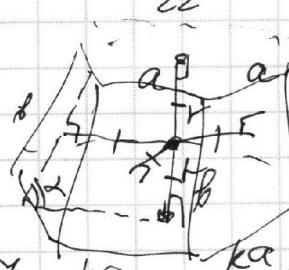
$$8 \cdot 16 \cdot 12 = 11x \Rightarrow x = \frac{16 \cdot 12}{11}$$

$$\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{22} = \frac{16 \cdot 12}{11 \cdot 22} = \frac{16 \cdot 6}{121} = \frac{96}{121}$$



Черв. окр.  
делит высоту  
в отношении  $\frac{1}{k}$



$$h = \sqrt{R^2 + \frac{\alpha^2}{4}(k-1)^2}$$

$$n = \frac{h}{\alpha}$$



I-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

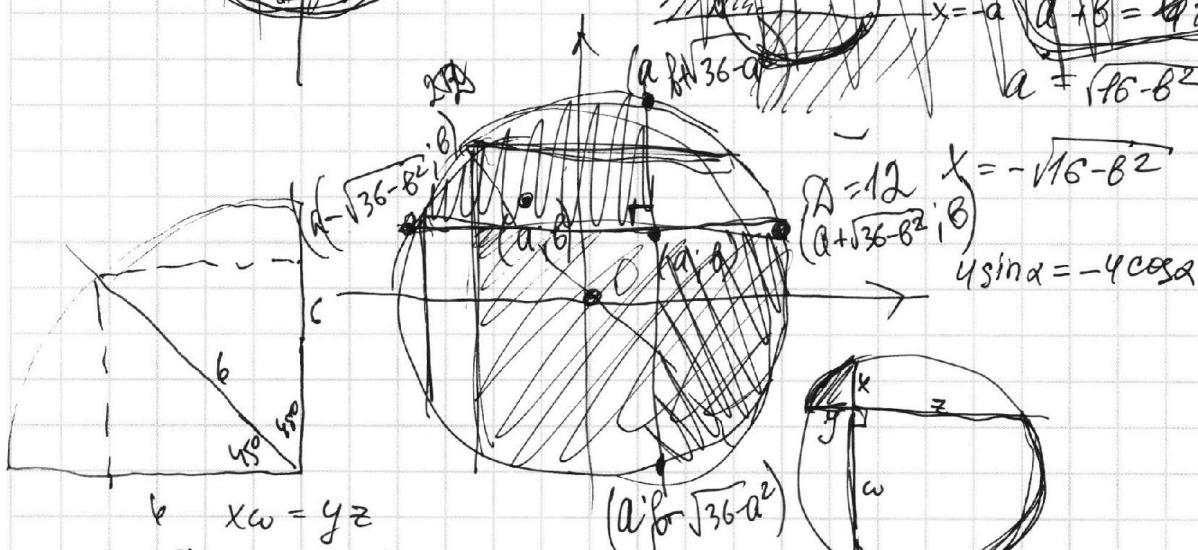
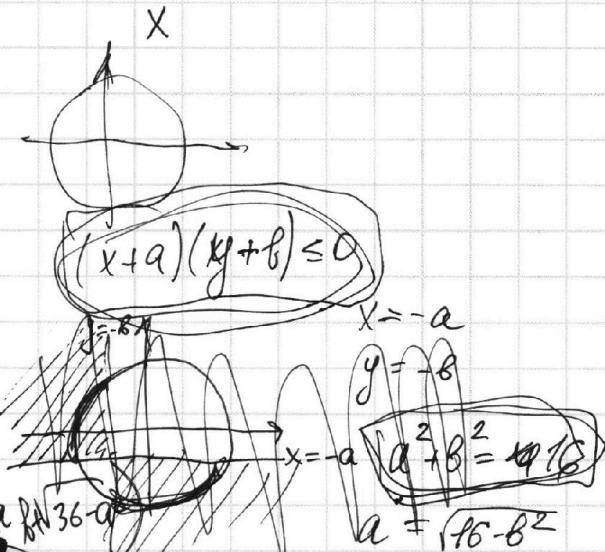
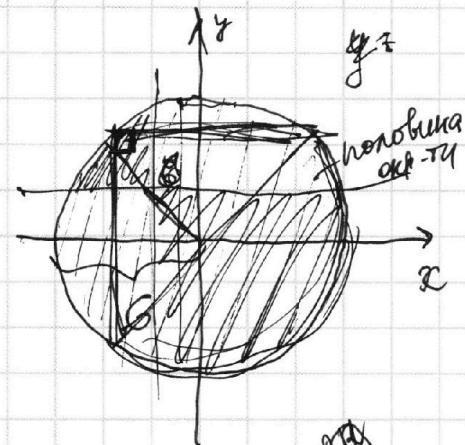
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№.

чертёжик

$$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0$$



$$S = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}zw$$

$$\max(xy + zw) \text{ при } kw = yz$$

$$\frac{zy^2}{w} + zw$$

$$\sqrt{16-16} \cdot 4\sqrt{1-\sin^2 \alpha}$$

$$(x-a)(y-b) \leq 0$$

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$a^2 \quad y = \pm \sqrt{36-a^2}$$

