



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася высчитали, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$A : 1111$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

т.к. A — четырехзн.
степень деления 11 и 101 в A 1.

$\Rightarrow C < 100 \Rightarrow B : 101$ B — трехзн. $\Rightarrow$
степень дел. 101 в B 1 и $B \div 11$

B содержит цифру 6 $\Rightarrow B = 606$

$$\Rightarrow C : 11 \quad C < 100 \Rightarrow C \div 121$$

C — содержит 3 $\Rightarrow C = 33$

$$ABC = n^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111$$

$$n^2 = a \cdot (1111)^2 \cdot 3^2 \cdot 2$$

$$2 \cdot a - \text{квадрат} \Rightarrow a = 2k^2; k \in \mathbb{N}$$

$$0 < a < 10$$

$$a = 2$$

$$a = 8$$

$$\Rightarrow (A; B; C) = (2222; 606; 33) \\ (8888; 606; 33)$$

Ответ: $(A; B; C) = (2222; 606; 33), (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{aligned} K &= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y} = \frac{5}{xy} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} K &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \cancel{2y(y+2) - 2x(x-2) = 2x - 2y - 4}$$

$$2y^2 + 4y - 2x^2 + 4x = 2x - 2y - 4$$

$$2y^2 - 2x^2 + 6y + 2x = -4$$

$$\frac{2}{x(x-2)} - \frac{2}{y(y+2)} = \frac{5}{xy} - \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$2y(y+2) - 2x(x-2) = 10x - 10y - 20$$

$$2y^2 - 2x^2 + 4y + 4x = 10x - 10y - 20$$

$$w_1 = x - y$$

$$w_2 = x + y$$

$$2w_1w_2 + 4w_2 = 10w_1 - 20$$

$$w_2 = \frac{5w_1 - 10}{2 + w_1}$$

$$M = w_1 \cdot \left(w_2^2 - \frac{w_2^2 - w_1^2}{4} \right) - \frac{3}{2} (w_2^2 - w_1^2)$$

$$M = \frac{w_1^3}{4} + \frac{3w_1^2w_2}{4} - \frac{3}{2}w_2^2 + \frac{3w_1^2}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = \frac{w_1^3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{25w_1^2 + 100 - 100w_1}{4 + w_1^2 + 4w_1} w_1 - \frac{3}{2} \frac{25w_1^2 + 100}{4 + w_1^2 + 4w_1}$$

$M =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$(\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi y) + \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi x + \sin \pi y = 0$$

$$-\cos(2\pi x) + \cos(\pi(x-y)) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{-\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{-\pi x - \pi y}{2} = -\pi k \quad \text{где } (x, y) = t$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x + \pi y = 2\pi k$$

$$(x, y) = (2k - y, y)$$

$$\pi x = \frac{2\pi k + \pi y}{3}$$

$$(x, y) = \left(\frac{2k + y}{3}, y\right)$$

$$\text{Ответ: } (x, y) = (2k - y, y), (x, y) = \left(\frac{2k + y}{3}, y\right)$$

$$\text{где } y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

n - одиннадцатиклассники.

k - как искомое число.

кач-в способ
распр. остав-
шиеся 2 билета

Вероятность попасть в начале месяца P_1 :

$$P_1 = \frac{1 \cdot 1 \cdot C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

↑
кач-во
способов
распределить 4 билета

Вероятность попасть в конце месяца P_2
покажем аналогично

$$P_2 = \frac{1 \cdot 1 \cdot C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-k+1)}{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)} = \frac{k \cdot (k-1)}{(n-1)n} = 6 P_1$$

↑
 $k-2$ раз
↑
 $k-2$ раз

$$\frac{k \cdot (k-1)}{n(n-1)} = \frac{6 \cdot 12}{n(n-1)}$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$(k-9)(k+8) = 0$$

$$k = 9$$

было 8 билетов.

Ответ: в конце месяца 8 учеников

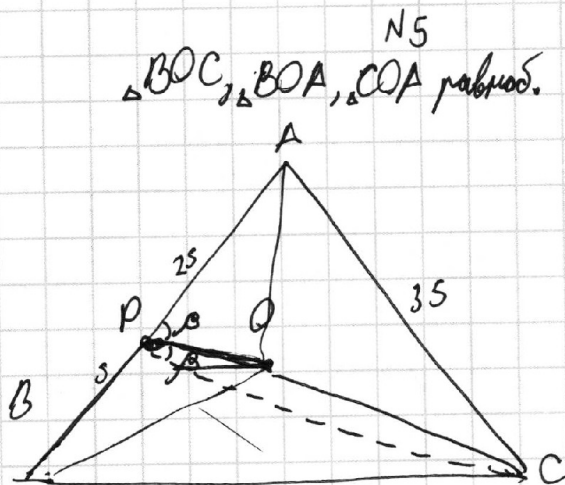


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle BOC$ - впис. 4-угольник

$$OA = OC = OB = r$$

$$\angle BPO = 120^\circ - \angle OCB = 120^\circ - \beta$$

$$\angle OPC = \angle OBC = \angle OCB = \beta$$

$$\Rightarrow \triangle BPC \quad \angle APQ = 120^\circ - \angle BPO =$$

$$= \beta \Rightarrow$$

$$\angle PAQ = \angle PBO = \angle PCO \Rightarrow \triangle PAQ = \triangle PCO$$

$$\Rightarrow PC = 25$$

т. Косинусов $\triangle CPA$

$$35^2 = 2 \cdot 25^2 - 2 \cdot 25^2 \cdot \cos(2\beta)$$

$$2 \cdot 25^2 \cos(2\beta) = 25$$

$$\cos(2\beta) = \frac{1}{250}$$

т. Кос $\triangle BPC$ и $\triangle BOC$

$$\angle BPC = \angle BOC = 120^\circ - 2\beta$$

$$BC^2 = 25^2 + 5^2 - \frac{2 \cdot 25 \cdot 5}{50} = 2r^2 + \frac{2r^2}{50}$$

$$655 = \frac{51}{25} r^2$$

$$\text{т. Кос } \triangle BOC \quad BC^2 = 1655 = 15 \cdot 111$$

$$r = \frac{25 \cdot 111}{\sqrt{111}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м. синусов $\triangle ABC$ ^{NS проходим}

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{150}{\frac{\sqrt{51}}{10}} = \frac{15\sqrt{31}}{\sin A}$$

$$\sin A = \frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{10}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin A = \frac{25 \cdot 35}{2} \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} =$$
$$= \frac{175\sqrt{51}}{4}$$

$$\text{Ответ: } \frac{175\sqrt{51}}{4}$$

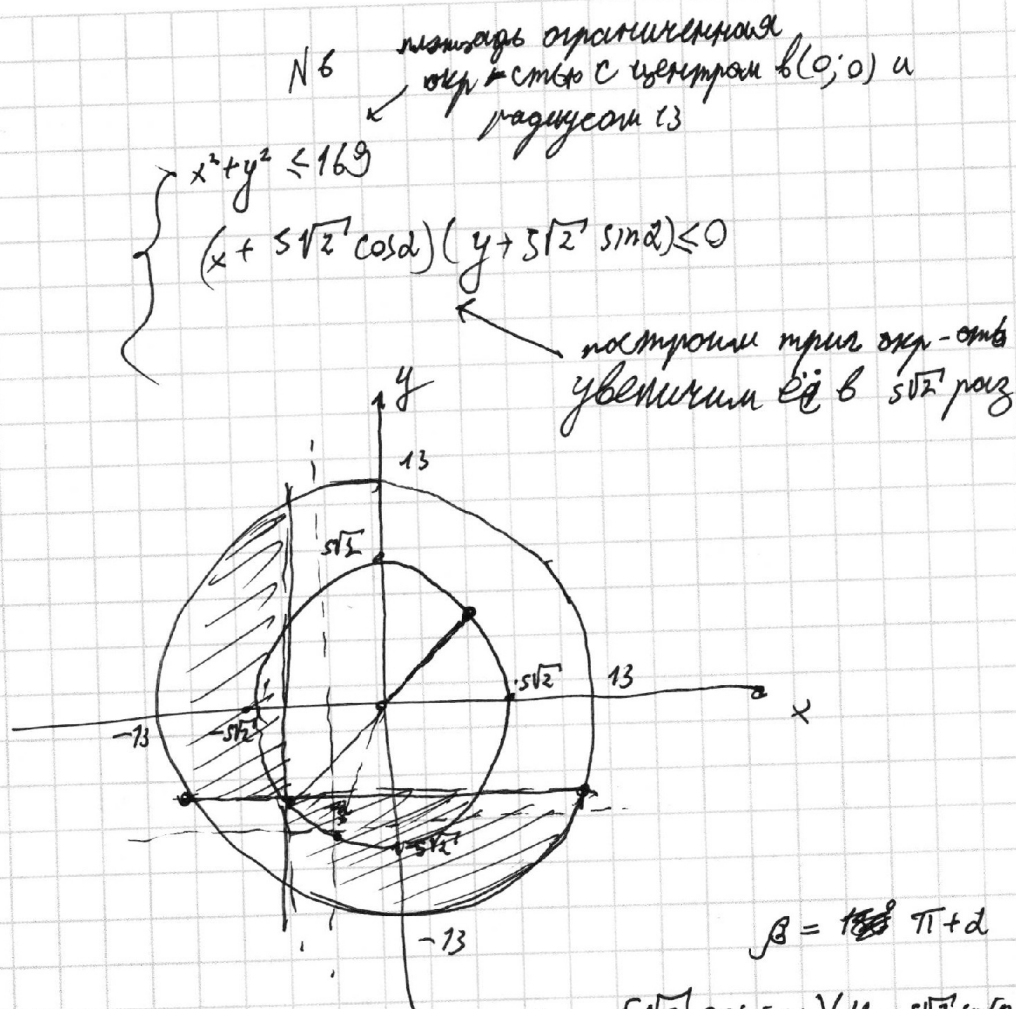


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~у~~

Заметим что *длины*
дуг фигуры *и всегда*
одинаковы т.к.
прямые
соотв

$$x = 5\sqrt{2} \cos(\beta)$$

$$y = 5\sqrt{2} \sin(\beta)$$

перпендикулярны найдем длины *прямых*
участков

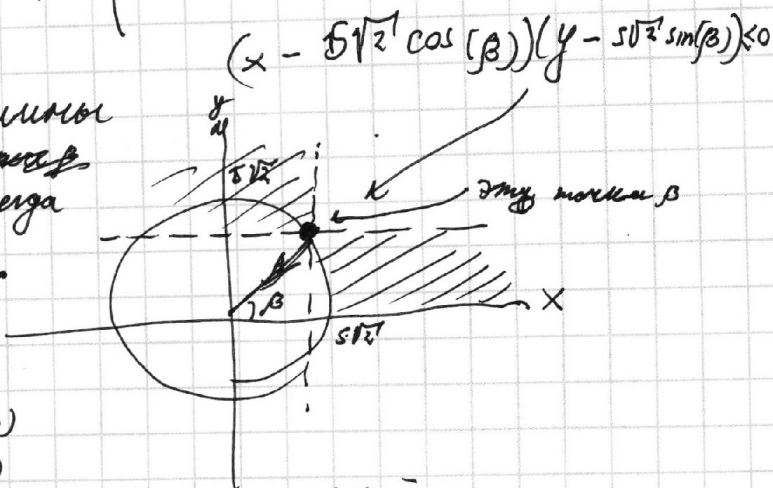
$$(5\sqrt{2} \cos \beta)^2 + y^2 = 169$$

$$(5\sqrt{2} \sin \beta)^2 + x^2 = 169$$

$$x = \sqrt{169 - (5\sqrt{2} \cos \beta)^2}$$

$$y = \sqrt{169 - (5\sqrt{2} \sin \beta)^2}$$

в силу *симм.* максимум в $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что при указ. β .

M - макс

$$l = l_1 + l_2$$

$$l_1 = \sqrt{169 - 50 \cos^2 \beta}$$

$$d = 50 \cos^2 \alpha$$

$$l_2 = \sqrt{119 + 50 \cos^2 \beta}$$

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 = 169 + 119 + 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \beta + 119 + 50 \cos^2 \beta}$$

$$\max - d^4 + 50d^2 + 119 \cdot 169$$

$$b \quad d^* = \frac{-50}{-2 \cdot 1} = 25$$

$$50 \cos^2 \beta = 25$$

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\alpha = \beta - \pi$$

$$M = l + \frac{2\pi R}{u} = 2 \cdot 12 + \frac{13\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } M = 24 + \frac{13\pi}{2}, d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$l = l_1 + l_2 = 24$$~~

$$\beta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$
~~$$2 = 13\pi$$~~

$$\beta = 13\pi$$

~~$$l_1 = \sqrt{169 - 50 \cos^2 \beta}$$~~

~~$$l_2 = \sqrt{119 + 50 \cos^2 \beta}$$~~

~~$$(l_1 + l_2) \frac{d}{d\beta} = 0$$~~

~~$$\sqrt{119 + 50 \cos^2 \beta} \left(\frac{1}{2} + 10 \sin \beta \cos \beta \right) + \sqrt{169 - 50 \cos^2 \beta} \left(\frac{1}{2} - 10 \sin \beta \cos \beta \right) = 0$$~~

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{119 + 25} + \sqrt{169 - 25} = 24$$

$$M = l + \frac{2\pi R}{4} = 24 + \frac{13 \cdot \pi}{2}$$

~~Ответ~~
$$M = 24 + \frac{13\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Докажем, что при указанном β M мин.

$$l = l_1 + l_2$$

$$l^2 = 169 + 119 + 2\sqrt{\dots}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M_{(x+2; y+2)} \rightarrow (x+2)^3 - (y+2)^3 - 6(x+2)(y+2)$$
$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \quad y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$
$$6xy - 12y + 12x - 24$$

$$\boxed{x^3 - y^3} - 6x^2 - 6y^2 + 12x - 12y - 16 - \boxed{6xy} + 12y + 12x - 24$$

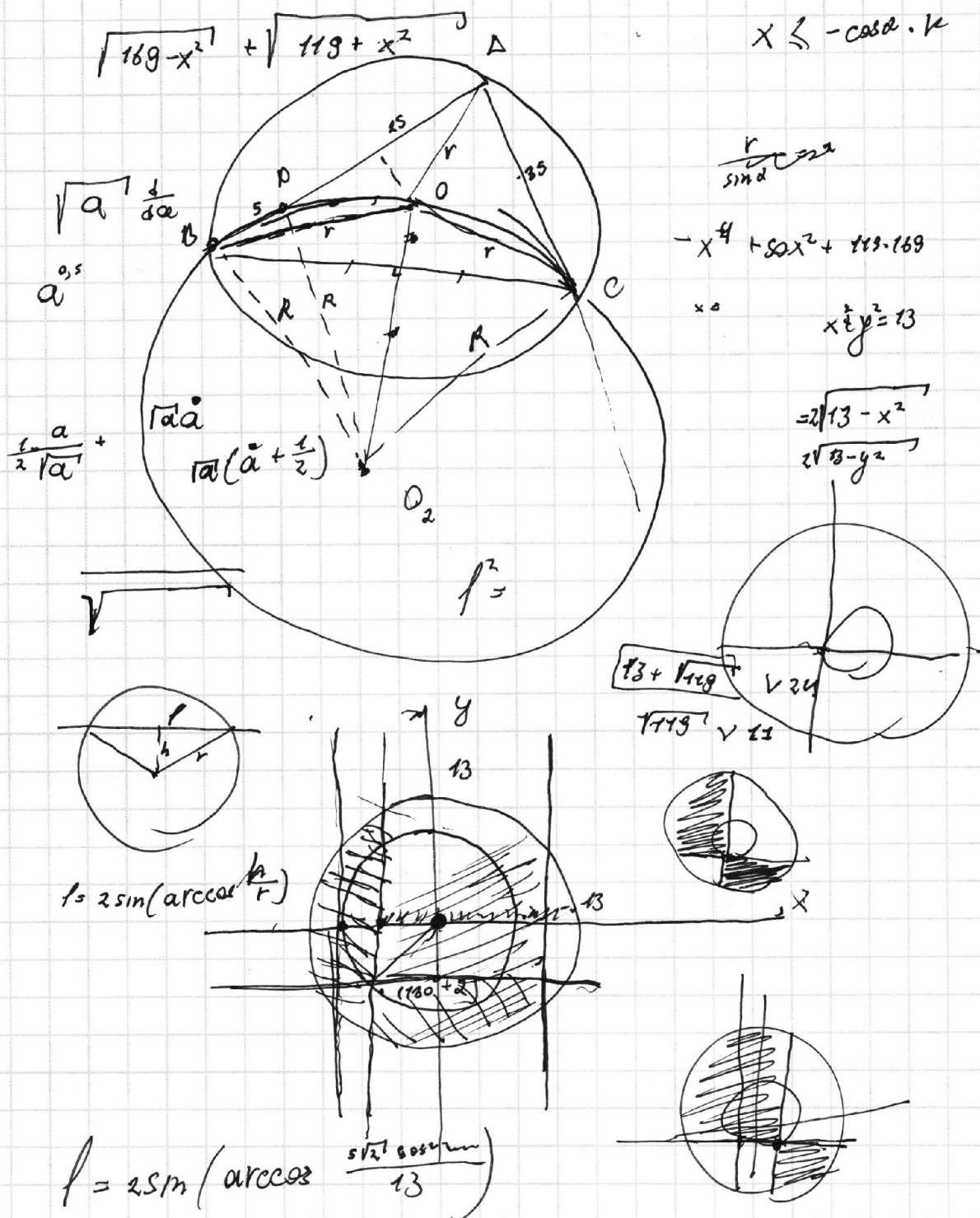


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution for a geometry problem involving a circle and a triangle. The diagram shows a circle with center O and radius r. A triangle ABC is inscribed in the circle. The side lengths are given as AB = 25, AC = 35, and BC = 5. The angle at vertex A is 120 degrees. The angle at vertex B is 35 degrees. The angle at vertex C is 25 degrees. The radius r is the distance from the center O to the vertices A, B, and C. The distance from the center O to the side BC is denoted as h. The distance from the center O to the side AB is denoted as d. The distance from the center O to the side AC is denoted as e. The distance from the center O to the side BC is denoted as h. The distance from the center O to the side AB is denoted as d. The distance from the center O to the side AC is denoted as e.

Equations and calculations:

$$4r^4 - 4225r^2 + 145750 = 0$$

$$2r \cos 2\alpha = 30$$

$$2r \cos \beta = 35$$

$$180 - 2\alpha - 2\beta = 180 - 2\alpha - 2\beta$$

$$2r \sin(\alpha + \beta) = ?$$

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$h = \sqrt{r^2 - 15^2}$$

$$BC^2 = 2r^2 + \frac{2r^2}{50}$$

$$\cos \beta = \frac{10}{\sqrt{r^2 - 15^2 + 10^2}} = \frac{BC}{2r}$$

$$\frac{35}{2r} = -\sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\frac{35}{2r} = \frac{15}{r} \cdot \frac{10}{\sqrt{r^2 - 125}} - \frac{\sqrt{r^2 - 15^2}}{r} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - 15^2}}{\sqrt{r^2 - 125}}$$

$$\frac{35}{2} = \frac{150 - r^2 + 225}{\sqrt{r^2 - 125}}$$

$$\frac{35}{2} = \frac{375 - r^2}{\sqrt{r^2 - 125}}$$

$$\frac{35}{2} \cdot \sqrt{r^2 - 125} = 375 - r^2$$

$$1225r^2 - 5r^2 = 140625 + r^4 - \frac{35^2}{4}r^2 - 2000r^2$$