



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A делится на число $1111 = 101 \cdot 11$ (т.к. все цифры одинаковые)

значит $(ABC) : 101$, а т.к. 101 простое и $ABC \Rightarrow (ABC) : 101^2$
 $(ABC) : 11$ так как $(ABC) : 11^2$

замечим, что A не может делиться на $(101)^2$ т.к. $101^2 = 10201$

$A < 10000 < 101^2$; C тоже не делится на 101 т.к. $101 > 100 > C$

значит $B : 101 \Rightarrow$ т.к. B имеет 7 6 знаков $\rightarrow B = 707$

пусть A состоит только из цифр a , тогда $A = 101 \cdot 11 \cdot a$

значит $A \nmid 11^2$ ($a < 11$) $\Rightarrow C : 11$ (т.к. B тоже $\nmid 11$)

т.к. $C \nmid 11$ и имеет 1 6 знаков $\Rightarrow C = 11$

в таком случае число $ABC = a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7$

оно является кубом только в том случае, если $a = 7$

$(7777; 707; 11)$ — ответ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} \text{ по условию} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\text{значит: } x-4 \neq 0; y+4 \neq 0$$

умножим левую часть на xy , а правую на $(x-4)(y+4)$

$$y + x + 3 \quad ? \quad (y+4)(x-4) + 3 = y + x + 3$$

$$\text{т.к. выражения равны} \Rightarrow xy = (x-4)(y+4) = xy - 4y + 4x - 16$$

$$x - y = 4 \Rightarrow x = y + 4$$

$$\text{найдем } M = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$

$$M = 64 \quad - \text{ ответ}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3a) \sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$(\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y) + (\cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi x \sin \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi y - \pi x) = 0$$

$$\begin{cases} 2\pi y = \pi y - \pi x + \pi + 2\pi k \\ 2\pi y = \pi x - \pi y + \pi + 2\pi n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 + 2k \\ 3y = x + 1 + 2n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 + 2k \\ y = \frac{x + 1 + 2n}{3} \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$3b) \arccos \frac{x}{7} \in [0; \pi]$$

$$\arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{это значит, что } \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{минимум достигается при } \arccos \frac{x}{7} = 0 \Rightarrow \frac{x}{7} = 1 \Rightarrow x = 7$$

$$\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 4$$

$$\text{пара } (x, y) \text{ подходит, т.к. } x = 7 + 1 + 2 \cdot 5$$

$$\frac{x}{7} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-7; 7]$$

$$\frac{y}{4} \in [-1; 1] \Rightarrow y \in [-4; 4]$$

найдем все пары, которые подходят под условия уравнения из пункта а):



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

35)

допустим, что x - нечётное, тогда

$$-x+1+2k - \text{чётное} \quad \text{и} \quad x+1+2n - \text{чётное} \\ (\text{т.к. } y \text{ целое, то и } \frac{x+1+2n}{3} - \text{чётное})$$

значит при неч. $x \rightarrow$ чёт. y

при чётных x :

$$-x+1+2k - \text{нечётное} \quad \text{и} \quad x+1+2n - \text{нечётное} \\ (\text{тогда при целых } y \quad \frac{x+1+2n}{3} - \text{нечётное})$$

при чётных $x \rightarrow$ нечётные y

~~рассмотрим возможные по отдельности:~~

для каждого нечёт x существует 5 возможных $y \in [-4; 4]$

для каждого чёт x - 4 варианта $y \in [-4; 4]$

нечёт $x \in [-7; 7]$ - 8 штук $\Rightarrow 8 \cdot 5 = 40$ вариантов пар

чёт $x \in [-7; 7]$ - 7 штук $\Rightarrow 7 \cdot 4 = 28$ вариантов пар

ровно одна из этих пар не подходит в неравенство $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего возможных пар 67



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) пусть всего ребят было x , а дополнительных билетов k

тогда вероятность покупки была равна: $\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$

после информации о новых билетах: $\frac{4+k}{x} \cdot \frac{3+k}{x-1}$

(при условии, что x хотя бы $4+k$)

так как билетов не могло стать больше людей значит это всегда выполняется:

$$11 \left(\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \right) = \frac{4+k}{x} \cdot \frac{3+k}{x-1}$$

умножим на $x(x-1)$:

$$11 \cdot 4 \cdot 3 = (4+k)(3+k)$$

$(4+k)(3+k)$ - два ~~уникальных~~ натуральных последовательных числа

единственным образом представим:

$$\begin{cases} 3+k = 11 \\ 4+k = 12 \end{cases} \Rightarrow k = 8$$

всего билетов: 12 - ответ



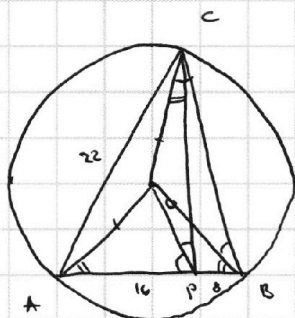
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5)



$$AB = 24$$

проедем CP, OC, OA, OB, OP

$\angle OCB = \angle OBC$ (т.к. O - центр описанной)

$$OA = OB = OC$$

$\angle OBC = \angle OPC$ (т.к. смотрят на одну хорду)

$\angle OCB = \angle OPA$ (по сб-бг опис. четырех-ника)

$\angle OCP = \angle OBP$ (оуга хорда)

$\angle OBA = \angle OAB$ (т.к. O - центр описанной)

из всех равенств следует, что $\angle OAP = \angle OCP \Rightarrow \angle AOP = \angle COP$
 $\angle APO = \angle CPO$

значит $\triangle AOP = \triangle COP \Rightarrow CP = AP = 16$

запишем $\cos$ для $\triangle APC$:

$$CP^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos \angle CAB$$

$$16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \angle CAB \Rightarrow \cos \angle CAB = \frac{11}{16}$$

~~т.к.~~ $\cos$ для $\triangle ABC$:

$$CB^2 = 24^2 + 22^2 - 2 \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{11}{16} =$$

$$\text{найдем } \sin \angle CAB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAB} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sin \angle CAB \cdot AC \cdot AB}{2} = \frac{\sqrt{135} \cdot 22 \cdot 24}{32} = \frac{\sqrt{135} \cdot 11 \cdot 3}{2} = \frac{33}{2} \sqrt{135}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

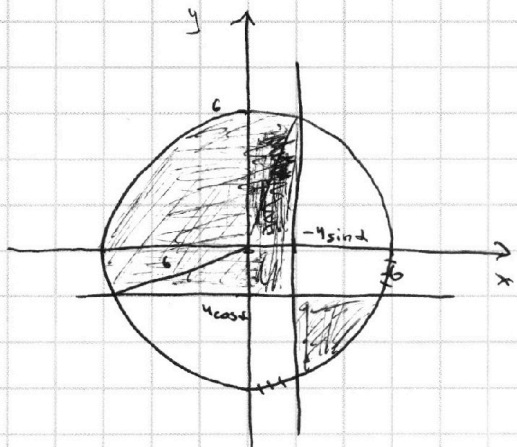
6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) нарисуй эту фигуру:



Заметим, что периметр принадлежащий окружности равен половине ее длины

это можно будет если перенести части друг на друга

он равен половине длины окружности:
 $\pi \cdot 6$

необходимо ^{сдвинуть} максимизировать длину хорды:

$$2 \cdot \left(\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} \right) + 2 \left(\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} \right) = \max$$

максимум достигается только при $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$ т.к. фигура симметрична относительно них

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

тогда ответ: $6\pi + 4\sqrt{36 - 8} = 6\pi + 4\sqrt{28}$

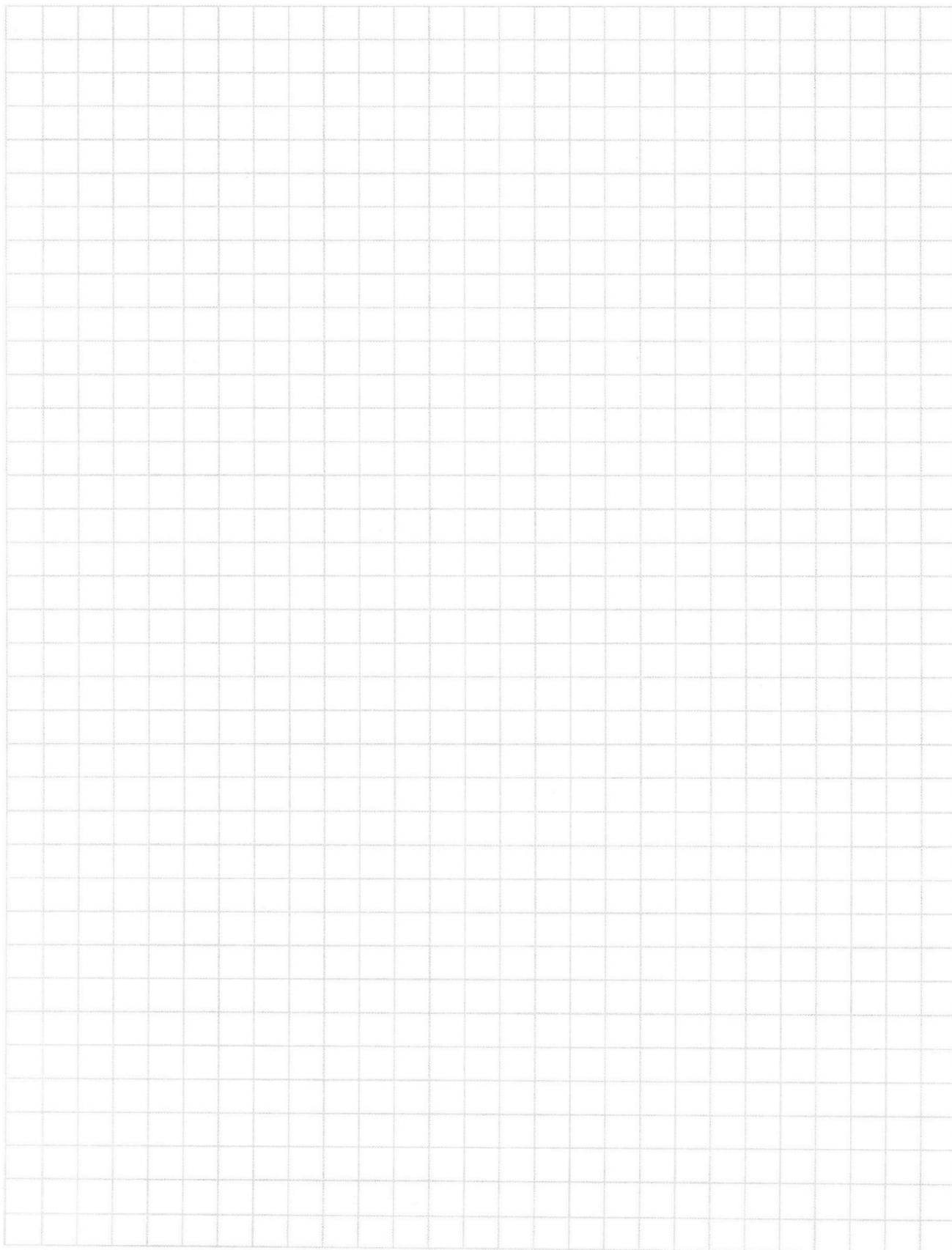


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



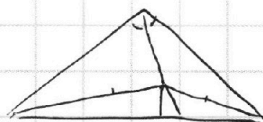
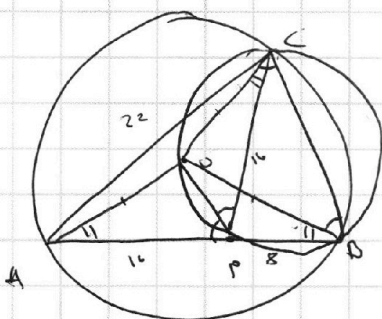


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



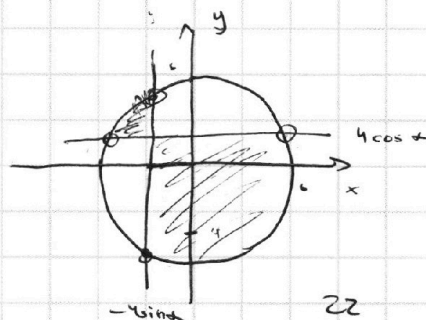
$$\begin{array}{r} 11 \quad \sqrt{256-121} \\ 16 \quad \quad 16 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$16^2 = 11^2 + 22^2 - 2 \cdot 11 \cdot 22 \cdot \cos \alpha$$

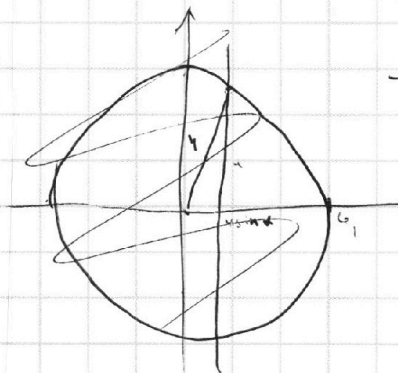
$$\cos \alpha = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$$

$$2 \cdot 16 \cdot 22$$

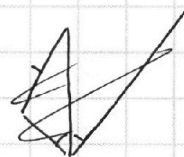
$$1 = 4 + 3 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ 33 \\ \hline 66 \\ 66 \\ \hline 726 \\ 44 \\ \hline 16 \cdot 8 = 24 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$
$$24^2 + 22^2 - 3 \cdot 22 \cdot 11$$



$$726 \quad \text{—}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 36 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 22 \\ \hline 66 \\ 66 \\ \hline 726 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 726 \\ - 576 \\ \hline 150 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ 6 \\ 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$9 \cdot 16 = 18$$

$$24^2 + 22^2 - 2 \cdot \frac{11}{16} \cdot 22 \cdot 24$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11 \\ \hline 33 \\ 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 576 \\ 484 \\ \hline 1060 \\ 726 \\ \hline 334 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



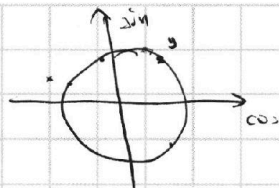
СТРАНИЦА

~~1~~ ИЗ ~~2~~

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$$



$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$6 \cdot 5/2 = 15$$

$$A: 1111$$

$$101 \cdot 11$$

$$B = 707$$

$$C = 11$$



$$\pi/2 \quad \pi/3$$

.....

$$\cos x + \cos x = 2 \cdot \cos x \cdot \cos 0$$

$$\cos x - \cos x = 2 \cdot \sin x \cdot \sin 0$$

$$\sin x + \sin x = 2 \sin x \cdot \cos 0$$

$$\sin x - \sin x = 2 \sin 0 \cdot \cos x$$

$$\sin x + \sin(-x) = 2 \sin \left(\frac{x-x}{2} \right) \cos$$

$$y = x$$



$$0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$1/5 \quad 2/4$$

$$\left(\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \right) 11 = \frac{4+k}{x} \cdot \frac{3+k}{x-1}$$

$$2 \cos \left(\pi \frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\pi \frac{x-y}{2} \right)$$

$$44 \cdot 3 = (4+k)(3+k)$$

$$132$$

$$11 \cdot 12$$

$$k = 8$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{xy+4x-4y-16}$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{3}{y} + 1 \right)$$

$$x-y=0$$

$$x-y=4$$

$$x=y+4$$

$$y^2 - 12y^2 + 48y + 64$$

$$1357$$

$$246$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$n = (y+4)^3 - y^3 - 12(y+4)y = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64$$

$$\cos(x-y)$$

$$\sin^2 y = \sin x \sin y + \cos x \cos y + \cos^2 y$$

$$\cos^2 y - \sin^2 y = \cos 2y$$

$$2 \cos^2 y - 1 = \cos 2y$$

$$\cos(x-y) + \cos 2y = 0$$

$$x-y =$$