



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. Заметим, что число A представимо в виде

$111 \cdot x$ для некоторого натурального x , $1 \leq x \leq 9$. То есть $A = 111 \cdot x = 101 \cdot 11 \cdot x$. Заметим, что 101 - простое число, значит, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом натурального числа, необходимо, чтобы 101 встретилось в разложении на простые множители B и C . С другой стороны, в ~~нем~~ его разложении 101 встретиться не может $\Rightarrow$ может встретиться только в разложении числа B . $\Rightarrow B: 101 \Rightarrow B$ может быть одним из чисел (трёхзначные, делятся на 101): $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$. Из них подходит под условие "хотела бы одна из цифр равна 1" только $101 \Rightarrow B = 101$. В разложении на простые множители числа A такие встречается 1 раз. Так как $B: 11$, C должно делиться на 11 , чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом. То есть C - это одно из чисел: $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$ (двузначные, делятся на 11). Из них подходит под условие "хотела бы одна из цифр равна 5" только $55 \Rightarrow C = 55$. Тогда $B = 101$; $C = 55 = 5 \cdot 11$; $A = 11 \cdot 101 \cdot x$. Значит чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом, необходимо, чтобы простое число 5 в произведении $A \cdot B \cdot C$ было в четной степени $\Rightarrow x: 5 \Rightarrow x = 5$ (т.к. $1 \leq x \leq 9$). То есть $A = 5555$; $B = 101$; $C = 55$. Все три числа одинаково встречаются. Других x не существует.

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2. ~~Задача~~. По условию:

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$(1) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$(2) M = x^3 - y^3 - 9xy$$

Рассмотрим (1): $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

Числители равны $\Rightarrow$ знаменатели тоже равны:

$$xy = (x-3)(y+3) \Leftrightarrow xy = xy + 3x - 3y - 9 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 + y (*)$$

Рассмотрим (2) с учетом (*):

$$M = (3+y)^3 - y^3 - 9(3+y) \cdot y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M = 27 + \cancel{27y} + \cancel{9y^2} + y^3 - y^3 - \cancel{9y^2} - 27y \Leftrightarrow M = 27. \text{ } M \text{ определено независимо от допустимых значений } x \text{ и } y.$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3. а) из условия: x, y - действительные;

$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$. Решим это уравнение:

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos 2\pi x; \\ \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y = \cos(\pi x - \pi y) \end{array} \right.$$

С учетом того, что $\boxed{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$ Преобразуем:

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi x + \pi y = \pi + 2\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = 2t + 1, t \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3x - (2k + 1), k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + (2t + 1), t \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3x - 2k - 1, k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + 2t + 1, t \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Ответ: при любом x (x - действительное) найдутся все y , удовлетворяющие совокупности $\left[\begin{array}{l} y = 3x - 2k - 1, k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + 2t + 1, t \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

б) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$. По свойствам функции $\arccos$, она принимает значения косинуса (от -1 до 1) и возвращает угол от 0 до π . Заметим, что из этих свойств следует, что $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi$. Равенство достигается в единственном случае:

$$\arccos \frac{x}{4} = \pi; \arccos \frac{y}{9} = \pi \Rightarrow \frac{x}{4} = -1; \frac{y}{9} = -1 \Rightarrow x = -4; y = -9. \text{ Таким}$$

из свойств можно ограничить значения x и y :

$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1; -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4; -9 \leq y \leq 9. \text{ Заметим, что так}$$

как x и y целые, то из п. а) следует, что для каждого значения

$$y \text{ можно найти } x, \text{ как: } \left[\begin{array}{l} y = 3x + (\text{целое нечетное число}) \\ y = -x + (\text{целое нечетное число}) \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

теперь, понимая, в каких диагоналях лежат x и y , и как они определены друг через друга, ~~переходим к следующему шагу~~

~~переходим к следующему шагу~~

~~переходим к следующему шагу~~
 $y = 3 + (\text{целое число})$

~~переходим к следующему шагу~~
 $y = -x + (\text{целое число})$

x

~~переходим к следующему шагу~~

Рассмотрим подходящие x и y : заметим, что $3x$ такой же чётности, что и x , а $-x$ такой же чётности, что и $x \Rightarrow 3x$ и $-x$ одинаковой чётности $\Rightarrow$ для них будут одинаковые y . Разберём 2 случая:

1) x чётно $\Rightarrow y$ чётно. $y \in \{-9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9\}$ - 10 чисел

2) x нечётно $\Rightarrow y$ нечётно $y \in \{-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\}$ - 9 чисел

чётные x : $x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ - 5 чисел $\Rightarrow$ таких $(x; y)$ $5 \cdot 10 = 50$ штук

нечётные x : $x \in \{-3; -1; 1; 3\}$ - 4 числа $\Rightarrow$ таких $(x; y)$ $4 \cdot 9 = 36$ штук

Всего пар $(x; y)$ $50 + 36 = 86$ штук, однако нам не подходит пара $(x; y) = (-4; -9)$, значит итого 85 пар.

Ответ: 85



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14. Билеты распределяются между людьми равномерно. Обозначим за x - количество 11-классников ($x \in \mathbb{N}$), y - количество билетов, которые добавились в конце месяца ($y \in \mathbb{N}$), то есть в конце месяца станет выделено $y+4$ билета. Посчитаем вероятности:

I (в начале месяца): C_x^4 способов распределить 4 билета по x 11-классникам. Из них подходящие C_{x-2}^2 , когда Петя и Васа оба получают по билету ("фиксируем" Петю и Васю, осталось 2 билета и $x-2$ человека, количество способов выбрать 2 человека из $x-2$ равно C_{x-2}^2). Таким образом, вероятность в этом случае равна $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} \cdot \frac{4!(x-4)!}{x!} = \frac{12}{x(x-1)} \quad (x \geq 4)$

II (в конце месяца): C_x^{y+4} способов распределить $y+4$ билета по x людям, из них подходящих C_{x-2}^{y+2} способов, когда Петя и Васа будут на концерте. Аналогично "фиксируем" Петю и Васю, осталось $y+2$ билета и $x-2$ человека, способов выбрать $y+2$ из $x-2$ равно C_{x-2}^{y+2} . Таким образом, вероятность в этом случае равна

$$\frac{C_{x-2}^{y+2}}{C_x^{y+4}} = \frac{(x-2)!}{(y+2)!(x-y-4)!} = \frac{(x-2)!}{(y+2)!(x-y-4)!} \cdot \frac{(y+4)!(x-y-4)!}{x!} = \frac{(y+4)(y+3)}{x(x-1)} \quad (x \geq y+4)$$

Чтобы условие задачи выполнялось, необходимо, чтобы было выполнено:

$$\frac{12}{x(x-1)} \cdot 3,5 = \frac{(y+4)(y+3)}{x(x-1)} \quad | \cdot x(x-1) \neq 0, \text{ поскольку } x \geq 4$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot 3,5 &= (y+4)(y+3) \Leftrightarrow 12 \cdot 3,5 = y^2 + 7y + 12 \quad | \cdot 2 \\ 12 \cdot 7 &= 2y^2 + 14y + 24 \Leftrightarrow 84 = 2y^2 + 14y + 24 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2y^2 + 14y - 60 &= 0 \Leftrightarrow y^2 + 7y - 30 = 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 + 7y - 3D = 0$$

$$D = 49 + 120 = 169 = 13^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-7 \pm 13}{2}$$

$$y_1 = -10 - \text{посторонний корень (} y \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$y_2 = 3 \Rightarrow y + y = 3 + 4 = 7 - \text{количество выделенных билетов в конце месяца.}$$

Ответ: 7.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

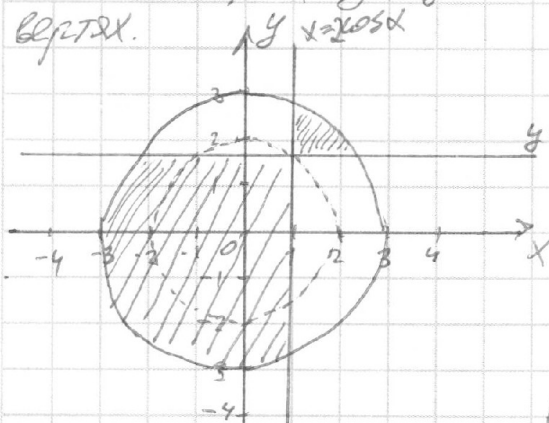
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~N6~~ N6.
$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

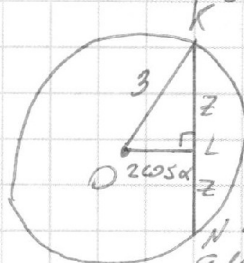
Заметим, что второе неравенство - это ^{круг} окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 3. Первое неравенство - это две прямые $y = 2\sin\alpha$ и $x = 2\cos\alpha$, которые пересекаются на окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 2. (из соотношений, что $4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 4$ по основному триг. тождеству). Они делят плоскость на четыре части, и решениями неравенств являются точки, находящиеся в первой и третьей разбиваемых частях.



пример решения системы

Периметр закрашенной области равен сумме длин хорд большей окружности и разбиваемых дуг.

Найдем длины разбиваемых хорд.



известная длина равна $2z$.

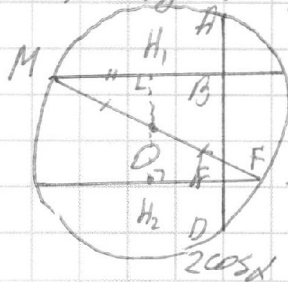
в угле вертикальной

хорды $z = \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2z = 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$

Аналогично, для вертикальной длины равно $2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$

Сумма длин хорд равна $2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$. Заметим следующее: сумма длин дуг, отсекаемых хордами перпендикулярно и равна половине длины большей окружности. Докажем этот факт: покажем, что из соотношений симметрии окружности, если мы отразим фигуру $y = 2\sin\alpha$ относительно Ox : $y = -2\sin\alpha$, то мы получим одинаковые фигуры ABC и DEF . А прямая MO (M - ~~точка~~ пересечение $2\sin\alpha$ и



окружности) проходит через $F \Rightarrow$

$\Rightarrow MF$ - диаметр. (это потому что

$\triangle H_2OF = \triangle H_1OM$ по широте (радиус)

и катету $MH_1 = H_2F$ также в силу симметрии окружности).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким образом, ^{найдя} периметр фигуры равен ~~Р~~ Р:

$$P_{\text{max}} = 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 3\pi \quad P_{\text{max}} = ?$$

$$P = 2\sqrt{5+4\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha} + 3\pi$$

Обозначим $\sin^2\alpha$ за t (~~так как~~ $0 \leq t \leq 1$)

$$P = 2\sqrt{5+4t} + 2\sqrt{9-4t} + 3\pi = P(t)$$

$$P'(t) = \frac{1}{\sqrt{5+4t}} \cdot 4 - \frac{4}{\sqrt{9-4t}} = \frac{4\sqrt{9-4t} - 4\sqrt{5+4t}}{\sqrt{5+4t} \cdot \sqrt{9-4t}} = 0$$

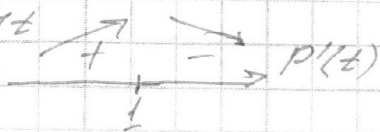
Найдем t , при которых $P'(t) = 0$

$$4\sqrt{9-4t} = 4\sqrt{5+4t}$$

$$9-4t = 5+4t$$

$$8t = 4$$

$$t = \frac{1}{2}$$



$$P(t) \text{ max при } t = \frac{1}{2} = \sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P(t)_{\text{max}} = P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{5+4 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{9-4 \cdot \frac{1}{2}} + 3\pi = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 3\pi = 4\sqrt{7} + 3\pi$$

Найдем α :

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right. \\ \left. \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi s, s \in \mathbb{Z} \right. \\ \left. -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot z, z \in \mathbb{Z}$$

Ответ: максимальный периметр равен $4\sqrt{7} + 3\pi$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot z, z \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

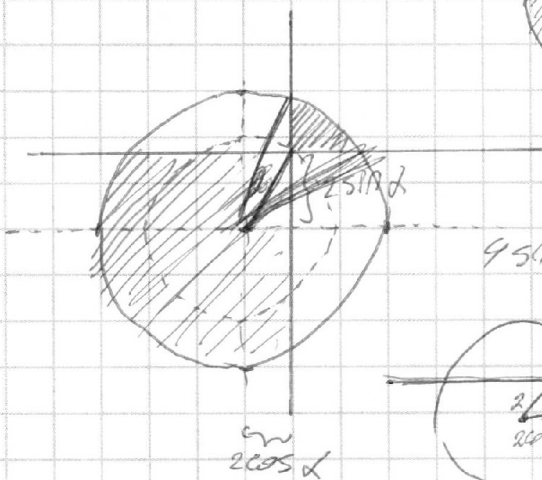
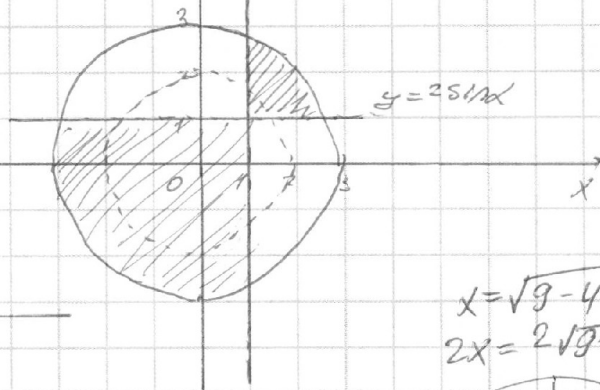
ЧЕРНОВИК

$$\int (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) d\alpha$$
$$x^2+y^2 \leq 9$$

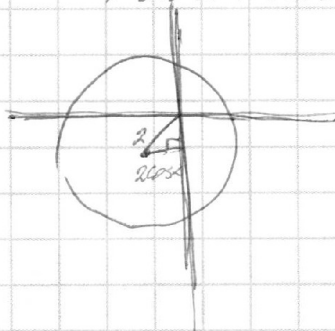
$$x=2\cos\alpha$$

$$y=2\sin\alpha$$

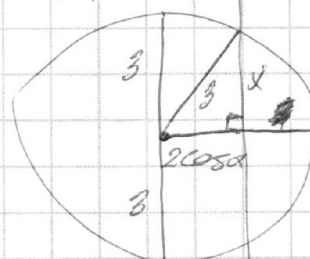
$$\cos\alpha = \sin\alpha$$



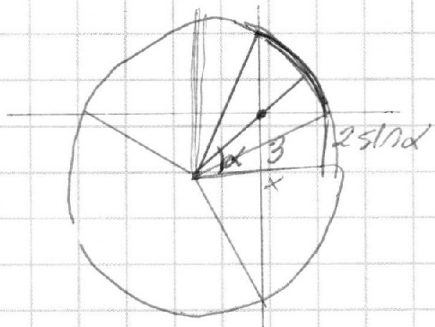
$$4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 4$$



$$x = \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$
$$2x = 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}$$

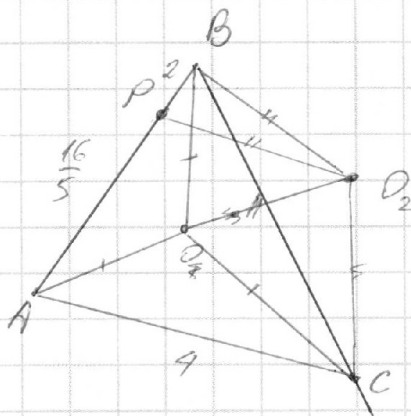
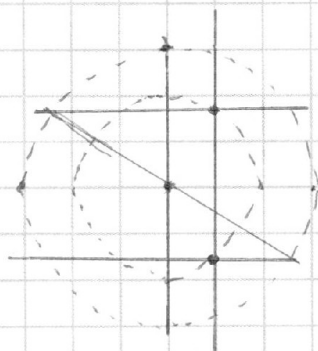


$$y = \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$
$$2y = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$



$$x = \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}$$

101
101
111



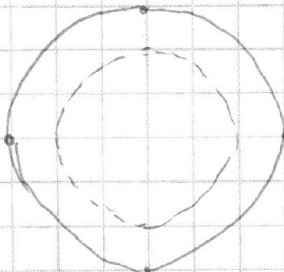
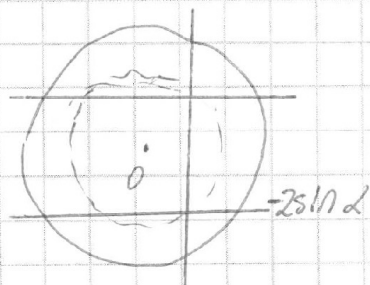


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

$$x \geq -4 \quad x \leq 4$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-1 \leq \frac{y}{9} \leq 1$$

$$-9 \leq y \leq 9$$

4 билета
7 4 билета
3 x н-класс, и добавилось
у билета

0: 1 3 5

~~билеты~~ C_x^4 - всего сп. раздать
билеты (выбрать 4 из x)

C_{x-2}^2 - производные

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} \cdot \frac{4!(x-4)!}{x!} = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} \cdot \frac{4!}{x(x-1)} = \frac{12}{x(x-1)}$$

$$\frac{C_{x+y}^4}{C_{x+y-2}^2} = \frac{(x+y-2)!}{2!(x+y-4)!} \cdot \frac{4!(x+y-4)!}{(x+y)!} = \frac{12}{x+y-1}$$

C_{x+y}^4 - всего

C_{x-2}^2 - прод.

$$\frac{(x-2)!}{(y+2)!(x-y-4)!} \cdot \frac{(y+4)!(x-y-4)!}{x!} = \frac{(y+4)(y+3)}{x(x-1)}$$

$$\frac{12 \cdot 3,5}{x(x-1)} = \frac{(y+4)(y+3)}{x(x-1)}$$

$$12 \cdot 3,5 = y^2 + 7y + 12$$

$$12 \cdot 7 = 2y^2 + 14y + 24$$

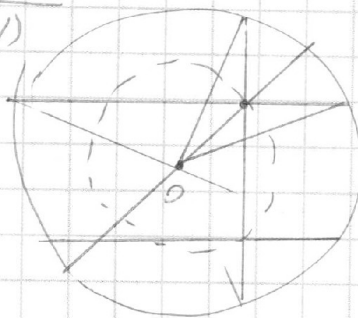
$$84 = 2y^2 + 14y + 24$$

$$2y^2 + 14y - 60 = 0$$

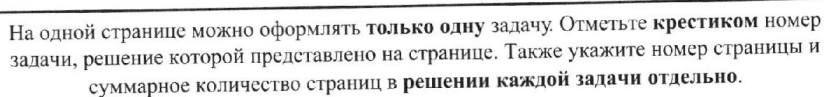
$$y^2 + 7y - 30 = 0$$

$$D = 49 + 120 = 169$$

$$y = \frac{-7 \pm 13}{2} = 3$$



$$\begin{array}{r} 12 \cdot 3,5 \\ \times 12 \\ \hline 84 \\ - 84 \\ \hline 24 \\ - 60 \\ \hline \end{array}$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ABC = D^2$$
$$A \in \{1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999\}$$
$$A = 1111, X, X \in \{1 \dots 9\} \quad 1111 \overline{) 1111} = 109 \cdot 11 - X, X \in \{1 \dots 9\}$$
$$B = \overline{a1b} \quad \overline{1ab} \quad \overline{ab1}$$

$$C = \overline{5a} \quad \overline{a5}$$

10p. 1p. $X = A \quad B = \overline{a}b \quad C = \overline{a}5$
 $\overline{1ab}$
 $\overline{ab1}$
 nacele

$$\boxed{B = 10\%}$$

101.11.1 = 1111 101-спектр

202

101

1. NZ.

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

303

$$107.11.5 = 5555$$

404

505

101

006
7.07

808

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} =$$

909

$$= \frac{x+y+1}{x} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)(x-3)}$$
$$xy = (x-3)(y+3)$$
$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$
$$3x - 34 = 9$$
$$x^3 - y^3 - 9xy =$$
$$= (3+4)^3 - 4^3 - 9(3+4) \cdot 4 =$$
$$-27 + 3 \cdot 9 \cdot y + 3 \cdot 3 \cdot y^2 + x^3 - x^3 - 27y - 9y^2 \quad | x - y = 3 \quad | x = 3 + y$$
$$\cancel{27} + \cancel{27y} + \cancel{9y^2} - \cancel{27y} - \cancel{9y^2} = \underline{27}$$
$$(\sin 71^\circ x - \sin 71^\circ y) \sin 71^\circ x =$$

$$= (\cos 2^\circ x + \cos 2^\circ y) \cos 2^\circ x$$
$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$
$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi/4) = 0$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$$
$$\cos 2\pi k + \cos \pi \cdot (x-4) = 0$$
$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos\left(\frac{2\alpha + \beta}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha + 2\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \alpha = -\sin(-\alpha)$$
$$= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$$
$$= \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\beta-\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\beta-\alpha}{2}$$
$$= \left| 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right|$$
$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) =$$

£5 20 + £5 45 =

$$= 2 \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$
$$= \sqrt{2} = 2 \cos \frac{135}{2} \cos$$
$$\cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} (x^{0.5})' = \frac{1}{2\sqrt{0.5}} \cdot x'$$
$$\cos 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$$
$$= 2.9 \times 60. \cos 0 \approx 1$$
