



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°1

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{2ba}$$

$$C = \overline{3c}$$

$$bza$$

$$bda$$

$$A \cdot B \cdot C = D^2 \quad \text{натур.}$$

$$A = 1111 \cdot x = 101 \cdot 11 \cdot x, \text{ где } x \in [1; 9]$$

$$\text{Тогда } D \text{ минимально} = 101^2 \cdot 11^2 \cdot x^2$$

$$C \text{ не может: } 101 \Rightarrow B = 101 \cdot y, \text{ где } y \in [1; 9],$$

$$\text{при этом в } B \text{ есть цифра } 2 \Rightarrow B = 202$$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot x \cdot 101 \cdot 2 \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot x \cdot 2 \cdot C$$

$$\text{Чтобы } D \text{ было натуральным, } C = (11 \cdot 2 \cdot x)z = 22xz,$$

$$\text{при этом } C \text{ содержит } 3 \text{ и } xz = v^2 \text{ его возможный делитель}$$

$$\text{Так не может быть } (22 \cdot xz \text{ не содержит } 3), \text{ значит}$$

$$x:2, \text{ чтобы } C/2 \text{ (и была возможна содержать } 3) \text{ и}$$

$$\text{чтобы } ABC - \text{натур. квадраты или числа}$$

$$x = 2 \text{ или } x = 8 \text{ (} 2^2 \text{ или } 2^4 \text{) или } x = 2 \cdot w' \text{ (} w' \text{ делит } C)$$

$$\text{Тогда } C = 11z, \text{ где } z \text{ квадрат, } z \in [1; 9]$$

$$\text{Чтобы } C \text{ содержала } 3, z = 3 \text{ (} C = 33 \text{), тогда } w = 3$$

$$x = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (больше квадратов не получится, иначе}$$

$$\text{числа будут не } 2zn, 3zn, 4zn, \text{ соответственно)}$$

$$\Rightarrow C = 33, B = 202, A = 6666$$

$$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = (6666)^2$$

Ответ: только одна тройка! 6666; 202; 33



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{y+x+2}{xy} \quad N=2$$

$x, y \in \text{цел.}$

$$K = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+1+x-1+2}{xy+x-y-1} = \frac{y+x+2}{xy+x-y-1}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+x+2}{xy+x-y-1}$$

$$\frac{(y+x+2)(xy+x-y-1) - (y+x+2)xy}{xy(xy+x-y-1)} = 0$$

$$\frac{(y+x+2)(x-y-1)}{xy(xy+x-y-1)} = 0$$

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy \neq 0 - \text{невозможно} \\ xy+x-y-1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = -2 - \text{невозможно} \\ x-y = 1 \\ (x-1)(y+1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x=y+1$$

$$\Rightarrow x=y+1$$

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

(y сократились)

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N=3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$(\sin \pi x)^2 + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = (\cos \pi x)^2 + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos \pi \cdot 2x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos \pi \cdot 2x + \cos \pi (x+y) + \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

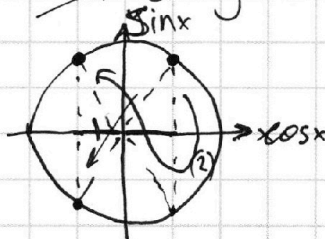
$$\cos \pi \cdot 2x = -\cos \pi (x+y)$$

$$\begin{cases} \pi \cdot 2x + \pi = \pi (x+y) & (1) \\ -\pi \cdot 2x + \pi = \pi (x+y) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 1 = x + y \\ 1 - 2x = x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ x = \frac{1-y}{3} \end{cases}$$

Ответ: y - любое, $x \in \{y-1; \frac{1-y}{3}\}$



$$b) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{y-1}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

если $y = -4$

$$\arcsin(-1) + \arccos(-1) = 2\pi$$

тогда $-4 \leq y \leq 4$

$$\arcsin \frac{1-y}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

если $y = 16$ то $0 \leq y \leq 4$

$$\arcsin(1) + \arccos(-1) = \pi$$

тогда $\arcsin \frac{6}{5} < \frac{\pi}{2}$

тогда не достигаем $\frac{3\pi}{2}$

или $x = \frac{1-y}{3}$ - неконкретно
 Ответ: $(x; y) \in$
 $\{(-2; -1); (-1; 0);$
 $(0; 1); (1; 2); (2; 3); (3; 4)\}$
 $\cup \{(1; -2) \cup (0; 4)$
 $\cup (-1; 4)\}$

Для целых y : $y = -4$ - не подходит

$y = -3$: $\arcsin(-\frac{4}{5}) + \arccos(-\frac{3}{4}) > \frac{3\pi}{2}$
 в сумме $> \frac{3\pi}{2}$

$y = -2$: $\arcsin(-\frac{3}{5}) + \arccos(-\frac{2}{4}) > \frac{3\pi}{2}$
 в сумме 2 четв. + половина четв. + больше пол. четв.

$y = -1$: $\arcsin(-\frac{2}{5}) + \arccos(-\frac{1}{4}) < \frac{3\pi}{2}$
 в сумме 2 четв. + кусок, меньший $\frac{1}{4}$

$y = 0$: подходит

$y = 4$: $\arcsin(\frac{3}{5}) + \arccos \frac{3}{4}$

при уменьш. y угол тоже уменьшается
 поэтому подходит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N° 4

в начале месяца: $P_1 = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$, где n - кол-во учащихся
в конце месяца: $P_2 = 2,5 P_1 = \frac{4+x}{n} \cdot \frac{3+x}{n-1}$, где x - кол-во прод. билетов

$$2,5 \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{4+x}{n} \cdot \frac{3+x}{n-1}$$

$$30 = (4+x)(3+x)$$

$$x^2 + 7x + 18 = 0$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 18 = 49 - 72 = -23 = 11^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{2} = -9; 2$$

$$(x-2)(x+9) = 0$$

Отрицательное число билетов быть выделено не можем, поэтому $x = 2$

$$4 + x = 4 + 2 = 6$$

Ответ: 6 билетов

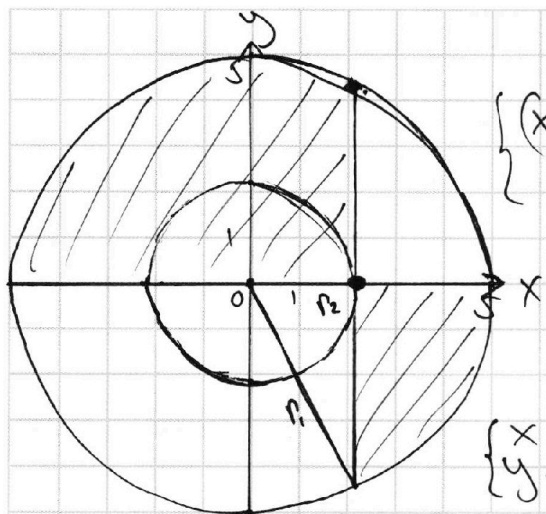


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°6



$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25 - \text{кр. с } O(0;0) \text{ и } r_1 = 5 \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y = 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 18\sin^2\alpha + 18\cos^2\alpha = 18$$

$\Rightarrow (\cdot) \cap$ прямых x и y ходит по кр. с $O(0;0)$ и $r_2 = 3\sqrt{2}$

Область значений либо меньше x и больше y в этой точке
либо больше x и меньше y

Т.е. эти 2 хорды (прямые x и y) $\perp$ друг другу, но друг
уни них (этих зонах) всегда занимают половину кр.

$$P_{\text{кр.}} = \pi r^2 = 5\pi$$

Площадь $(\cdot) \cap$ прямых x и y ходит по кр., поэтому $\frac{1}{2}$ длины
этих прямых = const.

$$P_{\text{прямых}} = d + \text{хорда}$$

$$\text{хорда (по th Птол.)} = 2 \cdot \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = 2 \cdot \sqrt{5^2 - (3\sqrt{2})^2} = 2 \cdot \sqrt{25 - 18} = 2\sqrt{7}$$

$$P_{\text{прямых}} = 2 \cdot 5 + 2\sqrt{7} = 2(5 + \sqrt{7})$$

$$M = P_{\text{кр.}} + P_{\text{прямых}} = \text{const} = 5\pi + 2(5 + \sqrt{7})$$

при всех α .

Ответ: $5\pi + 2(5 + \sqrt{7})$; $\forall \alpha$

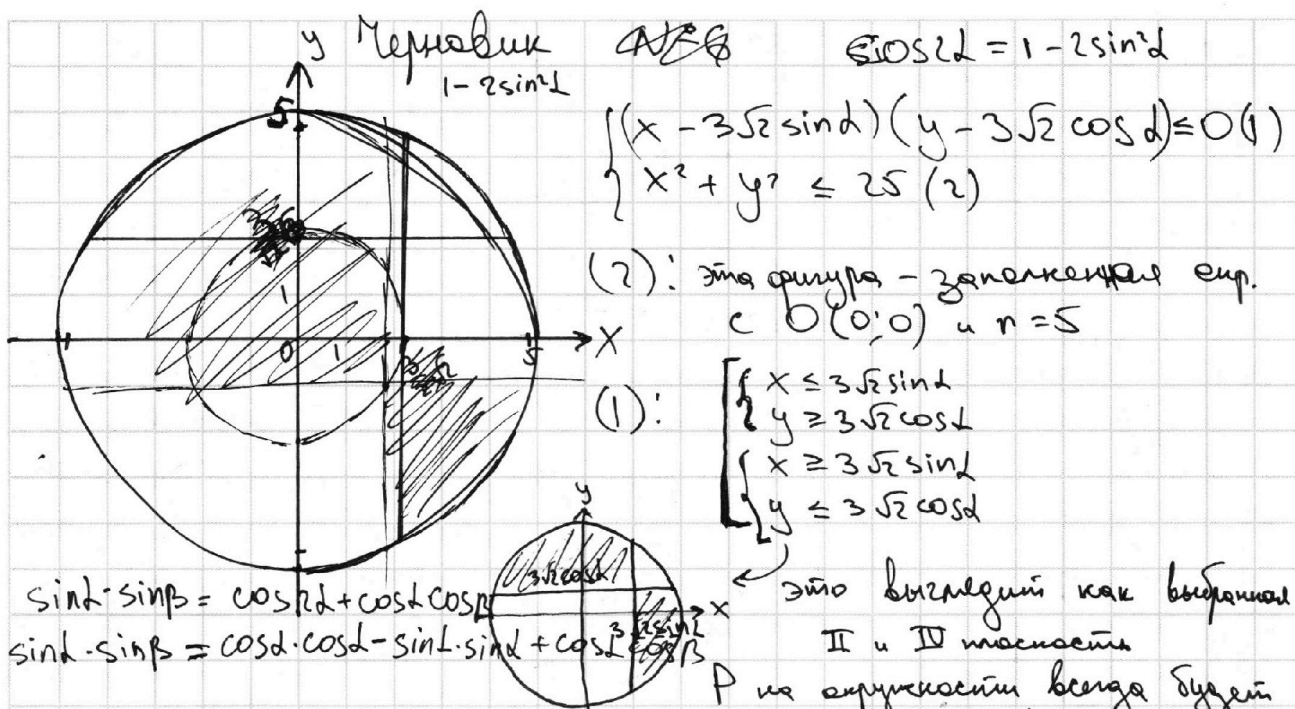


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

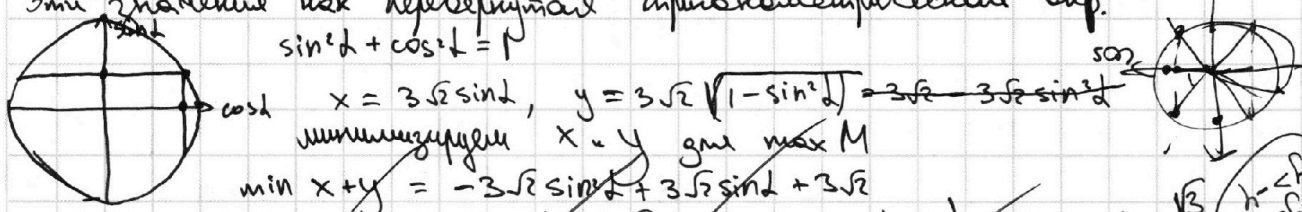
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Получа max Р, когда прямая $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$ и $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ проходит через O и равна диаметру кр. (max длина)
 $h = h$ $1 = \frac{h}{h}$ $0 = h$ $h = h$
 $\Rightarrow M_{\max} = \pi r + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 5(\pi + 4) = \frac{5}{1-h} \quad 0 = \frac{h}{h} \quad 1 = \frac{5}{1-h}$

Но по симметрии $x=0, y=0 \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2}\sin\alpha = 0 \\ 3\sqrt{2}\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 0 \end{cases}$ - невозможно

Это значение как перевернутая гиперболическая кр.



$\min x+y = -3\sqrt{2}\sin\alpha + 3\sqrt{2}\sin\alpha + 3\sqrt{2}$
 $(x+y)' = -6\sqrt{2}\sin\alpha + 3\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 Тогда $x = \frac{3}{2}\sqrt{2}, y = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$x^2 + y^2 = 18(\sin^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha) = 18$ $\begin{matrix} h=5 \\ h=5 \end{matrix} \quad \alpha \in \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$1 > h \quad h \neq h \quad 1-h = 5-$

$0 > \frac{5}{1-h} \Rightarrow \frac{5}{1-h} = 1-h \Rightarrow 1-h = 1-h \Rightarrow 1-h = 1-h$

$\cos\alpha \cdot \cos\alpha = (\sqrt{1+\frac{1}{2}}) \cdot \cos\alpha$

$\frac{h}{5} = 0.9509 : 0.9509$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение

$2,7 \div 5,1$

$5,1 \div 3,4$

$l = 2\pi r \times \frac{1111}{2 \cdot 3} \times \frac{3333}{24539}$

$l = \frac{5\pi}{4}$

$A -$
 $B -$
 $C -$

$A \cdot B \cdot C = D^2$

$3\sqrt{2} \sin \alpha > x$
 $2\sqrt{2} \cos \alpha < y$

$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 2\sqrt{2} \cos \alpha) = 0$

$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$
 $y = 2\sqrt{2} \cos \alpha$

$P = \frac{5\pi}{2} \times 20 \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$
 $\cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$2 \sin^2 \alpha + 1 + \sin \alpha \sin \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$
 $(2 \sin^2 \alpha + 1 + \sin \alpha \sin \beta)^2 = (1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \beta)$

$A = 1111 \cdot X = 101 \cdot 11 \cdot X$
th cos: $\tan \alpha \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot X$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$
 $BC^2 = X^2 + X^2 - 2X^2 \cdot \cos \alpha$

$\angle BPO = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$
 $\angle APO = 180^\circ - (90^\circ + \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$
 $\angle AHP = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$

$O - (1) \cap \text{ср. } \perp : AH = HC \Rightarrow PH \text{ is the Thales' circle}$

$\frac{15}{9} = \frac{25}{12}$
 $\frac{15}{9} = \frac{25}{12}$
 $\frac{3}{9} = \frac{5}{12}$

$-6\sqrt{2} \sin \alpha + 3\sqrt{2} = 0$
 $2 \sin \alpha = 1$
 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

$y^2 + 2y^2 + y + y^2 + y + 1 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

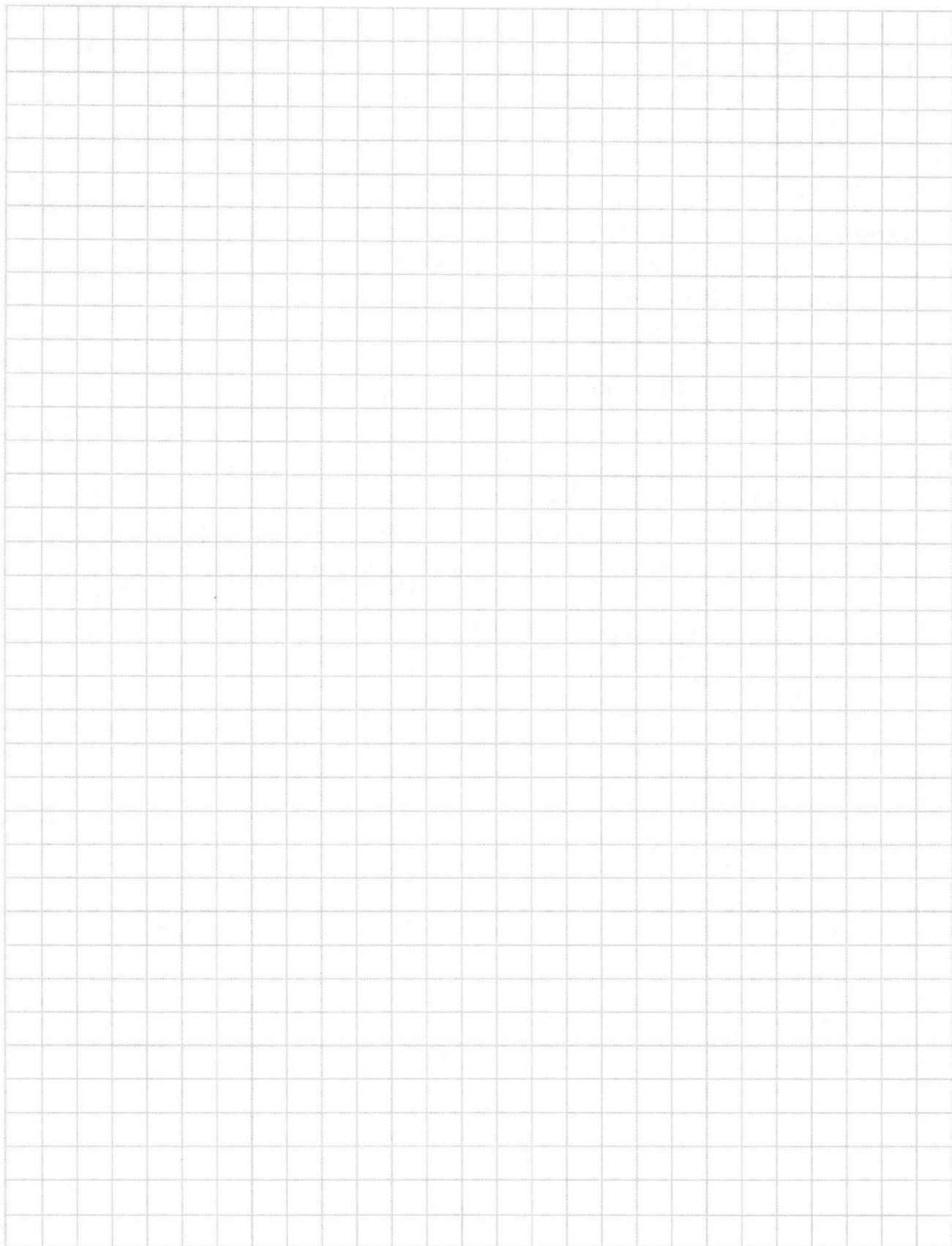
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 4