МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y =$ $= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1 $A = 1111 \cdot a$ ← цифра $\quad 1111 = 11 \cdot 101$

$B = \overline{bcd} \quad b/c/d = 7 \quad$ 101 - простое число

$C = \overline{ef} \quad e/f = 1$

$\underbrace{A}_{\vdots 11 \cdot 101} \cdot B \cdot C = n^2 \vdots 11^2 \cdot 101^2 \Rightarrow B/C \vdots 101$, но $C < 101 \Rightarrow B \vdots 101$

$B = 101 \cdot \underset{m}{\overset{10}{m}} \vdots$ $B = 707$, т.к цифра десятков $= 0$ а цифра сотен и единиц должна совпадать $\Rightarrow$ равны 7

$1111 \cdot a \cdot 707 \cdot C = n^2$

$11 \cdot \underset{\wedge}{a} \cdot 7 \cdot C \vdots 11^2 \cdot 7^2$

$\Rightarrow C \vdots 11 \Rightarrow$ цифра десятков и единиц совпадает $\Rightarrow$ равна 1 из условия $\Rightarrow C = 11$

$101^2 \cdot 11^2 \cdot a \cdot 7 = n^2$

$a \cdot 7$ - квадрат натурального числа, т.к. a - это цифра $\Rightarrow$ $a = 7$

$\Rightarrow A = 7777$

Ответ: $\begin{cases} A = 7777 \\ B = 707 \\ C = 11 \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2 $k=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=const$ при $x=x_0-4$, $y=y_0+4$

$M=x^3-y^3-12xy-?$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{y+4}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{x\cdot y}=\frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\underbrace{(x+y+3)}_{>0}\left(\frac{1}{x\cdot y}-\frac{1}{(x-4)(y+4)}\right)=0$$

$$\frac{xy-4y+4x-xy-16}{xy(x-4)(y+4)}=0$$

$$\frac{4(x-y)-16}{(xy)(x-4)(y+4)}=0$$

~~$M=x^3-y^3-12\cdot x^2=-12x^2$, $x\neq0$, $x\neq4$~~

$x-y-4=0$

$x=y+4$

$$M=(y+4)^3-y^3-12(y+4)y=4\cdot(y^2+8y+16+y^2+y^2+4y)-12y^2-48y=$$
$$=12y^2+48y+64-12y^2-48y=64$$

Ответ: 64

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

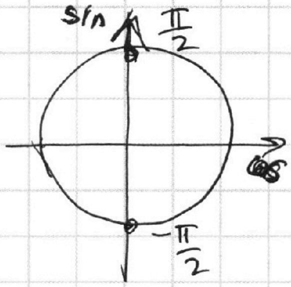
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3 а) $(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$

$2\sin\left(\frac{\pi\cdot(y-x)}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot(y+x)}{2}\right)\cdot\sin\pi y = 2\cos\left(\pi\frac{y+x}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{y-x}{2}\right)\cdot\cos\pi y$

$\cos\left(\frac{\pi\cdot(y+x)}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi\cdot(y-x)}{2}\cdot\sin\pi y - \cos\left(\pi\cdot\frac{y-x}{2}\right)\cdot\cos\pi y\right)=0$

$\cos\left(\pi\cdot\frac{(y+x)}{2}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}+\pi y\right)\right)=0$



1. $\pi\cdot\frac{(y+x)}{2} = \frac{\pi}{2}+\pi n \quad n\in\mathbb{Z}$

$(y+x) = 2n+1 \quad n\in\mathbb{Z}$

2. $\frac{\pi}{2}(3y-x) = \frac{\pi}{2}+\pi n \quad n\in\mathbb{Z}$

$3y-x = 1+2n \quad n\in\mathbb{Z}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y+x=2n+1 \\ 3y-x=2n+1 \end{array}\right. \quad n\in\mathbb{Z}$

б)

$\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

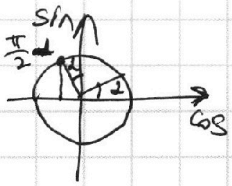
$\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{x}{7} > \arcsin\frac{y}{4} \quad |:\sin..$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{x}{7}\right) > \frac{y}{4}$

$\cos\left(\arccos\frac{x}{7}\right) > \frac{y}{4}$

$\frac{x}{7} > \frac{y}{4}$

$4x > y\cdot 7$



$0 \le \arccos\frac{x}{7} \le \pi$

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\frac{y}{4} \le \frac{\pi}{2}$

$-1 \le \frac{x}{7} \le 1 \Rightarrow -7 \le x \le 7$

$-1 \le \frac{y}{4} \le 1 \Rightarrow -4 \le y \le 4$

~~При каждом значении y будем подбирать подходящий x, удовлетворяющий~~

~~Ответ: 33 пары~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4x \geq y \cdot 7 \\ x \text{ и } y \text{ разной чётности} \\ -7 \leq x \leq 7 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

При каждом y подберём x, удовлетворяющий условиям.

y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	$-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$	$-4, -2, 0, 2, 4, 6$	$-3, -1, 1, 3, 5, 7$	$0, 3, 4, 6$	$1, 3, 5, 7$	$3, 4, 6$	$4, 6$	6	

Ответ: 33 пары

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 4 4 билета → n билетов стало

пусть X - одиннадцатиклассников

вероятность в начале месяца:

1) $$w_1 = \frac{\frac{(X-2)(X-3)}{2}}{\frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{4!}} = \frac{12}{X(X-1)}$$

выбираем 2-х людей помимо Пети и Васи

вероятность в конце месяца:

выбираем людей помимо Васи и Пети

2) $$w_2 = 11 w_1 = \frac{C_{X-2}^{n-2}}{C_X^n} = \frac{n!}{(n-2)!\,(X)(X-1)} = \frac{121}{X(X-1)}$$

случайным образом распределяем билеты между всеми одиннадцатиклассниками

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 121$$

$n \cdot (n-1) = 121 \Rightarrow n = 12$, т.к. $121 = 11 \cdot 12$, а n - натуральное число

Ответ: 12 билетов всего было выделено на концерт (на 8 больше, чем ожидалось в начале месяца) (8 билетов выделено в конце месяца)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

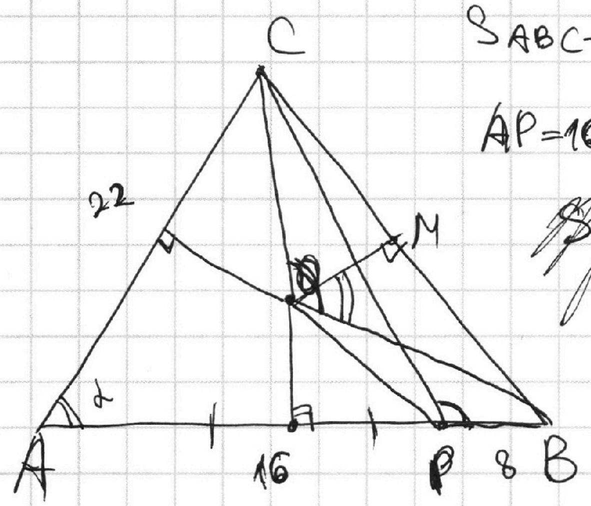
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5



$S_{ABC}-?$

$AP=16$, $BP=8$, $AC=22$

~~Формула Стюарта:~~ т. O – лежит на ∩ серединных перпендикуляров, т.к. ~~это~~ центр описанной окружности

т. M – центр CB,

$\angle CAB = \angle MOB$, т.к. OM это бисс. центрального угла $\angle COB = 2\angle CAB$

$\angle COB = \angle CPB$ (по бабочке) (смотрят на одну хорду)

$\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle CPB = 2\alpha = \angle CAP + \angle ACP$ (внешний угол $\triangle ACP$)

$\Rightarrow \angle ACP = \alpha \Rightarrow CP = AP = 16$ (равнобедренный $\triangle$)

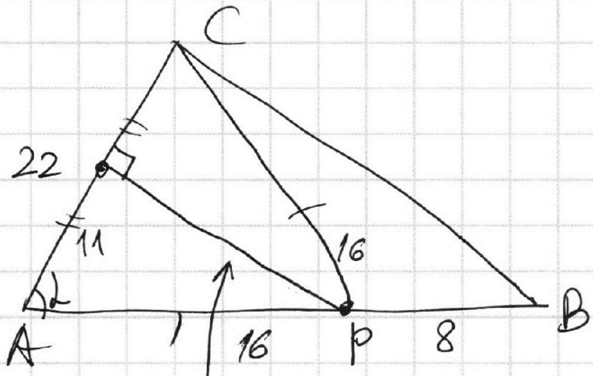
~~Формула Стюарта:~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{16^2-11^2}=\sqrt{27\cdot 5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{27\cdot 5}}{16}$

$S_{ABC}=\frac{AC\cdot AB}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{\cancel{22}^{11}\cdot\cancel{24}^{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{27\cdot5}}{\cancel{16}_2} = \frac{33}{2}\cdot 3\sqrt{15} =$

$=\frac{99}{2}\cdot\sqrt{15}$

Ответ: $\frac{99}{2}\cdot\sqrt{15}=S_{ABC}$

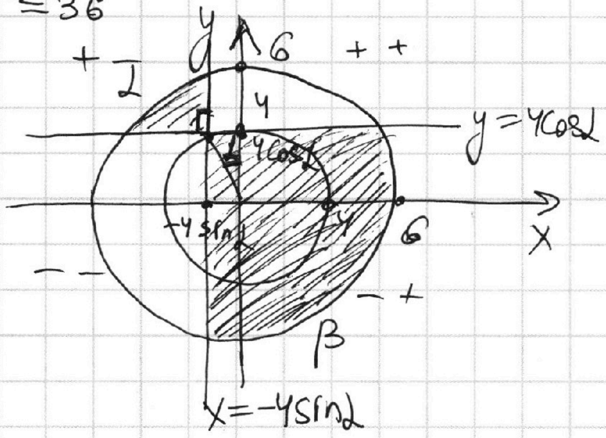
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

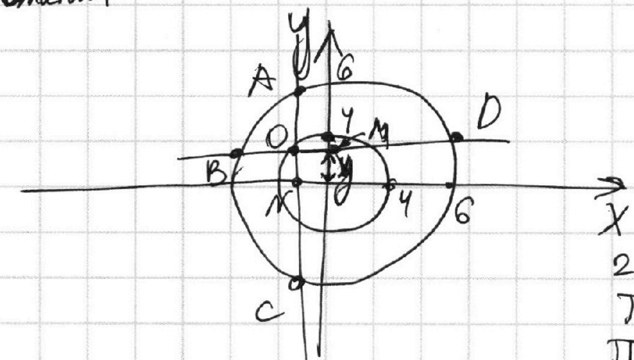
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6 $\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$



длины на окружностях в сумме дают $\pi\cdot 6$, т.к. $90^\circ=\frac{\alpha+\beta}{2}\Rightarrow$ $\alpha+\beta=\pi$ — половина длины окружности — это сумма дуг при любом положении



$y=4\cos\alpha$

$OM=\sqrt{16-y^2}$

$BM=MD=\sqrt{36-y^2}$

$AN=NC=\sqrt{36-(16-y^2)}=\sqrt{20+y^2}$

$2AN+2BM\to max\Rightarrow\sqrt{20+y^2}+\sqrt{36-y^2}\to max$

Пусть max значение $=m$

Тогда m^2 тоже стремится к максимуму

$(\sqrt{20+y^2}+\sqrt{36-y^2})^2=m^2$

$\underbrace{20+y^2+36-y^2}_{const}+2\sqrt{(20+y^2)(36-y^2)}=m^2$

$\Rightarrow (20+y^2)(36-y^2)\to max$

$M=\pi\cdot 6+2NA+2BM$

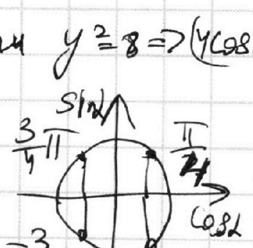
$20\cdot 36-y^4+16y^2\to max$, при $y^2=\frac{-16}{-2}=8$

$\Rightarrow$ максимум достигается при $y^2=8\Rightarrow(4\cos\alpha)^2=8$

$\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n\quad n\in\mathbb{Z}$



Ответ: $M=\pi\cdot 6+4\sqrt{28}$

при $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n\quad n\in\mathbb{Z}$

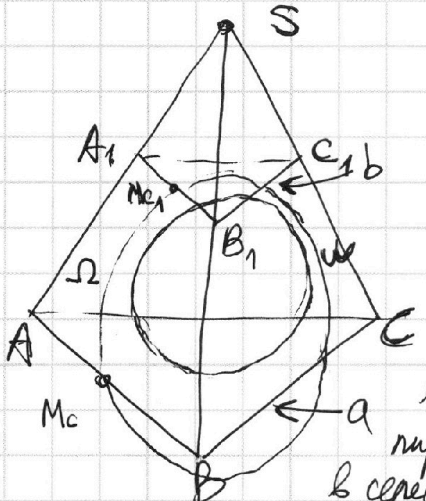
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

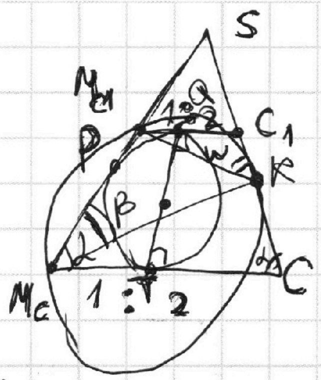
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7





в силу симметрии правильной пирамиды Ω касается ребер оснований в серединах, а ω касается оснований в точках пересечения медиан, а боковых граней на оси симметрии трапеций

M_{C_1} — середина $A_1B_1 \Rightarrow \frac{\sqrt3}{2} b = C_1M_{C_1}$

M_C — середина $AB \Rightarrow \frac{\sqrt3}{2} a = M_C C$

$\Rightarrow$ т.к. T — центр $\cap$ медиан $\triangle ABC$, то $M_C T = \frac{\sqrt3}{6} a = M_C P$ (касание окружности)

$M_{C_1} Q = \frac{\sqrt3}{6} b = M_{C_1} P$ (касание окружности)

угол наклона боковой грани пирамиды $= \alpha$, т.к. $M_C S C \perp AB$.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt3}{6}(a-b)}{\frac{\sqrt3}{6}(a+b)} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b}$$

т K — касание Ω с SC

$\angle M_{C_1} M_C K = \angle M_{C_1} K C_1$ (угол между касательной и хордой)

$$\left(\frac{\sqrt3}{2} b\right)^2 = C_1K^2 + M_{C_1}K^2 - 2 M_{C_1}K \cdot C_1K \cdot \cos\beta$$

$$M_{C_1}K^2 = \left(\frac{\sqrt3}{6}(a+b)\right)^2 + M_C K^2 - 2 M_C K \cdot \frac{\sqrt3}{6}(a+b) \cdot \cos\beta$$

$$M_C K^2 = \left(\frac{\sqrt3}{2} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt3}{6}(a+b) - C_1K\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt3}{2} a \left(\frac{\sqrt3}{6}(a+b) - C_1K\right) \cos\alpha$$

$$\frac{\sin\beta}{\frac{\sqrt3}{2} a} = \frac{\sin(180-\alpha)}{M_{C_1}K} = \frac{\sin\alpha}{M_{C_1}K} \Rightarrow M_{C_1}K = \frac{\sqrt3}{2} a \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

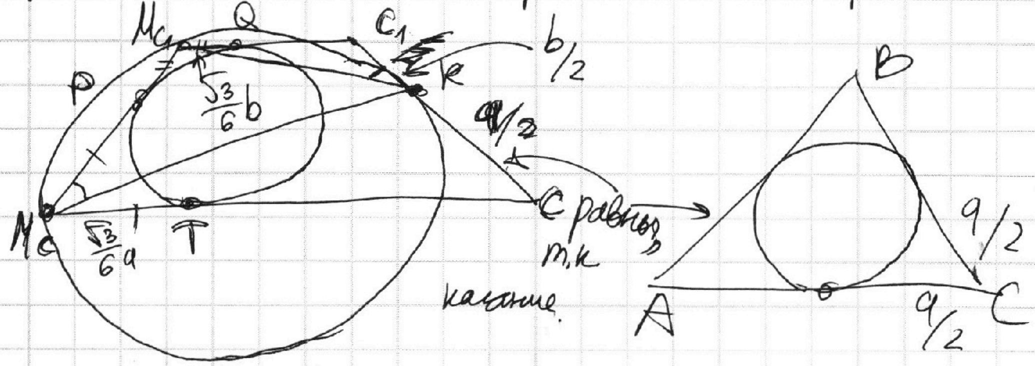
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 = C_1K^2 + \frac{3}{4}a^2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} - 2\cdot C_1K\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\cos\alpha$$



$$\frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}(a+b)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

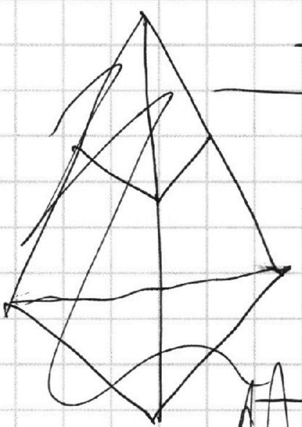
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

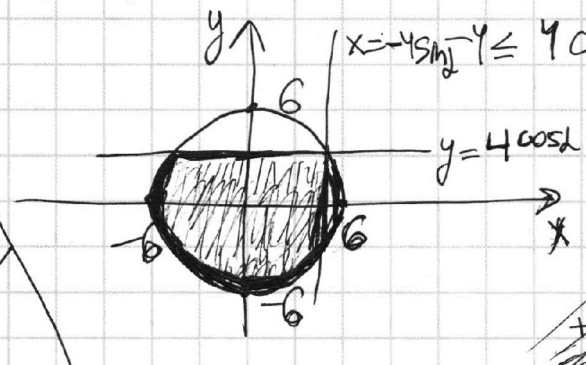
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

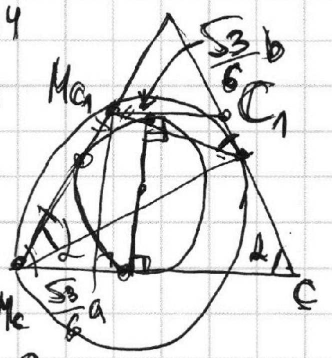
№6 $\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0 \\ x^2+y^2\le 36 \end{cases}$

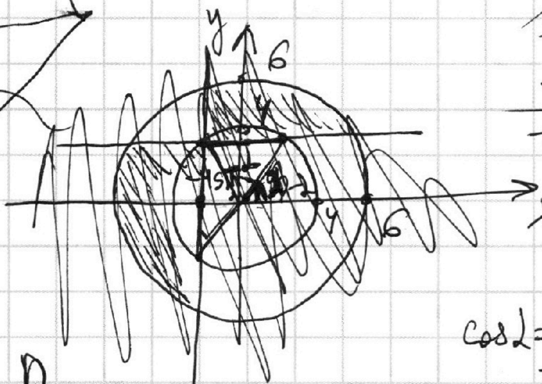
$-4\le 4\sin\alpha\le 4$

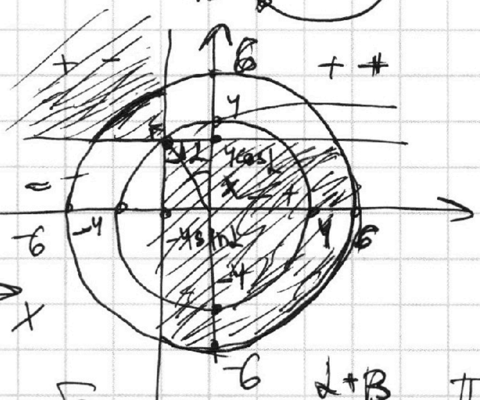


$x=-4\sin\alpha$ $-4\le 4\cos\alpha\le 4$





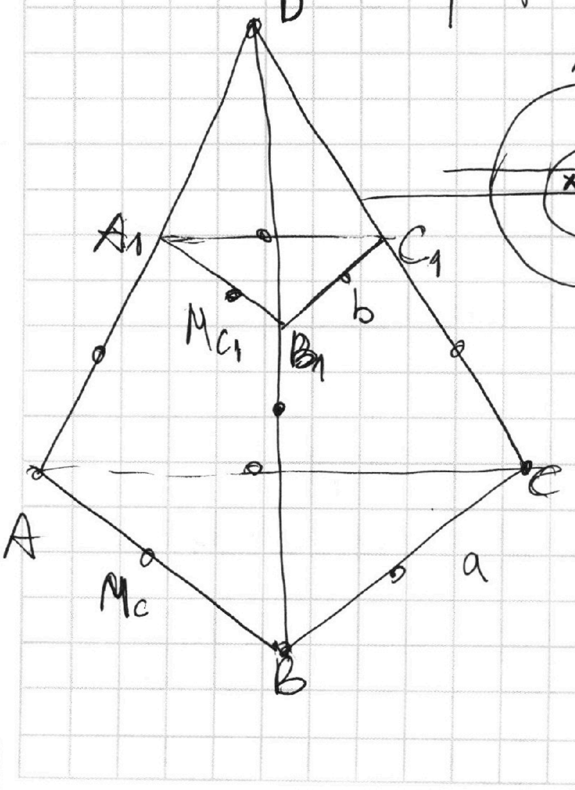


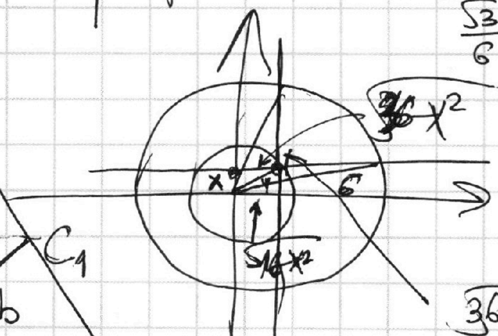


$\cos\alpha=\dfrac{\frac{\sqrt3}{6}(a-b)}{\frac{\sqrt3}{6}(a+b)}=\dfrac{a-b}{a+b}$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \alpha+\beta=\pi$

πR





$\sqrt{36-16+x^2}=\sqrt{20-x^2}$

$\sqrt{36-x^2}+\sqrt{20+x^2}\to\max$

$0<x^2\le 16$

$36-\cancel{x^2}+20+\cancel{x^2}+2\sqrt{(36-x^2)(20+x^2)}$

$(36-x^2)(20+x^2)\to\max$

$-x^4+16x^2+36\cdot 20\to\max$

$x^2=\frac{16}{2}=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!