



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. A - четырехзначное из одиначковых цифр, значит, представимо в виде $1111 \cdot a$ где $0 < a < 10$.
 $A \cdot B \cdot C = 1111a \cdot B \cdot C = 11a \cdot 101 \cdot B \cdot C$. 101 - простое, поэтому, чтобы ABC делилось на 101 , $a \cdot B \cdot C$ должно $\div 101$, но $a < 101$, $C < 101 \Rightarrow B \div 101$. Т.к. хотя бы одна цифра B - 2, $B = 202$. Тогда $ABC = (11 \cdot a \cdot 101) \cdot (101 \cdot 2) \cdot C$. 11 - простое $\Rightarrow \Rightarrow aC \div 11$, но $a < 11 \Rightarrow C \div 11$. Т.к. одна из цифр C - 3, то $C = 33$. Итак, $ABC = 11 \cdot a \cdot 101 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot a \cdot 6$ - квадрат.
Тогда $a = 6x^2$ где x ~~натуральное~~ ^{натуральное}, и $a < 10 \Rightarrow a = 6$. Итак,
 $A = 6666 = 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11$
 $B = 202 = 101 \cdot 2$
 $C = 33 = 3 \cdot 11$
Ответ: $(6666, 202, 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\sim 2. \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

Т.к. $x, y > 0$, $x+y+2 \neq 0$, а значит $\underline{xy = (x-1)(y+1) = xy + x - y - 1}$

$1 = x - y$ Тогда $x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy =$

$$= x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x и y разной четности. Заметим также, что ~~тогда~~
множества $x - (2k+1)$ и $(1+2k) - 3x$ совпадают для целых

x и k , ~~если x и k имеют одинаковую четность~~ тогда они задают целые
числа с ~~той же~~ ~~одинаковой~~ отменной четности числа x четностью.

Тогда посчитаем кол-во подходящих y для каждого x .

Для $x = 5 \rightarrow y \in \{4, 2, 0, -2\}$ (не -4 по опр. 1).

$x \in \{3, 1, -1, -3, -5\} \rightarrow y \in \{4, 2, 0, -2, -4\}$

$x \in \{4, 2, 0, -2, -4\} \rightarrow y \in \{3, 1, -1, -3\}$

Итого всего $4 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 4 + 25 + 20 = 49$ способов

Ответ: 49



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

13 а) $\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi y - \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x = -\cos 2\pi x - \cos(\pi x + \pi y) = 0$
 $\cos 2\pi x = -\cos(\pi x + \pi y)$

$\cos \alpha = \cos \beta$ при $\beta = \pi \pm \alpha + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$



Значит, $2\pi x = \pi \pm \pi(x+y) + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$

$2x = 1 \pm (x+y) + 2k$

$2x = 2k + 1 + x + y$

$2x = 1 + 2k - x - y$

~~$y = x - (2k+1)$~~

~~$y = 1 + 2k - 3x$~~

~~Отвечая: $(x, x - (2k+1))$, $(x, 1 + 2k - 3x)$, $k \in \mathbb{Z}$~~

Отвечая: $(x, x - (2k+1))$, $(x, 1 + 2k - 3x)$, $k \in \mathbb{Z}$

б) Отвечая: $(x, x - (2k+1))$, $(x, 1 + 2k - 3x)$; $k \in \mathbb{Z}$

в) Обозначим $\arcsin \frac{x}{5} = \alpha$, $\arccos \frac{y}{4} = \beta$. $\alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$

$\sin \alpha = \frac{x}{5}$ $\cos \beta = \frac{y}{4}$

ограничения: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, так и $\alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$

~~$-\arccos \frac{y}{4} + \arcsin \frac{x}{5} = -\frac{\pi}{2}$ поэтому не может быть одновременно $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.~~

ограничения 1: $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta \leq \pi$, а

Одновременно не может быть $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = \pi$, иначе $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$

Тогда $\sin \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ кроме $\alpha = \frac{\pi}{2}$ любой y подходит, $\arccos \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow x = 5$; при $\beta = \pi$ $\cos \beta = \cos \pi = -1 \Rightarrow y = -4$

ограничения 2: $-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$ т.к. это синус,

$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$ т.к. это косинус.

$[-5 \leq x \leq 5]$, $[-4 \leq y \leq 4]$, причем, чтобы

выполнилось и-во из условия необходимо и достаточно, чтобы $(x, y) \neq (5, -4)$ (необходимость описана в

ограничения 1, достаточность понятна из него же:

если $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то любой y подходит в силу ограниченности $\arccos$ и если $\beta < \pi$ то любой x подходит в силу ограниченности $\arcsin$. Заметим, что по формуле из а)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14. Изначальная вероятность или обом попасть на концерт равна

$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$, где x - кол-во одноклассников. (в числителе выбираем 2 билета для всех кроме Пети и Васи)

Пусть стало выделено y билетов. Тогда аналогично теперь вероятность $\frac{C_{y-2}^2}{C_x^4}$. По условию

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \cdot 2,5 = \frac{C_{y-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)(x-3)}{2} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4}{x(x-1)} \cdot \frac{5}{2} = \frac{30}{x(x-1)} = \frac{(y-2)(y-3)}{2} \cdot \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$= \frac{(x-2)(x-3) \dots (x-y+1)}{(y-2)(y-3) \dots 1} \cdot \frac{x(x-1)(x-2) \dots (x-y+1)}{y(y-1)(y-2) \dots 1} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

Тогда $y(y-1) = 30$, причем по условию $y > 4$ т.е. $y \geq 5$. Делители 30 больше 4: 5, 6 и 30.
 $y=5$ не подходит, как и $y=30$: $5 \cdot 4 \neq 30$, $30 \cdot 29 \neq 30$.
 Подходит $y=6$: $6 \cdot 5 = 30$.

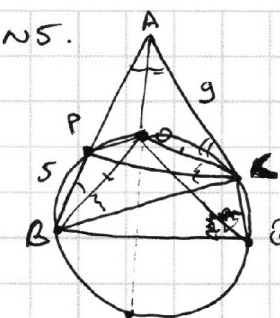
Ответ: 6

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Отметим точку $Q = AC \cap \omega_2$.

$$AP \cdot AB = \frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} = AC \cdot AQ = 9 \cdot AQ \quad \text{т.к. это секущие к } \omega_2.$$

$$AQ = \frac{125}{12} > 9 = AC.$$

Т.к. $\angle BPC = \angle BOC$ во вписанном 5-угольнике $APQC$,
 $\angle PAQC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - \angle BOC =$
 $= 180^\circ - \angle OBC + \angle OCB = 2\angle OCB.$

$$\angle PAC = \angle BAO + \angle OAC = \angle PBO + \angle OCA.$$

$$\angle ACP = 180^\circ - \angle PAC - \angle APC = 180^\circ - \angle PBO - \angle OCA -$$

$$- \angle OBC - \angle OCB = 180^\circ - \angle PBC - \angle OCA = \angle BAC,$$

поэтому $\frac{15}{2} = AP = PC$. Аналогично $AQ = QB = \frac{125}{12}$.

Обозначим $\angle PAO = \alpha$, $\angle OAC = \beta$.

Вд Тогда $\angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \alpha - \beta$.

По т. косинусов $AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\alpha + \beta) =$
 $= BC^2 = 81 + \frac{625}{4} - 2 \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cos(\alpha + \beta)$

По т. косинусов $\frac{AC}{\sin(90^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{AC}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{AC}{\cos \beta} = \frac{AB}{\cos \alpha} = \frac{9}{\cos \beta} = \frac{\frac{25}{2}}{2 \cos \alpha} =$
 $= \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{BC}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \frac{BC}{\frac{18}{2 \cdot 25} \cos \alpha + \frac{\sqrt{7 \cdot 43} \cdot 5}{5} \cos^2 \alpha} = \left(\frac{BC}{\cos \alpha \left(\frac{18}{25} \sin \alpha + \frac{5 \sqrt{7 \cdot 43}}{25} \cos \alpha \right)} \right)$

$$\cos \beta = \frac{18}{25} \cos \alpha$$

$$1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{18^2}{25^2} \cos^2 \alpha = \sin^2 \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{7 \cdot 43}}{5} \cos \alpha$$

$ABC =$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

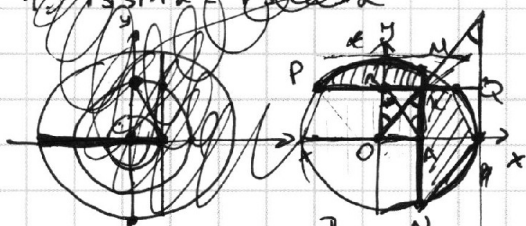
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$
 XY-гуга XY

Второе уравнение неравенство задаёт круг W_1 с центром в $O: (0,0)$ и радиусом 5.

Отметим точки $A(3\sqrt{2}\sin\alpha; 0)$, $B(0, 3\sqrt{2}\cos\alpha)$. Нарисуем также круги радиусом $3\sqrt{2}\sin\alpha$ и $3\sqrt{2}\cos\alpha$.

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$



Длина $AB = 3\sqrt{2}$, поэтому множество точек $(A; B)$ — окружность.

Отрезок AB скользит по осях с фиксированной длиной. Вопрос задать: какой максимальной периметр $\Phi(\alpha)$

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$
 (в зависимости от наклона AB)

Заметим, что M и N — пересечения перпендикуляра из A к Ox с окружностью W_1 , P и Q — из B к Oy с окружностью W_1 , причем PM и NQ являются частью периметра $\Phi(\alpha)$.

$MN + PQ = K$. Заметим, что $\angle PKN = \angle PKN = \angle MKQ = 360^\circ - \angle OKP - \angle OAK - \angle BOA =$

$\approx 90^\circ \Rightarrow$ сумма длин дуг PM и NQ — фиксированна, так как т.к. сумма соответствующих углов фиксированна.

Тогда сумма длин этих дуг равна $\frac{PM + NQ}{2} \cdot 2 = PM + NQ$, что равно 5π .

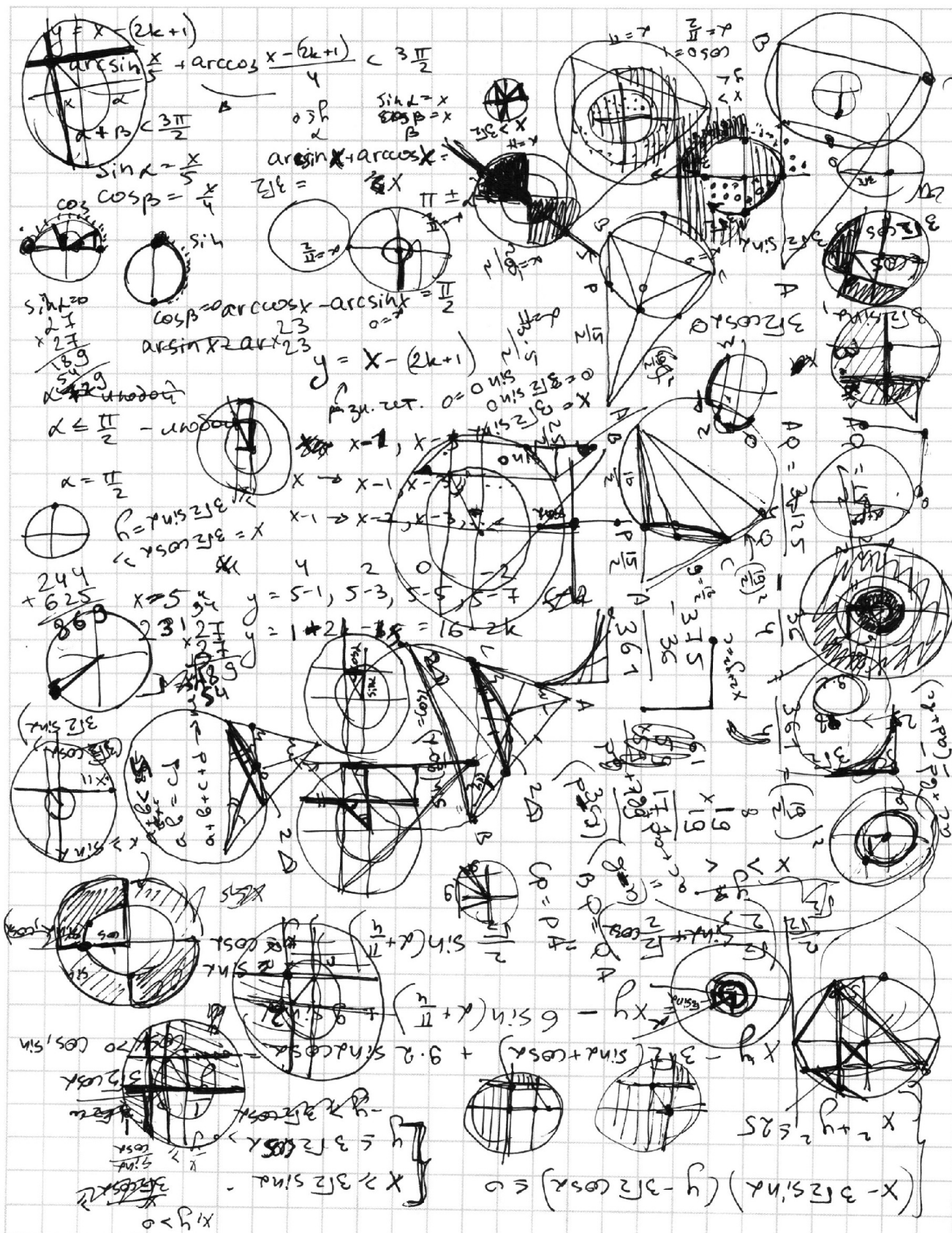
Теперь осталось найти максимум суммы $MN + PQ$.

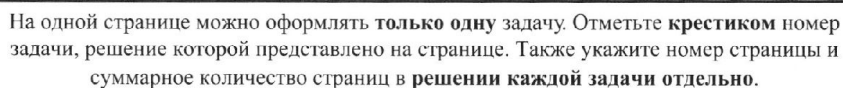
$\triangle OAKB$ — прямоугольник, поэтому $OK = BA$. Тогда $\frac{OA}{AK} = \sin \angle OKA$

$PK \cdot KQ = MK \cdot MN$, $PK + KQ \leq 10$, $MK + NM \leq 10$.

$(P+K)KQ = MK(AK+AN)$

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \rightarrow \text{при } x, y > 0 \quad \frac{x}{y} \leq \tan\alpha \cdot 3\sqrt{2} \\ \frac{1}{y} \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \rightarrow \text{при } x, y < 0 \quad \frac{x}{y} \geq \tan\alpha \end{cases}$$



[illegible]