



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Исходя из условия, $A = a \cdot 1111$, где a — цифра от 1 до 9. То есть $A = a \cdot 11 \cdot 101$.

Т.к. $A \cdot B \cdot C$ — квадрат натур. числа, то все простые входят в разложение четное количество раз.

101 — простое. Тогда ~~какое-то~~ какое-то из чисел

B или C делится на 101.

C — двузначное натуральное, поэтому не может делиться на 101.

Тогда B делится на 101. Т.к. B — трехзначное, то единственный возможный вариант $B = 101$. Заметим, что одна из цифр B — единица.

11 — простое $B/11$. Тогда $C : 11$ и ^{одна из цифр} ~~какая-то~~ C делится на 11 по условию. Тогда (C — двузначное) $C = 55$.

То есть $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 55 = n^2, n \in \mathbb{N}$.

Тогда $a : 5$, откуда $a = 5$. Отсюда
есть ответ.

Ответ: $A = 5555$
 $B = 101$
 $C = 55$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Запишем равенство, исходя из условия

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad \text{это}$$

умножим на

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \text{Т.к. по условию } x, y > 0, \text{ то } x+y+1 > 0.$$

тогда верно, что $xy = (x-3)(y+3)$.

$(x \neq 3, y \neq -3) (x \neq 0, y \neq 0)$. Тогда

$$xy = xy + 3x - 3y - 9, \text{ т.е. } 0 = x - y - 3, \text{ т.е.}$$

$$3 = x - y. \quad (1) \quad M = x^3 - y^3 - 9xy \stackrel{(1)}{=} (x-y)$$

$$\stackrel{(1)}{=} (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy \stackrel{(1)}{=} 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy \stackrel{(1)}{=} 3x^2 - 6xy + 3y^2$$

$$\stackrel{(1)}{=} 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x-y)^2 \stackrel{(1)}{=} 27. \quad \text{Таким}$$

образом достигается, например, при

$$x-y=3. \quad \text{Возьмем } y = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{10}{3}.$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) Уравнение из условия равносильно тому:
(раскрываем скобки и перенесем слагаемые)

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x$$

это равносильно

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$0 = \cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi x)$$

$$0 = 2 \cos \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2}$$

$$0 = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2}$$

тогда $\begin{cases} \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

то есть $\begin{cases} 3x - y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

откуда все не имеет.

Ответ: $\{y = t, t \in \mathbb{R}, x = \frac{1+2k}{3}, k \in \mathbb{Z}\},$

$\{y = t, t \in \mathbb{R}, x = 1+2k, k \in \mathbb{Z}\}.$

б) Тогда выражение было определено корректно, необходимо $\begin{cases} x \in [-1; 1] \\ y \in [-1; 1]. \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Отсюда $x \in [-4; 4]$, $y \in [-9; 9]$. Для таких x, y выражение $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \in [0; \pi]$, т.к. каждое из слагаемых лежит в $[0; \pi]$. Тогда для $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$ необходимо, чтобы $\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{cases}$.

Тогда $x \in [-4; 4]$, $y \in [-9; 9]$. Найдем все такие x, y — целые, удовлетворяющие условию из а). Будем перебирать по возможным x , вычисляя возможные y . Тогда $x+y$ даст четные числа, потому что x, y различаются четностью (или оба нечетные).

x	возм. y
4	9, 7, 5, 3, 1, -1... (все нечетные) (1)
3	8, 6, 4, 2, 0... (все четные) (2)
2	(1)
1	(2)
0	(1)
-1	(2)
-2	(1)
-3	(2)

$$4 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 72.$$

2) $3x - y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$. Аналогично б).

$3x$	возм. y
12	(все четные) (4) (или 9)
9	(все нечетные) (4) (или 9)
6	(3)
3	(4)
0	(3)
-3	(4)
-6	(3)
-9	(4)

$$4 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 72.$$

Итого все возможные значения



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Заметил, что ~~каждый~~ случаи 1 и 2
имеют общие карты x, y , т.е. пересекаются.
Тогда кол-во различных карт составила,
убрав повторение. Тогда ответ ~~ответ~~.
Ответ: 72.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть кол-во друзей у каждого из нас равно x . Тогда вероятности, что было выбрано 6 друзей равно P ,

$$P = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \quad \begin{array}{l} \text{гла. друга - Пете и Ваське} \\ \text{и Ваське} \end{array}$$

C_{x-2}^2 - число способов выбрать 2 друга из $x-2$ остальных друзей.
 C_x^4 - число способов выбрать 4 друга из x друзей.

C - потому что набор выбран.

Пусть в конце месяца было выбрано y друзей. Тогда вероятность того же события равна P_1 , $P_1 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_y^y}$ (аналогично)

Из y друзей, $\frac{7}{2}P = P_1$, то есть

$$\frac{7}{2} \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{C_{y-2}^{y-2}}{C_y^y}, \text{ что равносильно } \frac{7}{2} \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} = \frac{y!}{y!(x-y)!} \quad (*)$$

$$(*) \quad \frac{(x-2)!}{y!(x-y)!} = \frac{1}{x(x-1)}, \text{ т.е. } \frac{7}{2} \cdot \frac{12}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)} \text{ при } x \neq 0, x \neq 1$$

т.е. равносильно

$$42 = y(y-1) \Leftrightarrow (y+2)(y-7)(y+6) = 0.$$

Так $y > 0$, то $y = 7$. Проверим, что x можно выбрать больше 7, т.е. проверить x равно, например 20, что не все операции корректны. Отсюда все верно.
 Ответ: 7



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☐

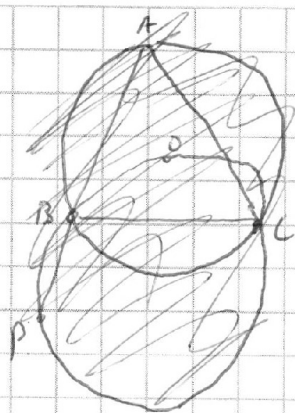
5 ☒

6 ☐

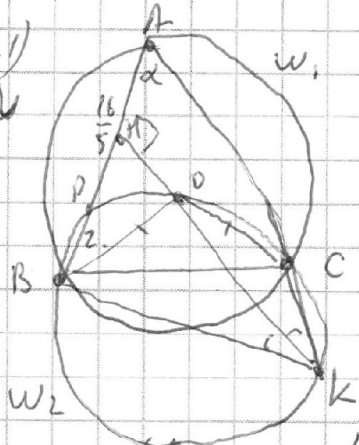
7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



(рис 1)



Заменим т.
о секущих для
из дуг-ти W_2 :

$AP \cdot AB = AC \cdot AK$

$$AP \cdot AB = AC \cdot AK$$

$$\text{т.е. } \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5} = 4 \cdot AK$$

картинка такая,

$$\text{откуда } AK = \frac{4 \cdot 26}{25} = 4,16$$

или (рис 1). Пусть $\angle BAC = \alpha$. Заметим,
это W_2 -кас. в W_2 , $BO = OC$, т.е. O -
центр дуг-ти W_1 . Тогда $\angle BKO = \angle CKO$ по

кас. в W_2 при $\angle KO = \angle CBO$ как
т.к. $\angle BOC = 2\angle BAC$, то $\angle CBO = 90^\circ - \alpha$. Пусть

$H = KO \cap AB$. Тогда по сумме $\angle$ в Δ ,
 $\angle AKH = 90^\circ$. Из ΔAKH , $\sin \alpha = \frac{KH}{AK}$. По т.

Пифагора для ΔAKH найдем AK :

$$KH^2 = AK^2 - AH^2$$

Заметим, что ΔBKA -
р/б, т.е. его выс. совп. с касат.

$$\text{Тогда } AK = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} = \frac{13}{5}$$

$$KH^2 = \left(\frac{4 \cdot 26}{25}\right)^2 - \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{13^2}{25} \cdot 39, \text{ т.е. } KH = \frac{13}{25} \sqrt{39}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{также } \sin \alpha = \frac{\frac{13}{25} \sqrt{39}}{\frac{4 \cdot 26}{25}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\text{Также } S_{ABC} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{26}{5} =$$

$$= \frac{26 \sqrt{39}}{20}$$

Ответ:

$$\frac{26 \sqrt{39}}{20}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

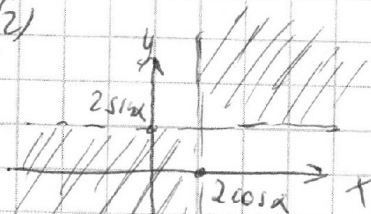
СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

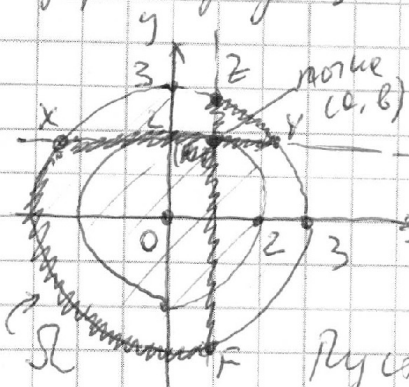
Для (1):



Будет где таме
область
(по методу
областей)

(пример, прямые $x = 2\cos\alpha$ и $2\sin\alpha$ могут располагаться (и по-другому от Ox и Oy)). Взаимно, что эти прямые

всегда $\perp$. Пусть $2\cos\alpha = a$, $2\sin\alpha = b$. Тогда $a^2 + b^2 = 4$. Т.е. точка (a, b) находится на окр-ти радиусом 2. (2) Значит круг радиусом 3 — см. рис:



Периметр фигуры $P(2)$

затрагиваем (часть).

(исходя из системы и вышеприведенных рассуждений)

Пусть X, Y, Z, F — точки пересечения

прямых $y = b$, $x = a$ с окр-тью S . (см. рис.)

В т.ч. $XY \perp ZF$, то сумма градусных мер дуг $\widehat{XF} + \widehat{ZF} = 180^\circ$. Т.к. не рассматривается от a, b .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

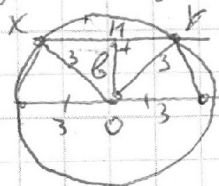
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда необходимо максимизировать сумму дуг хорд XV и ZF .



Так $XV \parallel OX$, то получаемся $\triangle XVH$ - прямоугольный, где H - середина XV тогда по т. Пифагора где $\triangle XHO$ получаем $XH = \sqrt{9-b^2}$, т.е. $XV = 2\sqrt{9-b^2}$. Аналогично $ZF = 2\sqrt{9-a^2}$.

$XV + ZF = 2(\sqrt{9-b^2} + \sqrt{9-a^2})$. Запомним, что то есть по формуле между ср. ариф. и ср. кв-ыми, $\frac{\sqrt{9-b^2} + \sqrt{9-a^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{(9-b^2) + (9-a^2)}{2}}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{18-(a^2+b^2)}{2}} = \sqrt{\frac{18-9}{2}} = \sqrt{7}$, причем равенство достигается при $\sqrt{9-b^2} = \sqrt{9-a^2}$, т.е. $a^2 = b^2$ (5).

Тогда $XV + ZF \leq 2(2\sqrt{7}) = 4\sqrt{7}$. Сумма дуг

$\widehat{XV} + \widehat{ZF} = \frac{2\pi \cdot 3}{2} = 3\pi$. Из (5), $\begin{cases} 2\cos\alpha = 2\sin\alpha \\ \text{(одн. зависимость)} \end{cases} \begin{cases} 2\cos\alpha = 2\sin\alpha \\ -2\cos\alpha = 2\sin\alpha \end{cases}$

то есть $\begin{cases} \cos\alpha = \sin\alpha & (6) \\ \cos\alpha = -\sin\alpha & (7) \end{cases}$

(6) $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. (7) $\Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Итак нам известен периметр $\Phi(\alpha)$ максимален, если α принимает значения $\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\varphi_{\max} = 3\pi + 2(\sqrt{9-e^2} + \sqrt{9-e^2}). \text{ При подстановке}$$

$$\alpha \quad a^2 = b^2 = 2. \text{ (т.е. } a^2 + b^2 = 4). \text{ Т.е.}$$

$$\varphi_{\max} = 3\pi + 2(\sqrt{9-2} + \sqrt{9-2}) = 3\pi + 4\sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } M = 3\pi + 4\sqrt{7}, \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

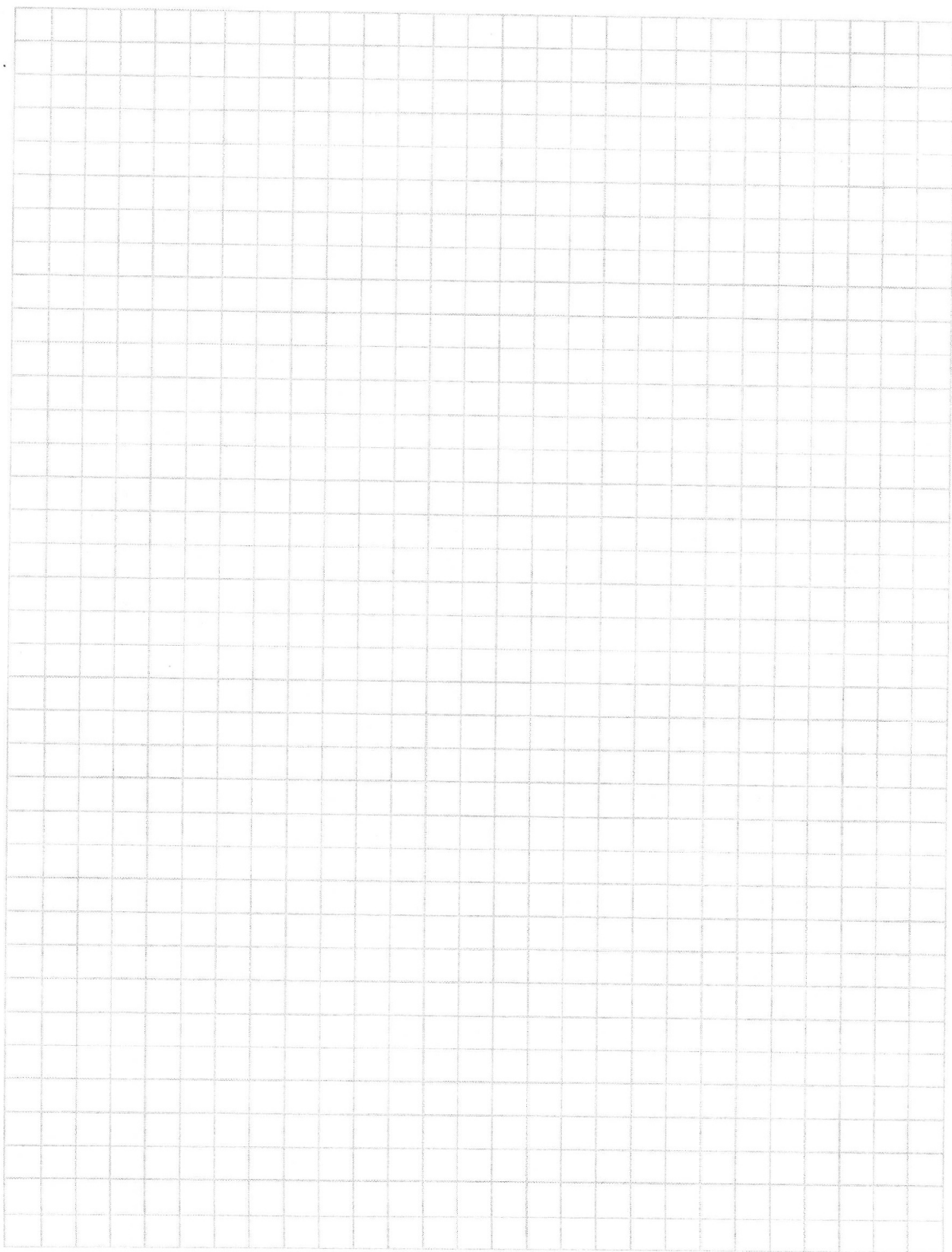


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A, B, C \in \mathbb{N}$$

$$A = \overline{aaaa}$$

в зап. В есть 1

трелзк

$$A \cdot B \cdot C = 11^2$$

$$a \in \overline{1 \dots 9}$$

в зап. C есть 5

гугзк

$$A = a \cdot \overline{11 \dots 11}$$

$$C: \overline{101}$$

$$B: \overline{101}$$

$$101$$

$$B: \overline{101}$$

$$\begin{array}{r} 111 \overline{) 11} \\ 11 \overline{) 11} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$1101$$

$$B = 101$$

$$C: \overline{11}$$

$$\overline{55}$$

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 55$$

$$a = 5$$

$$\sqrt{55} = 7.416$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 101 \\ \hline 11 \\ 00 \\ 11 \\ \hline 1111 \end{array}$$

N_2

$$x, y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy}$$

$$\frac{1}{x} \left(\frac{1}{y} + 1 \right) + \frac{1}{y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+y}{y} + \frac{1}{y} = \frac{1+y}{xy} + \frac{1}{y} = \frac{1+y+1}{xy} = \frac{2+y}{xy}$$

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{a-3} = \frac{1}{b} = \frac{1}{1-3a}$$

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{a-3} = \frac{1}{b} = \frac{1}{1-3a}$$

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{a-3} = \frac{1}{b} = \frac{1}{1-3a}$$

$$\sin^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos^2 \pi y + \sin^2 \pi y$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(2\pi y)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\theta = \cos(\pi x - \pi y) \neq \cos(2\pi x) \quad \theta = \cos \frac{\pi x - \pi y + 2\pi x}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y - 2\pi x}{2}$$

$$\theta = \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \quad 1) \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$\oplus$

$$1) \cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad 3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k$$

$\frac{64}{25}$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi h$$

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi h \quad |x+y=1+2h|$$

$$y \in \mathbb{R}, \quad x = \frac{1+2k+y}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{64}{25} \cdot 2^2 \cdot 438$$

$$132 \cdot 25$$

$$x = \frac{1+2k+y}{3}$$

$$64-20$$

$$\frac{44}{5} = 39$$

$$\frac{132}{252} (64-25)$$

$$\frac{564}{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x^3 - y^3 - 9xy$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{(x-3) + (y+3) + (x-3)(y+3)}{(x-3)(y+3)}$$

$$(x+y+1)(x-3)(y+3) = (x-3)(y+3)$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$1) x+y+1=0$$

$$x, y \geq 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$2) xy = (x-3)(y+3)$$

$$(x-y)((x+y)^2 - 2xy) - 9xy$$

$$xy - 3x - 3y + 9$$

$$0 = x - y - 3$$

$$\frac{x}{xy} = \frac{x}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$y = 3 - x$$

$$x(3-x) = (x-3)(6-x)$$

$$x \geq 3$$

$$x \geq 6$$

$$x \geq 3$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$x(3-x) = (x-3)(6-x)$$

$$x = 3 - x$$

$$x, y \geq 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x^3 - y^3 - 9xy$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$x+y+1 > 1$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$0 = x - y - 3$$

$$3 = x - y$$

$$x^2 - y^2 - 9xy =$$

$$3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= 3(x-y)^2 =$$

$$3 = x - y$$

$$y+3 = x$$

10



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$y > 4$ x отрицат.

$P = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2! (x-4)!} \cdot \frac{4! (x-4)!}{x!} = \frac{12}{(x-1)x}$

$\frac{12}{(x-1)x} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(y-2)! x (x-1)}$

$(y-2)! = \frac{7}{24}$

$y > 4$ x отриц.

$3,5P = P_1$

$P_1 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{(x-2)!}{(y-2)! (x-y)!} \cdot \frac{y! (x-y)!}{x!} = \frac{(y-1)y}{(x-1)x}$

$\frac{7}{2} \cdot \frac{12}{24} = \frac{(y-1)y}{(x-1)x}$

$7 \cdot 6 = (y-1)y$

$0 = y^2 - y - 42$

$(y-7)(y+6) = 0$ $y = 7$

$x = 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$

$9 - 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7$

$9 - 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8$

72 -



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

