



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача ①

Рассмотрим, какие значения может принимать число A : это $1111, 2222, 3333, \dots, 9999$. Каждое из этих чисел представимо в виде $n \cdot 11 \cdot 101$, где n — это натуральное число от 1 до 9. Заметим, что т.к. $A \cdot B \cdot C$ — квадрат натурального числа, то в разложении $A \cdot B \cdot C$ на простые $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ все степени α_i — четные. В разложении $A \cdot B \cdot C$ входит 101 в четной степени, причем в A 101 входит в степени 1, в C 101 входит в степени 0 (с двузнач.) $\Rightarrow 101$ входит в B в степени 1 (хотя бы в трехзнач.), но по условию $\sqrt{}$ одна из цифр B — это 6 $\Rightarrow B$ определяется единственным образом: $B = 606$. Заметим также, что 11 входит в A в степени 1, в B не входит $\Rightarrow C \equiv 11$, но C — двузнач. число, $\sqrt{}$ одна из цифр которого 3 $\Rightarrow C = 33$. Итого $A \cdot B \cdot C = (n \cdot 11 \cdot 101) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 101) \cdot (3 \cdot 11) = 11^2 \cdot 3^2 \cdot 101^2 \cdot n \cdot 2 \Rightarrow n$ должно быть представимо в виде квадрата $\cdot 2$, $n \in [1; 9] \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$0 \Rightarrow n \in \{2; 8\} \Rightarrow A = 2222 \text{ или } 8888.$$

Ответ: $(2222; 606; 33)$ и $(8888; 606; 33)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача ②

По условию $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$(x+y+5) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)} \right) = 0$$

$$\begin{cases} x+y+5 = 0 & (1) \\ xy = (x-2)(y+2) & (2) \end{cases}$$

(1): Это невозможно, т.к. $x, y > 0 \Rightarrow x+y+5 > 5$.

(2): $xy = xy + 2x - 2y - 4$
 $2 = x - y$ — запомнили это.

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = \\ &= (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 6xy = 2(4 + 3xy) - 6xy = 8. \end{aligned}$$

Ответ: $M = 8$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = 0$$

$$- \cos 2\pi x + \cos (\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos 2\pi x = \cos (\pi x - \pi y)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi n & n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi \times = \pi y - \pi x + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi x = -\pi y + 2\pi n \\ 3\pi x = \pi y + 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y + 2n \\ 3x = y + 2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 2n \\ y = 3x - 2n \end{cases}$$

Ответ: эти пары вида $(x; -x + 2n)$ и $(x; 3x - 2n)$, где $n \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача (4)

Найдем вероятность, что Петя и Васа попадут на концерт в начале месяца. Благоприятные исходы - выбирают 4 человек, 2 из которых - Петя и Васа. Пусть k - кол-во 11-классников.

Тогда кол-во способов так выбрать C_{k-2}^2

(кол-во способов выбрать 2 человек кроме Пети и Васи). Кол-во исходов всего = кол-во способов выбрать 4 человек из k (которым достанутся билеты) = C_k^4 . Вероятность ~~Рн~~ $P_n = \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$.

Пусть выданы дополнительно n билетов.

Благоприятные исходы в конце месяца - это исходы, когда выбрали $4+n$ человек, 2 из которых Петя и Васа. Кол-во способов выбрать $n+2$ человека из $k-2$ (не Петя и Васа) - C_{k-2}^{n+2} .

Кол-во исходов всего в конце месяца =

кол-во способов выбрать $(4+n)$ человек из $k = C_k^{n+4}$.

Вероятность в конце $P_k = \frac{C_{k-2}^{n+2}}{C_k^{n+4}} \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ → Т.к. мы знаем, что $6P_n = P_k$, то:

$$6 \cdot \frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{C_{k-2}^{n+2}}{C_k^{n+4}}$$

$$6 \cdot \frac{(k-2)!}{2!(k-4)!} = \frac{(k-2)!}{(n+2)!(k-n-4)!}$$
$$\frac{6 \cdot 4!}{2!} = \frac{(n+4)!}{(n+2)!}$$

$$72 = (n+4)(n+3)$$
$$72 = n^2 + 7n + 12$$
$$n^2 + 7n - 60 = 0$$
$$(n-5)(n+12) = 0$$

Т.к. n - кол-во билетов, которые добавили,
то $n \in \mathbb{N}$ по условию задачи $\Rightarrow n+12 > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n=5$ - ед. значение $\Rightarrow$ всего в конце
месяца было продано 9 билетов.

Ответ: 9.

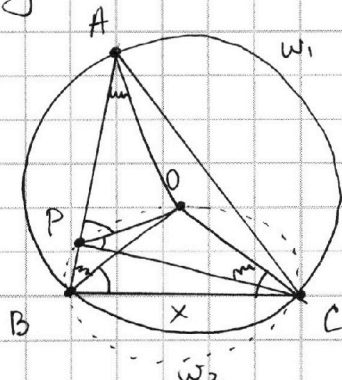


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

о) $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$, $BC = x$.1) O - центр опис. окр. $\Rightarrow$ $OA = OB = OC \Rightarrow \triangle AOB$ и $\triangle BOC$ - $p/s \Rightarrow \angle BAO = \angle ABO = \angle PCO$ (т.к. $BPOC$ - впис.) и $\angle OBC = \angle OCB = \angle APO = \angle OPC$ (т.к. $BPOC$ - впис.).

Значит, $\triangle APO = \triangle CPO$ по II п.р.т (имеют общую сторону, все углы соответственно равны)

 $\Rightarrow AP = PC$.

2) Пусть $\angle APC = \alpha$, тогда $\angle BPC = 180^\circ - \alpha$. Запишем теорему косинусов для $\triangle APC$ и $\triangle BPC$:

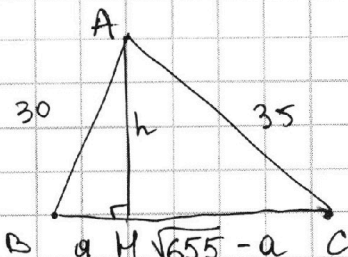
$$\begin{cases} BC^2 = BP^2 + PC^2 + 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos \alpha \\ AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 25 + 625 + 2 \cdot 5 \cdot 25 \cdot \cos \alpha \\ 1225 = 625 + 625 - 2 \cdot 625 \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 650 + 250 \cos \alpha \\ 245 = 250 - 250 \cos \alpha \end{cases} \quad \oplus \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 245 = 900 \\ x^2 = 655 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = x = \sqrt{655}$$

$$\Rightarrow BC = x = \sqrt{655}$$



3) Проведем высоту AM , $\triangle ABC$ - остроуг. $\Rightarrow BM = a > 0$, $MC = \sqrt{655} - a > 0$, $BM = h$. $\Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) => Запишем теорему Пифагора для

$\triangle BHA$ и $\triangle CHA$:

$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 900 \\ 655 + a^2 - 2\sqrt{655}a + h^2 = 1225 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 655 - 2\sqrt{655}a = 325$$

$$2\sqrt{655}a = 330$$

$$\sqrt{655}a = 165$$

$$a = \frac{165}{\sqrt{655}} \Rightarrow a^2 = \frac{165^2}{655}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{900 - \frac{165^2}{655}} = \sqrt{\frac{589500 - 24225}{655}} =$$

$$= \sqrt{\frac{562175}{655}} = \sqrt{\frac{112435}{131}}$$

$$\begin{aligned} 4) S_{ABC} &= \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{h \cdot x}{2} = \frac{655 \cdot \sqrt{\frac{112435}{131}}}{2} = \frac{\sqrt{655^3 \cdot 112435}}{\sqrt{131} \cdot 2} = \\ &= \frac{\sqrt{655 \cdot 5 \cdot 112435}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{368224625}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

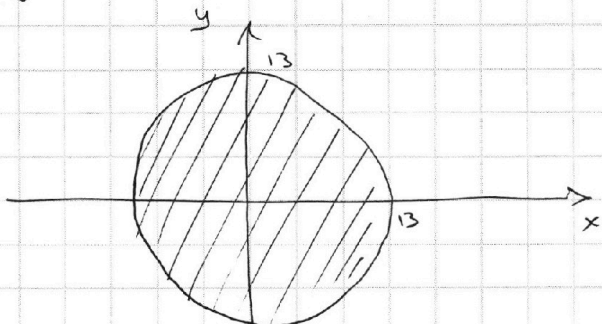
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

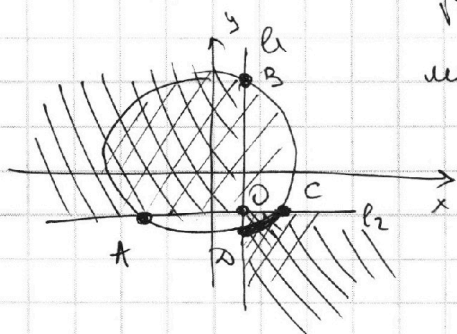
Задача 6

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

(2): Это ~~кружок~~ круг с центром $(0; 0)$ и радиусом 13:



(1): Это 2 области огр. прямыми $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$, $x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$:



При этом прямые l_1 и l_2 могут двигаться вдоль осей в зависимости от значений α .

Область на рисунке.

Мы хотим макс. периметр. Заметим, что

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC} = \text{const} = \frac{2\pi R}{2} = 13\pi \quad (\text{т.к. } \angle AOB = \angle DOC = 90^\circ \Rightarrow \angle AOB = (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC})/2)$$

Значит, нам нужно максимизировать

$AC + DB$. Заметим, что если опустить



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

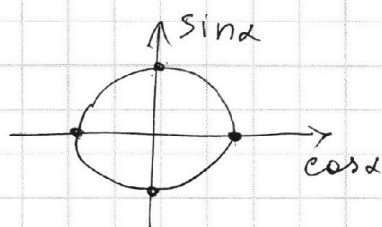
⑥ $AC \perp O_x$ и $BD \perp O_y$, то тем больше

$AC + 2B$. $\Rightarrow$ будем ~~минимизировать~~

минимизировать $|\sin \alpha| + |\cos \alpha|$.

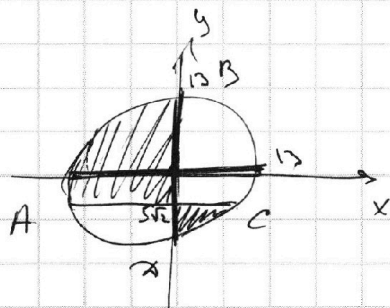
$$|\sin \alpha| + |\cos \alpha| \geq 1 \Rightarrow \text{либо } |\sin \alpha| = 1,$$

$$\text{либо } |\cos \alpha| = 0, \text{ либо } |\sin \alpha| = 0, |\cos \alpha| = 1$$

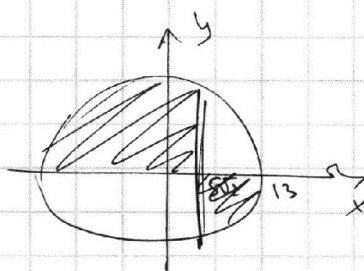


$$\alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Если $\cos \alpha = 0$:



Если $\sin \alpha = 0$



Случаи симметричны, периметр в обоих случаях одинаков и тот же.

$$P = \overset{\sim}{AB} + \overset{\sim}{BC} + 2 \cdot 13 + AC = 13\pi + 26 + AC.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

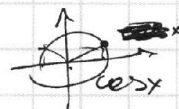
$$\sqrt{3} \quad (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = 0$$

$$\cos(2\pi x) \qquad \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi - \pi y + \pi x)$$



$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi y + \pi x + 2\pi n \\ 2\pi x = -\pi + \pi y - \pi x + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y + 2n \\ 3x = -1 + y + 2n \end{cases}$$

$$x - x + 2n = 3x + x - 2n$$

$$4x = 4n$$

$$x = n$$

$$\begin{cases} y = 1 - x + 2n \\ y = 3x + 1 - 2n \end{cases}$$

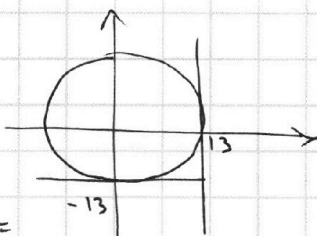
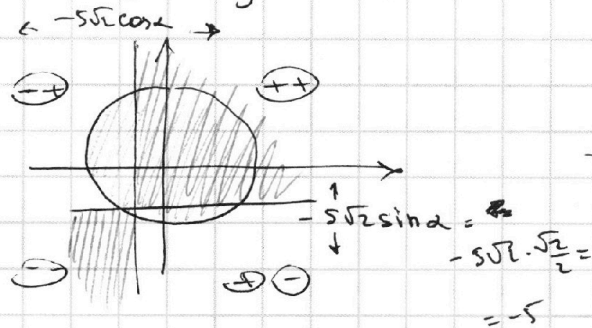
$$(x, 1 - x + 2n) \text{ и } (x, 3x + 1 - 2n)$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

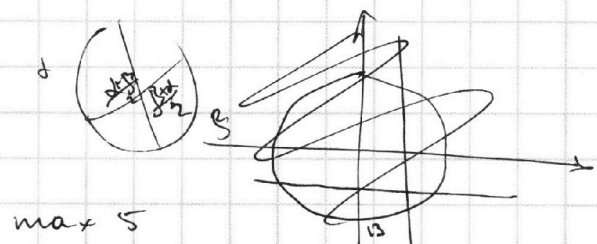
$$\sqrt{6} \quad \begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$ знаков



$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} \cos \alpha &= 13 \\ 5\sqrt{2} \sin \alpha &= 13 \\ \cos \alpha &= -\frac{13}{5\sqrt{2}} \\ \sin \alpha &= \frac{13}{5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{169}{25 \cdot 2} + \frac{169}{25 \cdot 2} = 1$$



$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} \cos \alpha &\text{ max } 5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \sin \alpha &\text{ min } -5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = -1$$

$$\sin \alpha = 1$$

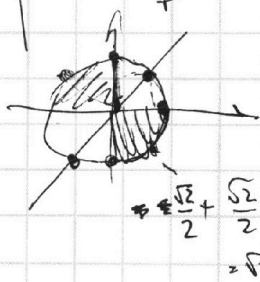
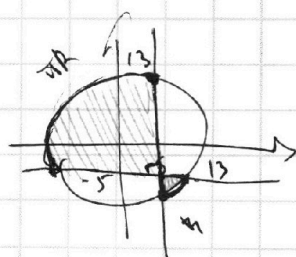
$$5\sqrt{2} (\sin \alpha - \cos \alpha) \rightarrow \text{max}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha \rightarrow \text{max}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \text{max}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha + \text{max}$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

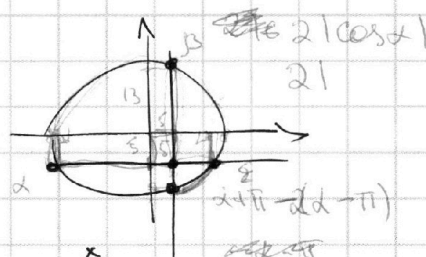
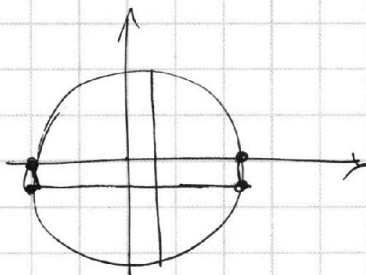
У1

$$A \cdot B \cdot C = x^2$$

$$A > B > C$$

либо A, B, C - квадраты
либо 1 из чисел - квадрат
либо $(A, B, C) \neq 1$

1111
2222
3333
4444
5555
6666
7777
8888
9999



У2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 6xy = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 6xy$$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy}$$

$$\frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\begin{cases} x+y+5=0 \\ xy=(x-2)(y+2) \end{cases}$$

$$\rightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4$$

$$x - y = 2$$

$$\begin{cases} y = -x - 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^3 + (x+5)^3 + 6x(x+5) &= x^3 + x^3 + 3x^2 \cdot 5 + 3x \cdot 25 + 125 + \\ &+ 6x^2 + 30x = \\ &= 2x^3 + 21x^2 + 105x + 125 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+7} + \frac{5}{(x-2)(x+7)}$$

$$x+7 - x+2 = 5$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x - y = 2$$

$$2(2^2 + 3xy) - 6xy = 8$$

$$\begin{array}{r} 655 \\ 5 \overline{) 3275} \\ \underline{3275} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112435 \\ 5 \overline{) 3275} \\ \underline{3275} \\ 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

~~$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$~~

~~$$x + y = 0 \text{ или } \pi$$~~

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\sin \pi x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-y)\right) = \frac{1}{2} (\sin(\pi x + \frac{\pi}{2}(x-y)) + \sin(\pi x - \frac{\pi}{2}(x-y)))$$

$$\sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \pi x = \frac{1}{2} (\sin(\pi x + \frac{\pi}{2}(y-x)) + \sin(-\pi x + \frac{\pi}{2}(y-x)))$$

$$\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$$

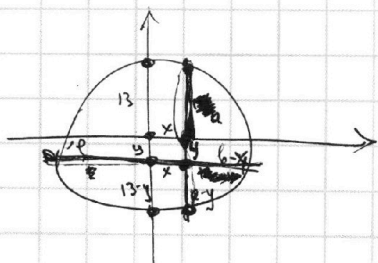
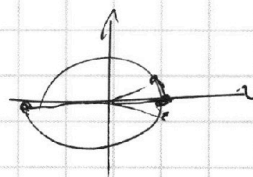
$$\alpha = 0 \text{ или } \pi$$

~~$$\sin(x-y) = 0$$~~

$$\pi x + \frac{\pi}{2}(x-y) = \pi n$$

$$x + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = n$$

$$3x - y = 2n$$

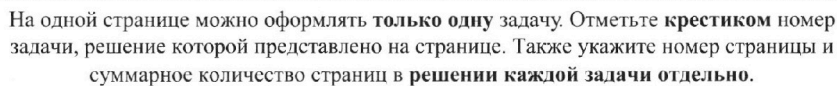


$$\max(a+y, a-y)$$

$$(a+y)(a-y) = (b+x)(b-x)$$

$$a^2 - y^2 = b^2 - x^2$$

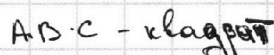
$$a^2 - b^2 + x^2 - y^2 = 0$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$



A B C - wh.

1111
~~2222~~
~~3333~~
4444
5555
6666
~~7777~~
~~8888~~
9999

1
4
5
6
5

1, 4, 5, 6, 9

$$\begin{array}{r} 9999 \overline{) 2} \\ 3333 \end{array}$$
$$9999 = 9.1111$$
$$11 \cdot 12 = 12 \cdot 10 + 11 = 12 \cdot 10 + 11$$

11.101
2.11.101
3.11.101

9.11.101 • L • L

101. k

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 11 \\ \hline 100 \\ + 100 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 2 \\ \hline 202 \\ 202 \\ 404 \\ 505 \\ 606 \\ 707 \\ 808 \end{array}$$
$$13 \cdot 8 = 80 + 24 = 104$$

1 7 3 4 5 6 ~~7 8 9~~
7 8 9

$$n \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11$$
$$11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot n = n$$

2, 8

$$\begin{array}{r} 1124 \\ - 1048 \\ \hline 76 \end{array}$$

25/11/11

29

...

10-10
L R A

$$\begin{array}{r} 763 \\ - 655 \\ \hline 108 \end{array}$$

655

131.5

$$\begin{array}{r} 1310 \\ - 1085 \\ \hline \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 k - кон-во орг.-ов, Δ - выданных еще

$$C_k^4 = \frac{6^4}{C_k^4} = \frac{2}{C_k^{4+\Delta}}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{6}{4!(k-4)!} = \frac{1}{4!(k+\Delta-4)!}$$

1 2 3 4 5 6 7

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$24 \times 6 = 20 \cdot 6 + 24 = 144$$

$$\frac{144}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = \frac{1}{(k+\Delta)(k+\Delta-1)(k+\Delta-2)(k+\Delta-3)}$$

$$144(k+\Delta)(k+\Delta-1)(k+\Delta-2)(k+\Delta-3) = k(k-1)(k-2)(k-3)$$

$$C_k^4 = 6 \cdot C_k^{4+\Delta}$$

$$\frac{6}{4!(k-4)!} = 6 \cdot \frac{1}{(4+\Delta)!(k-4-\Delta)!}$$

$$(4+\Delta)!(k-4-\Delta)! = 144(k-4)!$$

$$\frac{C_k^2}{C_k^4} = \frac{C_k^{2+\Delta}}{C_k^4}$$

$$\frac{C_k^2}{C_k^4} = \frac{C_k^{2+\Delta}}{C_k^4}$$

$$6 \cdot \frac{C_k^{2-2}}{C_k^4} = \frac{C_k^{2+\Delta}}{C_k^{4+\Delta}}$$

$$6 \cdot \frac{(k-2)!}{2! \cdot (k-4)!} = \frac{(k-2)!}{(2+\Delta)!(k-4-\Delta)!}$$

$$\frac{1}{7!} = \frac{(2+\Delta)!}{(4+\Delta)!}$$

$$8 = \Delta^2 + 7\Delta + 12$$

$$3 \cdot 4! = 3 \cdot 24 = 60 + 1$$

$$72 = \Delta^2 + 7\Delta + 12$$

$$\Delta^2 + 7\Delta - 60 = 0$$

$$\Delta = 5$$

$$\Delta = 5$$

$$4+5=9$$

$$3 \cdot 24 = 60 + 1$$



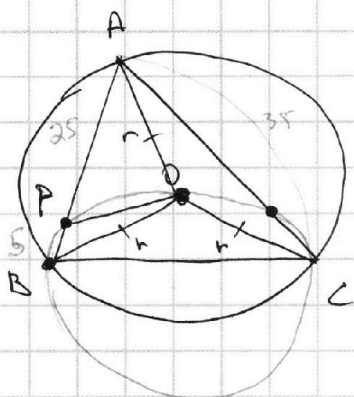
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

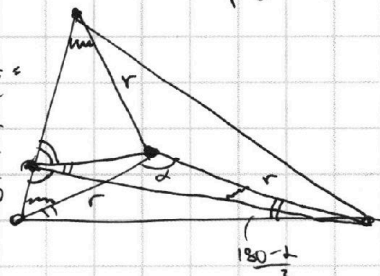
25



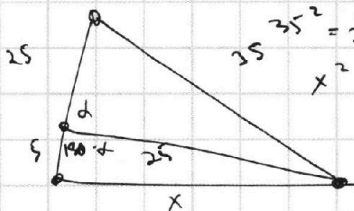
SABC - ?

PC = 25

$$\alpha = \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$



$$\begin{array}{r} 1315 \\ \times 655 \\ \hline \end{array}$$



$$35^2 = 25^2 + 25^2 - 2 \cdot 25^2 \cos \alpha$$
$$x^2 = 25^2 + 25^2 + 2 \cdot 25 \cdot 25 \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 = 25^2 + 25^2 + \frac{2 \cdot 25^2 - 35^2}{5}$$

$$x^2 = 25^2 + 25^2 + \frac{25}{8} = 30 + 25^2 = 655$$

$$35^2 = 2 \cdot 25^2 (1 - \cos \alpha)$$

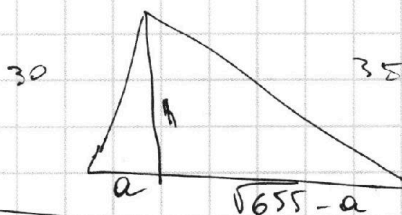
$$1 - \cos \alpha = \frac{35^2}{2 \cdot 25^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 25^2 - 35^2}{2 \cdot 25^2}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 1225 \\ \hline 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1225 \overline{) 245} \\ \underline{10} \\ 22 \\ \underline{20} \\ 25 \end{array}$$



$$\begin{cases} h^2 + a^2 = 900 \\ h^2 + 655 + a^2 - 2\sqrt{655}a = 1225 \end{cases}$$
$$\begin{array}{r} 655 \\ \times 25 \\ \hline 325 \\ \hline 330 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 655 \overline{) 131} \\ \underline{5} \\ 15 \\ \underline{15} \\ 05 \end{array}$$

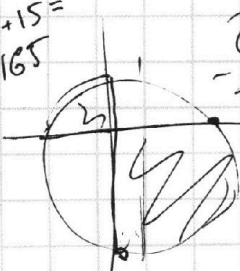
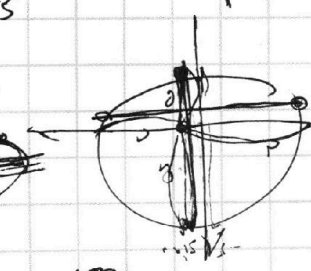
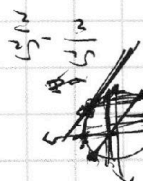
$$x = p + q + r + w$$

$$p + q = 90$$

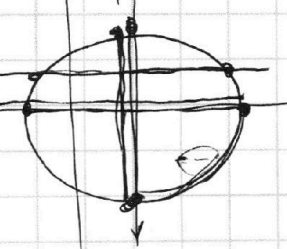
$$150 + 15 = 165$$

$$625 \cdot 2 \overline{) 125} \quad \begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ \hline 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \overline{) 1225} \\ \underline{10} \\ 22 \\ \underline{20} \\ 25 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 625 \overline{) 125} \\ \underline{5} \\ 12 \\ \underline{10} \\ 25 \end{array}$$



$$p = 100$$

$$p = 115$$

$$\begin{array}{r} 911 \\ 900 \\ \underline{245} \\ 655 \end{array}$$

