



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. м.к. по условию $A = \overline{aaaa}$, где a -

какая-то цифра ≤ 9 . Это заменим, что

$$\overline{aaaa} = 11 \cdot a \cdot 101. \Rightarrow A : 11, 101, a$$

м.к. $101 \nmid 11$ и $a \nmid 11$, м.к. $a \leq 9$, но и

$A \cdot B \cdot C \leq 10^7$, то 11 входит в $A \cdot B \cdot C$

в четной степени $\Rightarrow \begin{cases} B : 11 \\ C : 11 \end{cases}$. А именно

$$\begin{cases} B : 101 \\ C : 101 \end{cases}$$

(м.к. 101 - простое) ~~мы уже знаем~~

(м.к. $11 \nmid 101$)

$$\text{если } \begin{cases} B : 101 \\ B : 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B : 1111 \Rightarrow B \geq 1111, \text{ но } B \leq 999 \text{ но}$$

$$\text{по условию } \Rightarrow \begin{cases} B : 101 \\ C : 11 \end{cases}, \text{ м.к. } C \nmid 101, \text{ поэтому}$$

$C \leq 99$ по условию. т.к. $C : 11$ и сама C

одна из цифр 5 , но $5 \nmid C = 55$. А именно

$B = 101$, м.к. все числа делят $101 \cdot a$, где $a \in \{1, 9\}$

равно $101 \Rightarrow$ в числе есть цифра 1 ~~и~~

$$\text{можно если } B = 101. \Rightarrow B \cdot C \cdot A = 101 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11 \cdot a =$$

$$= 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5a. \text{ Это число является квадратом только}$$

при $a = 5$, м.к. $1 \leq a \leq 9 \Rightarrow A = 5555$. Ответ: $(5555, 101, 55)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда в этом случае M принимаем все значения, кроме 89.

$$(2) \quad \begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ x \neq 0, 3; y \neq 0, -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = xy - 3y + 3x - 9 \\ x \neq 0, 3; y \neq 0, -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(y-x) = -9 \\ x \neq 0, 3; y \neq 0, -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x = -3 \\ x \neq 0, 3; y \neq 0, -3 \end{cases} \Rightarrow y = x-3 \quad x = y+3$$

подставим в M :

$$\begin{aligned} & (x-3)(y+3) - y^3 - 9xy(y+3) = \\ & = (y+3-3)(y+3) - y^3 - 9y(y+3) = \\ & = y^2 + 3y + 3y^2 + 9 - y^3 - 9y^2 - 27y = -y^3 - 6y^2 - 24y + 9 \end{aligned}$$

так как выражение, которое мы получили, принимает значения, отличные от 89, т.е. все значения 89 мы можем исключить.

$$\Rightarrow 89 = -y^3 - 6y^2 - 24y + 9 \Leftrightarrow y^3 + 6y^2 + 24y - 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 6y^2 + 24y - 80 = 0, \quad \Delta = 81 - 4 \cdot 6 \cdot 80 < 0 \Rightarrow \text{такого } y \text{ нет}$$

$\Rightarrow M$ не в обоих случаях не принимает значения 89.

Ответ: $(-\infty; 89) \cup (89; +\infty)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

по условию $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

(=)

$$\begin{cases} y+x+1=0 & (1) \\ x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq 3, y \neq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = (x-3)(y+3) & (2) \\ x \neq 0, 3 \\ y \neq 0, -3 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x = -1-y \\ x \neq 0, 3 \\ y \neq 0, -3 \end{cases}$$

тогда $M = x^3 - y^3 - 3xy =$

$$= -(1+y)^3 - y^3 + 3y(1+y) = -1 - 3y^2 - 3y - y^3 - y^3 + 3y + 3y^2 =$$

$$= -2y^3 + 6y^2 + 6y - 1. \text{ мы получили кубический многочлен}$$

3 степени с 2 выделенными корнями 0, -3

при $y=0$ $M=-1$, при $y=-3$ $M=2 \cdot 27 + 6 \cdot 9 - 6 \cdot 3 - 1 = 89$

как известно, кубический многочлен 3-ей степени имеет максимум 3 различных корня, поэтому мы эту функцию



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В этом случае принимаем все значения, кроме тех, которые ~~ограничены~~ ~~ограничены~~ в условии

найдем $-2y' + 5y^2 + 5y - 1 = f(y)$. Тогда

$$x'(y) = -5y^2 + 12y + 6 = -5(y^2 - 2.4y - 1.2)$$

В ~~этом~~ ~~случае~~ ~~мы~~ ~~имеем~~ ~~3~~ ~~степени~~, но мы принимаем всевозможные значения, кроме, может быть, выделенных точек.

найдем $f(y) = -2y' + 5y^2 + 5y - 1$

$$f(y) = -1 \Rightarrow -1 = -2y' + 5y^2 + 5y - 1 \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ -2y' + 5y + 6 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ -y^2 + 3y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{н.е. исследуем}$$

$-y^2 + 3y + 3$ имеет 2 корня, причем они отличны от 0:

т.е. значение -1 не-е можем принимать,

при $f(y) = 0 \Rightarrow -2y' + 5y^2 + 5y - 1 = 0 \Rightarrow y' - 3y^2 - 5y + 4.5 = 0 \quad (1)$

мы знаем, что $y = 3$ - корень. $(1) \Rightarrow (y + 3)(y^2 - 5y + 1.5) = 0$

$y = 0$ $y^2 - 5y + 1.5 = 0$ два корня, т.е. $\Delta = 36 - 60 < 0$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

натур. Попробуем, когда это может:

$$\begin{cases} \arcsin \frac{y+1-2k}{12} = -\frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{z}{3} = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{aligned} L=1 \quad & \begin{cases} \frac{y+1-2k}{12} = -1 \\ \frac{z}{3} = -1 \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} y = -12+2k-1 \\ z = -9 \end{cases} \quad (=) \end{aligned}$$

$$L=2 \quad \begin{cases} k=2 \\ z=-9 \end{cases} \quad \text{но } \text{натур. } \text{Попробуем}$$

при $k=2$ можем найти z . Попробуем задаться
свернем к нулю, тогда найдем все
генер. рен. системы:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \leq \frac{y-1-2k}{12} \leq \frac{28}{3} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y-1-2k}{12} &= x \\ -10 \leq k \leq 11 \\ k &\neq 2 \\ -9 \leq z \leq 9 \end{aligned}$$

при $x=-2$ $y = 2k-21$. в силу от y не зависит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
5 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и получаем, что это пер-во верно по 0/3
если кроме этого $\begin{cases} -y-1+2k=-4 \\ y=-3 \end{cases} \quad (2)$

$\Rightarrow \begin{cases} k=-6 \\ y=-3 \end{cases}$ ~~определим~~ $\{$

оп. на k: $\begin{cases} -4 \leq -y-1+2k \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq y-1+2k \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases}$

$\Rightarrow -13 \leq -1+2k \leq 13 \Rightarrow -6 \leq k \leq 7$

и опр. (1) имеет смысл:

$\begin{cases} x=-y-1+2k \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \\ -6 \leq k \leq 7 \\ k \neq 6 \\ y \neq -9 \end{cases}$ и определяем систему $\begin{cases} k=6 \\ y=-9 \end{cases}$

$x=-4 \Rightarrow y=-3+2k-1 \Rightarrow k=-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$

$\Rightarrow y=-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$

Поэтому, что при будет получены
определенные пер. и пер. $\&$ из обеих систем



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Иск

~~Иск $x = -2, 0, 2, 4$~~

$$4 \cdot 10 (\text{при } x = [-2; 0; 2; 4]) + 4 \cdot 9 (\text{при } x = [-3; -1; 1; 3])$$

$$+ 9 (\text{при } x = -4) = 40 + 36 + 9 = 85$$

ответ, ⁸⁵ 85 нум.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В силу определений $\arccos$ имеем:

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{y+1-2k}{12} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13 \leq y-2k \leq 11 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2) \quad \begin{cases} -13 \leq y-2k \leq 11 \\ -9 \leq -2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow -22 \leq -2k \leq 20 \quad (2)$$

$$(3) \quad -10 \leq k \leq 11.$$

$$\arccos \frac{y+1-2k}{12} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \quad (4)$$

$$(5) \quad \arccos \frac{y+1-2k}{12} + \arccos \frac{y}{9} < \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$(6) \quad \arccos \frac{y+1-2k}{12} + \arccos \frac{y}{9} < \pi + \arccos \frac{y+1-2k}{12} + \arccos \frac{y+1-2k}{12} + \arccos \frac{y}{9} + \arccos \frac{y}{9} < \pi,$$

$$(7) \quad \arccos \frac{y+1-2k}{12} + \arccos \frac{y}{9} > -\pi.$$

Из определений $\arccos$ мы знаем, что $\arccos$ принимает значения $\in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сумма двух $\arccos$ больше $-\pi$ в любом случае, кроме того, ^{когда} ~~тогда~~ $\arccos$ оба равны $-\frac{\pi}{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3} \quad a) \quad (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \quad (1)$$

$$(1) \quad \sin^2 \pi x - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x \quad (2)$$

$$(2) \quad -(\sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x) = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x \quad (3)$$

$$(3) \quad -\cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi x \quad (4) \quad -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi x + \pi y\right) = \cos 2\pi x$$

$$(4) \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \pi x - \pi y\right) = \cos 2\pi x \quad (5) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi x + \pi y\right) = \cos 2\pi x$$

$$(5) \quad \cos(\pi - \pi x + \pi y) = \cos 2\pi x \quad (6) \quad \begin{cases} \pi - \pi x + \pi y = 2\pi x + 2\pi k \\ \pi - \pi x + \pi y = -2\pi x + 2\pi k \end{cases} \quad (7)$$

$$(6) \quad \begin{cases} 3x - y - 1 + 2k = 0 \\ -x - y - 1 + 2k = 0 \end{cases} \quad (8) \quad \begin{cases} x = \frac{y+1-2k}{3} \quad (1) \\ x = -y-1+2k \quad (2) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ответ: все пары точек

$$\left(\frac{y+1-2k}{3}, y\right); (-y-1+2k, y),$$

$$k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}.$$

$$b) \quad \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$\text{по условию (1):} \quad \arccos \frac{y+1-2k}{12} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4. Пусть в классе учатся

x учеников (~~всего~~ в классе Лена и Вера). В конце месяца Лена получила y баллов. Сможете сказать, что учеников > 4 , если оба раза вероятности $1 \Rightarrow$ она не учеником.

Учеником вероятности вместе равны на конкурс равными $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4}$. Пусть на

каждому уч. в вер. сн дано

кон-во баллов, учеником исходов (2 уч. задане, и если нужно выбрать 2 людей) на кон-во всех исходов. Вероятность вер-сн

сн $\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^7}$. то же;

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{2}{7} \cdot \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)!}{2 \cdot (x-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (x-4)!}{x!} = \frac{2}{7} \cdot \frac{(x-2)!}{(y-2)! \cdot (x-y)!} \cdot \frac{y! \cdot (x-y)!}{x!}$$

(x-2-y+2)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если $\cos 2 > 1$, то $2 > 180^\circ$ (т.е. 2 — угол
наруж., $\Rightarrow 0 < 2 < 180^\circ$) так как этот случай
невозможен $\Rightarrow \cos 2 = \frac{5}{8}$

т.е. $0 < 2 < 180^\circ$, то $5 \sim 2 > 0$,

$$\Rightarrow \sin 2 = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \\ &= \frac{13\sqrt{39}}{10} \quad \text{ответ: } \frac{13\sqrt{39}}{10} \end{aligned}$$



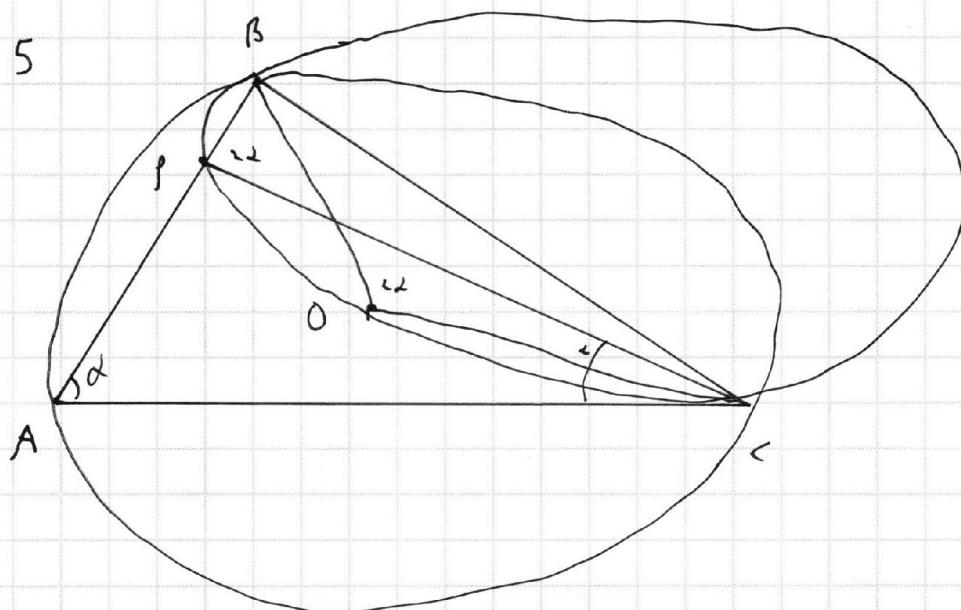
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5



известно $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$ как центральный угол, опирающийся на $\widehat{BC}$. $\angle BAC = \angle BOC = 2\alpha$ как вписанные углы $\angle BOC$, опирающиеся на $\widehat{BC}$.

(по угл. $B \in \omega \Rightarrow BPOC$ — вписанный),

$\angle PAB = \angle PBA = \angle BPC = \angle PCA + \angle PBA$ как вписанный

в $\triangle APC \Rightarrow 22 = \alpha + \angle PCA \Rightarrow \angle PCA = 2 \Rightarrow APC - \text{равност.} \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5}$.

Запишем теор. косинусов для $\triangle ABC$:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$; и для $\triangle BPC$:

$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos \angle BPC \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos \angle BPC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

подставим все значения:

$$|AB| = AP + PB = \frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$\frac{26^2}{25} + 16 - 2 \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \cos 2 = 4 + \frac{76^2}{25} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot \cos 2 \quad | \cdot 25$$

$$26^2 + 16 \cdot 25 - 10 \cdot 26 \cdot 4 \cdot \cos 2 = 100 + 76^2 - 4 \cdot 5 \cdot 16 \cdot \cos 2 \quad | : 4$$

$$40 \cdot 47 = 400$$

$$169 + 100 - 260 \cos 2 = 25 + 16 \cdot 676 - 5 \cdot 16 \cdot \cos 2$$

$$269 - 260 \cos 2 = 89 - 80 \cos 2$$

$$180 - 260 \cos 2 = -80 \cos 2 \quad | : 20$$

$$9 - 13 \cos 2 = -4 \cos 2$$

$$9 - 13 \cos 2 + 4(2 \cos^2 2 - 1) = 0$$

$$8 \cos^2 2 - 13 \cos 2 + 5 = 0$$

$$\Delta = 169 - 160 = 9$$

$$\begin{cases} \cos 2 = \frac{13 + 3}{16} = \frac{16}{16} = 1 \\ \cos 2 = \frac{13 - 3}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

h.u. $\cos 2 \leq 1$ ~~h.u. $\cos 2 = \frac{22}{16}$~~
h.u. $\cos 2 = \frac{22}{16}$

h.u. $\cos 2 = \frac{7}{4} \Rightarrow \sin 2 = \sqrt{1 - \frac{49}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ $\sin 2 > 0$ h.u. $2 - \text{quadrant}$
h.u. $0 < 2 < \pi$ $\Rightarrow \sin 2 = \frac{7}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{7\sqrt{15}}{16}$ $\sin 2 = \frac{7\sqrt{15}}{16}$ $\Rightarrow \sin 2 = \frac{7\sqrt{15}}{16}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 из 3

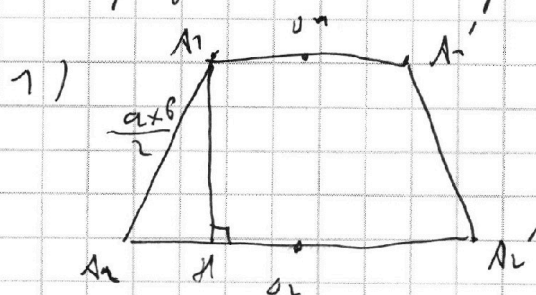
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нас ссер. прав к пирамиде; $A_1B_1 \parallel A_2B_2$
 анал.) Тогда боковое ребро пирамиды $\frac{a+b}{2}$

Рассмотрим м-во, проходящее через A_1, H, O_1, O_2
 (где H м.к. сев. $A_1O_1 \parallel A_2O_2$). Это сечение

пирамиды, но тут может быть 2 варианта
 в зависимости от высоты h :

Эта м-во пересечет пирамиду либо по
 2 боковым ребрам, либо по боковому ребру
 и серединному перп. к ребру основания:



м.к. сев. в сечении.

перп. из A_1 на линию

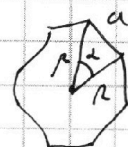
сеч. $\in A_2O_2$, то

$A_1A_2O_2$ - сечение. ~~АА~~ A_1A_2 - диаметр
 сече. сир. Вращено многоугольника.

по теор. кос. $2R_1^2 - 2R_1^2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{n}) = a^2$, где

R_1 - радиус верхнего сеч. $\Rightarrow R_1^2 = \frac{a^2}{2(1 - \cos \frac{2\pi}{n})}$

анал. $R_2^2 = \frac{b^2}{2(1 - \cos \frac{2\pi}{n})}$. Тогда $A_1H = \frac{A_1A_2 - A_1A_2'}{2} =$



на ч-бег оме. remove yr. $\& (A, B = B, B$ н.ч. y



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{2 \cdot \frac{b}{\sqrt{2(1-\cos \frac{2\pi}{n})}} - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2(1-\cos \frac{2\pi}{n})}}}{2}$$

$$= (b-a) \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2(1-\cos \frac{2\pi}{n})}} \right) / 2$$

↓

$$(b-a) \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2(1-\cos \frac{2\pi}{n})}} \right)$$

$\cos \angle A, \text{ где } H =$

$$x = a + b$$

$$\text{где: } \angle A, \text{ где } H = \frac{a + b}{\sqrt{2(1-\cos \frac{2\pi}{n})}}$$

с другим значением угла.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\overline{a a a k}$

$C = \overline{a 5}$

↓

$-4 \leq x \leq 4$

$-9 \leq y \leq 9$

$1-x \geq$

$A \cdot B \cdot C \div 5 \Rightarrow A \cdot B \cdot C \div 25$

$3x = y + 1 - 2k$

$y + 1 - 2k \div 3$

$\overline{a a k k} = \overline{a a k k - a} \div 11$

$\begin{array}{r} \times 707 \\ 11 \\ \hline 101 \\ 707 \\ \hline 111 \end{array}$

$\begin{array}{r} 777021 \\ -111 \\ \hline 11 \end{array}$

$\begin{array}{r} 222111 \\ -202 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 2222 \\ 11 \\ \hline 202 \\ 112 \\ \hline \end{array}$

$-9 \leq y \leq 9$

$-10 \leq y - 1 \leq 8$

$-13 \leq 2k \leq 4$

$404 \quad 505$

202

$22 = 2 \cdot 11$

$A \div 11, \text{ так } \div 11^2$

$-32 \quad 28$

10101

$\parallel$
 $B \text{ на } C \div 11$

$-\frac{32}{11} \quad \frac{28}{11}$

107

$B \div 11 \Rightarrow \overline{A - 55} \div 5$

5555

545

$-7 - 7 \times 2k \geq 122$

$(y - 1 + 2k) \geq 22x$

$-22 \leq 20$

$-10 \leq 8$

$-32 \quad 28$

$\frac{x}{y} = -1$

$x \neq -y \text{ так } 90$

$y - 1 - 2k = -22$

$y - 2k = -21$

$y = 2k - 21$

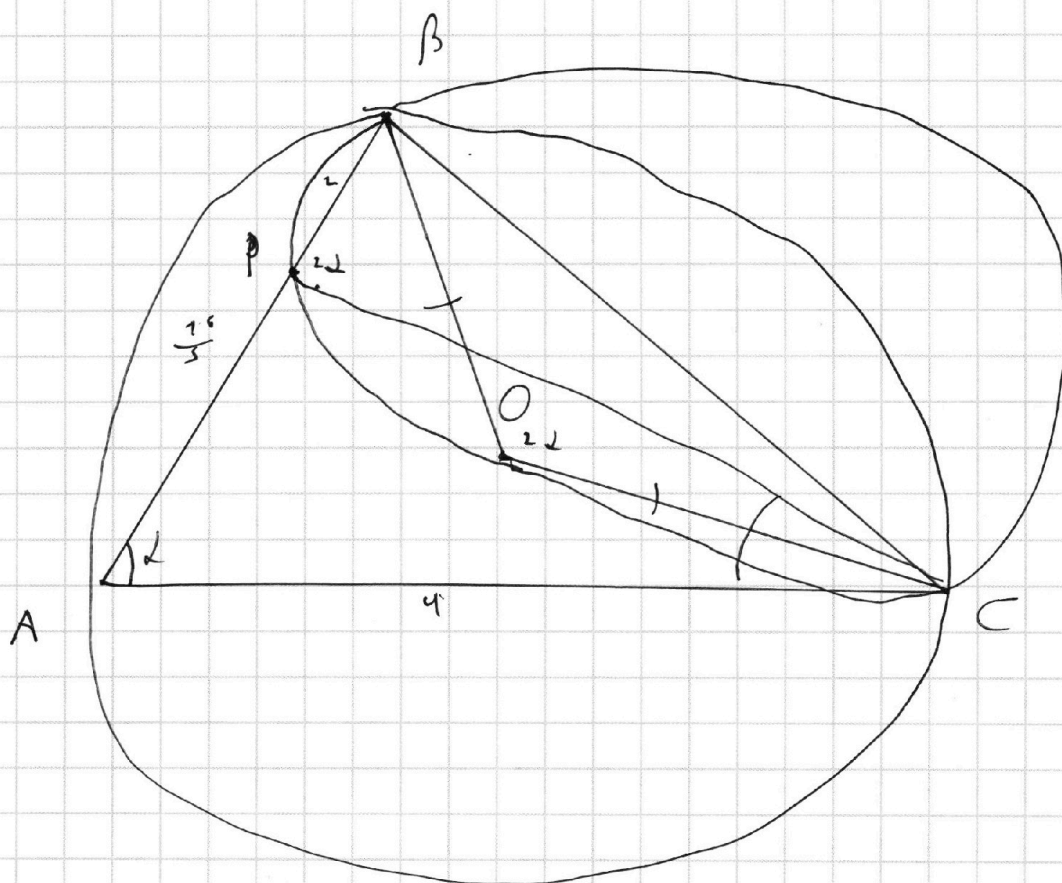
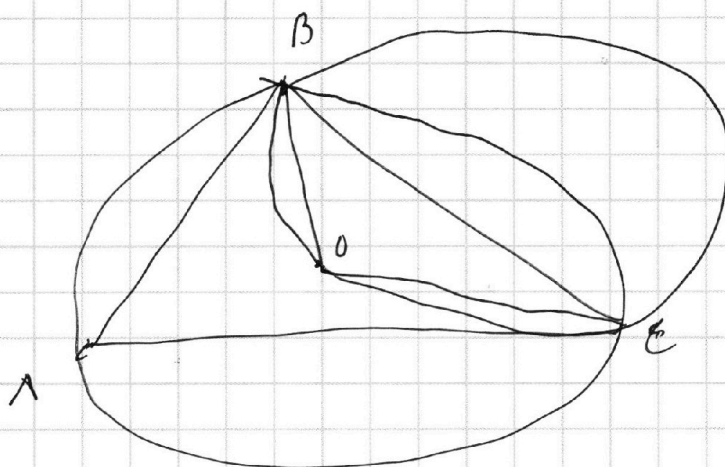


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

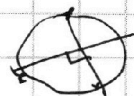
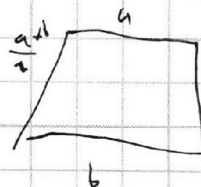
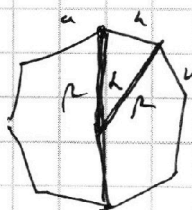
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$-1,42 \leq \alpha \leq 1,42$$

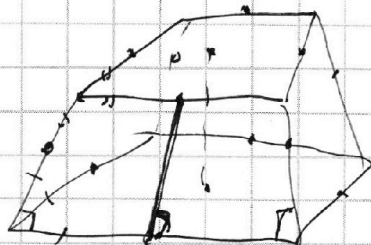
$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \\ & 2\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha \cos^2\frac{\pi}{4} = 4\cos^2\alpha \\ & \cos^2\alpha = \frac{1}{1 - \cos^2\frac{\pi}{4}} = 2 \end{aligned}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$$

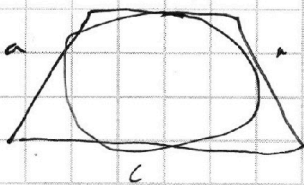


$$2\cos^2\alpha = 2$$

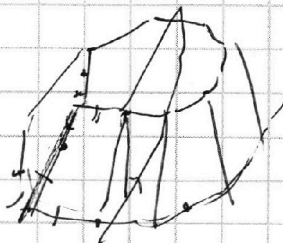
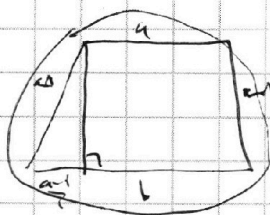
$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} = \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}} = \\ & = \sqrt{\frac{3}{2}a^2x^2 + \frac{3}{2}a^2y^2 + \frac{3}{2}b^2x^2 + \frac{3}{2}b^2y^2} \end{aligned}$$



$$\sqrt{3a^2x^2 + 3a^2y^2 + 3b^2x^2 + 3b^2y^2}$$



$$\begin{aligned} & 2a \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & a \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑦

$A, \beta, (\in \mathbb{N})$

$A = \overline{aaii}$

$B = \overline{bcb}$, откуда $b, c, d = 1$

$C = \overline{ef}$, где $y, ef = 5$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$$

$$= (-1-2)(1+4+4) = -7 \cdot 9 = -63$$

$$A \cdot B \cdot C = h^2$$

1, 4, 9, 6, 5

~~1, 4, 9, 6, 5~~

таким $f=5$, но $h:5 =$ ~~таким~~ $5 \cdot 8$ ~~таким~~ 40

②

$$x, y > 0: \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{3(x^2+y^2+1)}{xy} = \frac{3((y+3)^2(x-3) + (y+3)(x-3) + 1)}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{(x^2+y)^3 - y^3 - x^3 + 3}{xy} = \frac{(y^2+x^2+y)^3 - (x-3)^3 - (y+3)^3 + 3}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{(x+y)^3 - (y+x)(y^2-xy+x^2) + 3}{xy} = \frac{(x+y)^3 - (x+y)(x-3)^2 - (x+y)(y+3)^2 + 3}{(x+y)(y+3)}$$

$$(x+y)((x+y)^2 - y^2 + xy - x^2) \times \frac{108}{89}$$

$$54 + 54 - 18 - 1 = 708 - 18$$