



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим числа,
степени входящих
3 и 7 назовем α и β
соотв. k_1, k_2, k_3
оставшиеся множители
 a, b, c соотв. они $\neq 3$ и 7 .
тогда запишем ~~свои~~ a и c
через b используя условия

$$b = 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$$

$$a = 3^{\alpha+3} \cdot 7^{\beta+2} \cdot k_1$$

$$c = 3^{\alpha+1} \cdot 7^{\beta+5} \cdot k_2$$

$$ab: 3^{11} \cdot 7^{14}$$

$$bc: 3^{16} \cdot 7^{16}$$

$$ac: 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$k_1, k_2, k_3 \geq 1 \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3 \geq 11 & \alpha \geq 4 \\ 2\alpha + 10 \geq 21 & \alpha \geq 6 \\ 2\beta + 2 \geq 38 & \beta \geq 6 \\ 2\alpha + 7 \geq 18 & \alpha \geq 6 \\ 2\beta + 5 \geq 16 & \beta \geq 6 \end{cases}$$

$$abc \geq 3^{(3+6+10)} \cdot 7^{(2+6+24)} = 3^{19} \cdot 7^{32}$$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{45}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-10ab}$$

$\text{НОД} \underbrace{a+b}_{\text{н.ч.}} \text{ и } 10ab = m = \text{НОД } a+b \text{ и } 5ab$
причем a и b взаимнопросты
 $\Rightarrow a+b$ и ab взаимно
просты. $\Rightarrow m \leq 5$
максимальное $m=5$
пример $a=2, b=3$

В случае если $a=b=1$ $m=2$ $2 \leq 5$

Ответ: ~~нужно~~ макс. $m=5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. продолжение

$$2(\sqrt{x-1}) - \sqrt{2x^2+x+3} = 4x(\sqrt{x-1})$$

корень

возведем обе стороны в квадрат

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+x+3} = 2x \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+x+3 = 4x^2 \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-x-3 = 0 \\ x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\frac{1+5}{4} > \frac{1}{4}$$

$$-1 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = 1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3}$$

$\Rightarrow$ выражение > 0

⇒ возмущение > 0

$$1 - 4x + \sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 4x - 1$$

$$4x-1 \leq 0$$

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ \text{возведем в квадрат} \\ 2x^2 + x + 3 \geq 16x^2 + 1 - 8x \end{cases}$$

$$0 \geq 14x^2 - 9x - 2$$

$$D = 81 - 40.28$$

$$D < 0$$

$$b_{\text{выр}} > 0$$

— $x \leq \frac{1}{4}$ Возвращаем в квадрат уравнение

me

$$2x^2 - 3x + 11 = 2x^2 + x + 3 + x + 16x^2 - 8x = 2\sqrt{2x^2 + x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + x + 3}$$

$$2\sqrt{2x^2+x+3} \cdot (4x-1) = 16x^2 - 4x$$

$$2(4x-1)\sqrt{2x^2+x+3} = 4x(4x-1)$$

~~4x-1~~ $x = \frac{1}{4}$ Один из корней
теперь рассмотрим ситуацию
где $4x-1 \neq 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

14 продолжение

Проведем общую касательную. Она касается ω и Ω

в точках D и E соотв.

$O_1D \perp DE$ $O_2E \perp DE$ из O_1

опустим высоту O_1H на EO_2

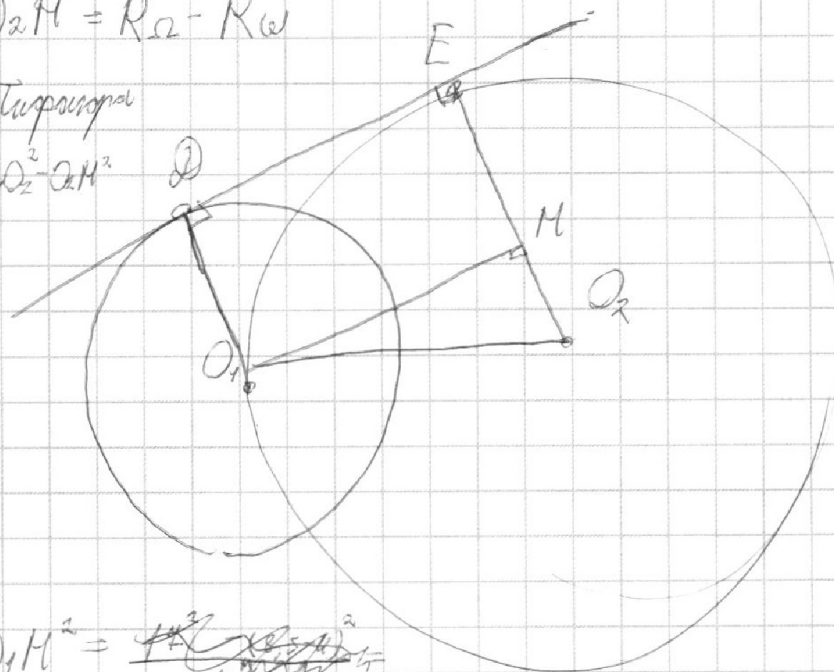
$\triangle O_1HE$ - прямоугольник $\Rightarrow O_1H = DE$

$$O_1O_2 = R_\Omega$$

$$O_2H = R_\Omega - R_\omega$$

из т. Пифагора

$$O_1H^2 = O_1O_2^2 - O_2H^2$$



$$O_1H^2 = \frac{14^2}{4} - \frac{(8,5-4,5)^2}{4}$$

$$= \frac{14^2}{4} - \frac{(4)^2}{4} = 4,5^2 - 4,5^2 = 4(8,5 - 4,5)(8,5 + 4,5)$$

$$O_1H = 2\sqrt{13}$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{13}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

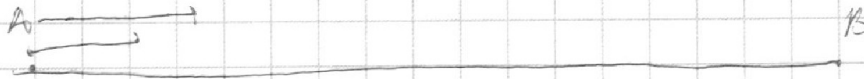
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6



Ск. велосипедиста u , $u, V \neq 0$ $u > V$
математиком V
Решение, от A до $B - L$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{u} = \frac{L}{V} + 2t \\ 96 \frac{L}{u} = \frac{L}{V} \end{array} \right. \quad 2t = \frac{L(V-u)}{uV}$$

$$96 \text{ км} = L \frac{(V^2 - u^2)}{uV} \quad 96 \text{ км/ч} = V + u$$

$$\frac{L}{V+6 \text{ км/ч}} + \frac{5}{4} t = \frac{L}{u+6 \text{ км/ч}} \quad \frac{5}{4} t = \frac{L(V-u)}{(V+6 \text{ км/ч})(u+6 \text{ км/ч})}$$

$$\frac{(V+6 \text{ км/ч})(u+6 \text{ км/ч})}{uV} = \frac{8}{5}$$

$$5uV + 30 \text{ км/ч} u + 30 \text{ км/ч} V + 180 \text{ км}^2/\text{ч}^2 = 8uV$$

$$180 \text{ км}^2/\text{ч}^2 + 30 \text{ км/ч} u = V(3u - 30 \text{ км/ч})$$

$$V = \frac{180 \text{ км}^2/\text{ч}^2 + 30 \text{ км/ч} u}{3u - 30 \text{ км/ч}}$$

$$u + V = 48 \text{ км/ч}$$

$$48 \text{ км/ч} = \frac{30 \text{ км/ч} \cdot u + 180 \text{ км}^2/\text{ч}^2 + 3u^2 - 30 \text{ км/ч} u}{3u - 30 \text{ км/ч}}$$

$$144 \text{ км/ч} - 1440 \text{ км}^2/\text{ч}^2 = 180 \text{ км}^2/\text{ч}^2 + 3u^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ продолжение

$$3U^2 - 144 \text{ км/ч} \cdot U + 1620 \text{ км}^2/\text{ч}^2 = 0 \quad | :3$$

$$U^2 - 48 \text{ км/ч} \cdot U + 540 \text{ км}^2/\text{ч}^2 = 0$$

$$U = \frac{48 \text{ км/ч} \pm \sqrt{144 \text{ км}^2/\text{ч}^2}}{2}$$

$$u < v \Rightarrow u = 18 \text{ км/ч} \Rightarrow v = 30 \text{ км/ч}$$

$$\frac{L}{u} = \frac{L}{v} + 2\tau$$

$$L = \frac{2\tau(v \cdot u)}{v - u} = \frac{2\tau \cdot 540 \text{ км}^2/\text{ч}^2}{12 \text{ км/ч}} = 90 \text{ км}$$

Ответ: 90 км

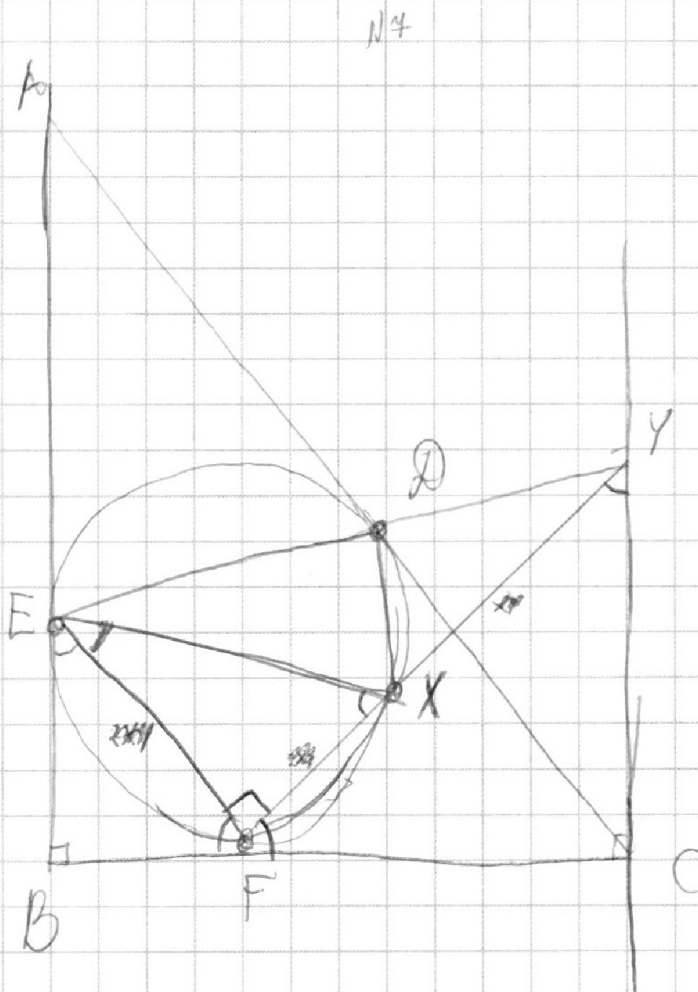
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle ADE = \angle YDC \quad YC \parallel AE \Rightarrow \angle DYC = \angle DEA$$

$\triangle AED$ - равнобедренный $\Rightarrow DYC$ равнобедренный и DCF равнобедренный по тем же причинам что и $AED \Rightarrow YC = DC = CF \Rightarrow$

$\triangle YCF$ - равнобедренный $\Rightarrow$ углы при основании $= 45^\circ$

как и в $\triangle EBF \Rightarrow \angle EFY = 90^\circ \Rightarrow EX$ диаметр вписанной ок.

$\angle XEF = \angle XFC = 45^\circ$ ("хорда и касательная") $\Rightarrow EX \parallel BC$

и $\angle EXF = 45^\circ$ $\triangle AED$ и $\triangle CYD$ $\sim$ подобны по трем углам
 $\Rightarrow \frac{ED}{YD} = \frac{AD}{DC}$ из теоремы о двух секущих $\triangle YDX$ и $\triangle YFE$ подобны



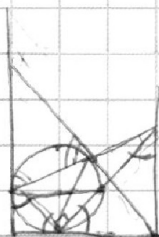
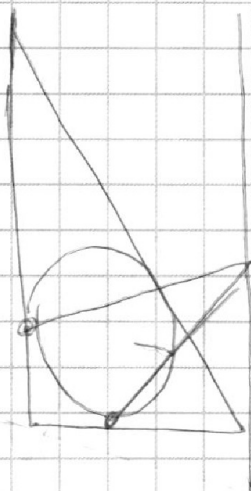
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = 2$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{z}$$

$$\frac{3(x^2 + 2y^2 + 3xy)}{xy} = 0$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 = 3x^2 + 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 - 12xy$$

$$-6x^2 - 12xy$$

$$-6x(x + 2y)$$

$$(3x + 2y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2$$

$$9 + \frac{6y}{x} + \frac{3x}{y} + 2 = 2$$

$$9 + \frac{2y}{x} + \frac{x}{y} = 0$$

$$\frac{2y^2 + x^2}{xy} = -9$$

$$\begin{array}{r} 540 \overline{) 12} \\ 18 \overline{) 15} \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\frac{1620}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1620 \overline{) 3} \\ 15 \overline{) 540} \\ \hline 12 \overline{) 00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 6 \\ 48 \\ \times 18 \\ \hline 384 \\ 192 \\ \hline 2304 \\ - 2160 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1620 \\ \times 540 \\ \hline 2860 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 3^{11} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 3^{15} \cdot 7^{16}$$

$$ac : 3^{21} \cdot 7^{38}$$

ст. в a на 3 больше степени в b
ст. в b на 5 больше степени в a

степень 3 в a на 3 > 6

4 в a на 22 > 6

a

$$b = k_1 \cdot 3^3 \cdot 7^{22} = a \quad ab : 3^{11}$$

$$a \cdot 3^4 \cdot 7^5 \cdot k_2 = c \quad \Rightarrow \quad ab : 7^{22}$$

$$c > a > b$$

$$ab = b^2 \cdot k_1 \cdot 3^3 \cdot 7^{22} \Rightarrow b^2 \cdot k_1 : 3^4$$

$$c = 3^4 \cdot 7^5 \cdot k_2 \cdot 7^{22} \cdot 3^3 \cdot k_1 \cdot b = k_2 \cdot k_1 \cdot b^2 \cdot 3^3 \cdot 7^5$$

$$abc = k_1^2 k_2 b^3 \cdot 3^{13} \cdot 7^{49}$$