



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 1

Пусть $a = 2^d \cdot 7^e \cdot x$, $x, d, e \in \mathbb{N}_{\text{нечет}}$ $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 7 \end{cases}$

$b = 2^f \cdot 7^g \cdot y$, $y, f, g \in \mathbb{N}_{\text{нечет}}$ $\begin{cases} y \neq 2 \\ y \neq 7 \end{cases}$

$c = 2^h \cdot 7^j \cdot z$, $z, h, j \in \mathbb{N}_{\text{нечет}}$ $\begin{cases} z \neq 2 \\ z \neq 7 \end{cases}$

Пусть также известны следующие неравенства: $d + f \geq 15$ и $e + g + j \geq 36$.

Получается, что:

$$\begin{cases} ab : 2^{d+f} \cdot 7^{e+g} \\ ac : 2^{d+h} \cdot 7^{e+j} \\ bc : 2^{f+h} \cdot 7^{g+j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{d+f} \cdot 7^{e+g} \geq 2^{15} \cdot 7^{11} \\ 2^{d+h} \cdot 7^{e+j} \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \\ 2^{f+h} \cdot 7^{g+j} \geq 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$$

Т.к. d, e, \dots - нечетные числа, то:

$$\begin{cases} d+f \geq 15 & \text{I)} \\ e+g \geq 11 & \text{II)} \\ d+h \geq 23 & \text{III)} \\ e+j \geq 39 & \text{IV)} \\ f+h \geq 17 & \text{V)} \\ g+j \geq 18 & \text{VI)} \end{cases}$$

$I + V \Rightarrow 2(d+f+h) \geq 55 \Rightarrow d+f+h \geq \frac{55}{2} \Rightarrow d+f+h \geq 28$

Т.к. $d, f, h \in \mathbb{N}$, Т.к. надо найти наименьшее значение abc , а $abc = 2^{d+f+h} \cdot 7^{e+g+j}$, то берем $d+f+h = 28$, тогда $e+g+j \geq 36$.

~~$d=10, f=5, h=13$~~ Все варианты не подходят. $d+f+h = 28$

$II + IV + VI \Rightarrow 2(e+g+j) \geq 66 \Rightarrow e+g+j \geq 33$ Т.к. надо найти

наименьшее значение abc , то соблюдаем, когда найти наименьшее

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значение $e+g+j$. Пусть $e+g+j=34$, тогда по т.к. $e+g \geq 29$, то

$e+g+j \geq 29$ тоже, тогда пусть $e+g+j=34$ и при $e+g \geq 29$

$g=0$, $e=19$, $j=20$ выписываются все перестановки $e+g+j=34$.

Т.к. когда наименьшее значение abc , то когда $x=y=z=1$,

$$\text{тогда } abc = 2 \cdot 7 = 14$$

Ответ: $2 \cdot 7$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a ~~неделимая~~ $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ^{нз} ~~если~~ $a \stackrel{\Delta}{=} 0$, то $b \nmid a$ и наоборот $\forall a \in \mathbb{N}$.

$\frac{a+b}{b}, \frac{a+b}{a+b}$, тогда если $(a+b) \mid m$, то $(a-b) \mid m \Rightarrow$ это бы эквивалентно $a^2 + ab + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, ~~мы можем найти~~ ~~на~~ сократим на m

$(a+b)^2 - 2ab \stackrel{m}{=} 0$ и т.к. $(a+b) \mid m$, то $-2ab \stackrel{m}{=} 0 \Rightarrow ab \mid m$. Если $a \mid m$, то из $(a+b) \mid m$, ~~то~~ следует $b \mid m$, то $b \nmid a$, т.к. a ~~неделимая~~, а следует $a \nmid b$ и ~~следовательно~~ $b \mid m$, ~~то~~ $m \stackrel{m}{=} 0$, т.к. b ~~неделимая~~ ~~получаем~~, что $m = 2 \cdot k, k \in \mathbb{N}$ и тогда a ~~и~~ $b \mid k$, то т.к. $(a+b) \mid m$, то $(a+b) \mid k$, ~~и следовательно~~ $a \stackrel{m}{=} b \stackrel{m}{=} 0$, но ~~также~~ ~~можно~~ ~~использовать~~ $m \stackrel{m}{=} 0 \Rightarrow 2 \mid m \Rightarrow$ ~~используем~~ $m = 2$, тогда ~~будет~~ ~~лучше~~, например $a = 4$
 $b = 5$

Ответ: 2

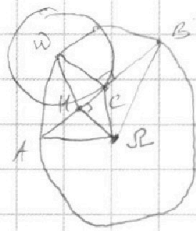
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$
 $R_{\omega} = 7$
 $R_{\Omega} = 13$

Точка Ω , центр окружности Ω , не может лежать внутри ω , т.к. тогда $R_{\omega} \geq R_{\Omega}$, т.е. $7 \geq 13$, и $7 \leq R_{\omega} \leq 13$, т.е. $7 \leq 7$, но 7 не больше 13 \Rightarrow точка Ω лежит вне ω .

$AB = ?$
 Проведем OK - перпендикуляр к AB .
 $\triangle AOB$ - $\triangle OB$, т.к. $OA = OB = R_{\Omega} \Rightarrow$

$\Rightarrow OK$ - диаметр, радиусы и диаметр 6 и $ARB \Rightarrow AK = KB = \frac{AB}{2}$

$OC \perp AB$, т.к. C - точка касания. Следовательно, что $OC \parallel OK$, т.к. при сдвиге CK касания меньше угла $\angle OKC = \angle OCK = 90^\circ$. А значит $OC \parallel OK$ - параллельны или коллинеарны, и значит $OC = OK + KR$. Пусть $AB = 24x$, $x \in \mathbb{R}$, тогда $AK = KB = 12x$, $AC = 17x$, $BC = 7x$, $OC = OB - CB = 5x$
 $OC = 5x = OK + KR$ $10x = 7 + KR$. По т. Пифагора для $\triangle KBR$ $KR = \sqrt{KB^2 - BR^2} = \sqrt{169 - 49x^2}$
 $10x = 7 + \sqrt{169 - 49x^2}$ $\sqrt{169 - 49x^2} = 10x - 7$

$$\begin{cases} 169 - 49x^2 = 100x^2 - 140x + 49 \\ 10x - 7 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 169x^2 + 4x - 120 = 0 \\ 10x - 7 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 25x^2 + x - 70 = 0 \\ x \geq \frac{7}{10} \end{cases}$$

Решим $25x^2 + x - 70 = 0$ $D = 1 + 25 \cdot 4 \cdot 70 = 3001$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3001}}{50}$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{3001}}{50} \\ x \geq \frac{7}{10} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{3001}}{50} \\ x \geq \frac{7}{10} \end{cases} \begin{cases} \frac{\sqrt{3001} - 1}{50} \geq \frac{7}{10} \\ \sqrt{3001} \geq 36 \\ \sqrt{3001} > 50 > 36 \end{cases}$$

Следовательно малая окружность $x = \frac{\sqrt{3001} - 1}{50}$, тогда $AB = 24x = \frac{12\sqrt{3001} - 12}{25}$

Ответ: $AB = \frac{12\sqrt{3001} - 12}{25}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

Пусть $a = 3x^2+3x+1$ $a \geq 0$ $3x^2+3x+1 \geq 0$ $D_a = 9-12=3 < 0$ $\forall x$. Крестик x^2 Δx
 $b = 9x-1$ $b \geq 0$ $9x-1 \geq 0$ $x \geq \frac{1}{9}$

Тогда $3x^2-6x+2 = a-b$ $a-b \geq 0$ $3x^2-6x+2 \geq 0$ $D_b = 9-6=3$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $a \geq b \Rightarrow x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$

Для $x \in (-\infty; 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$ $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = \sqrt{a-b}$

$$-\sqrt{a} = -b \quad \sqrt{a-b} = \sqrt{a} - b \quad a-b = a - 2b\sqrt{a} + b^2 \quad b^2 - 2b\sqrt{a} + b = 0$$

$$b^2 + b(1 - 2\sqrt{a}) = 0 \quad b(b + 1 - 2\sqrt{a}) = 0 \quad \begin{cases} b=0 \\ b=2\sqrt{a}-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 9x-1 = 2\sqrt{3x^2+3x+1}-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 81x^2 = 42x^2 + 12x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 69x^2 - 12x - 4 = 0 \end{cases}$$

Решая $69x^2 - 12x - 4 = 0$ $D_c = 36 + 4 \cdot 69 = 312$ $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} \end{cases} \quad x = \frac{1}{9} \notin [1 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}] \quad \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \cup \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

$$6\sqrt{3} + 2\sqrt{78} \cup 69\sqrt{3} - 69 \quad \frac{64}{2} > 21 \cdot \frac{3}{2} > 21 \cdot \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{78} \cup 2 + \sqrt{3} - 23 \quad \frac{64}{2} > 21 \cdot \frac{3}{2} > 21 \cdot \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{78} \cup 32 - 23 \quad \sqrt{104} > \sqrt{81} > 21 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \in [1 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \cup \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \quad 6\sqrt{3} + 6\sqrt{78} \cup 69\sqrt{3} + 69 \quad 2\sqrt{78} \cup 2 + \sqrt{3} + 23$$

Проверяется, что $\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \in [1 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}] \Rightarrow$ не выполняется, так как $2\sqrt{78} + 23 > \sqrt{104} > \sqrt{104}$

В уравнении $\sqrt{3x^2-6x+2}$ не будет отрицательных корней.

Ответ: $x = \frac{1}{9}; \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

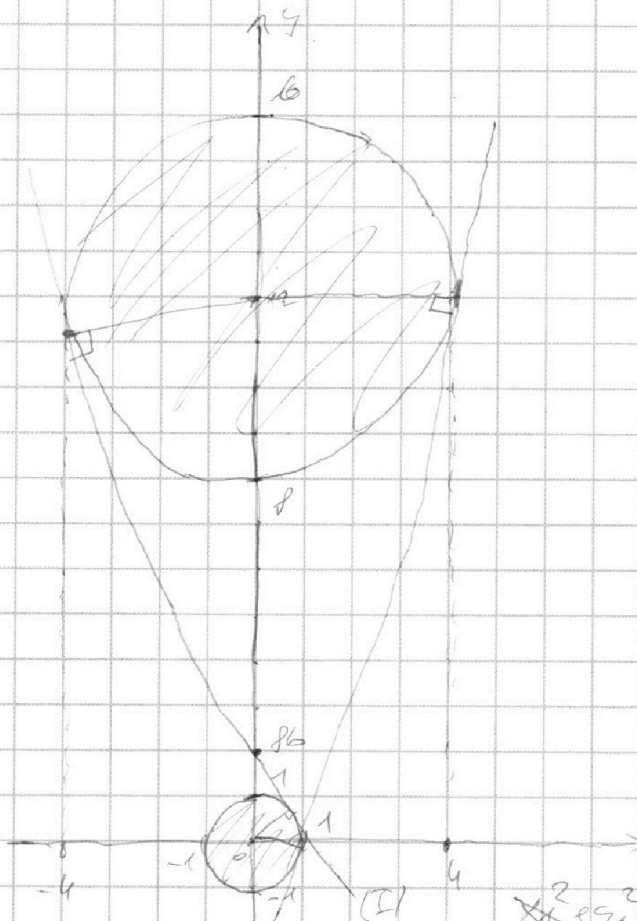
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x + y - 8b = 0 & (I) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 2)^2 - 16) \leq 0 & (II) \end{cases}$$



На этом графике, в частности, все точки, удовлетворяющие неравенству

II, т.е. обе окружности с пересечением, так как y системы II это равно 2 радиуса, причем t окружности касаются друг друга плюс еще пара, а значит для каждой точки что одна, а значит для t

~~Итак, пусть $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ будут произвольными~~

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 8b = 0 & 2x_2 + y_2 - 8b = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 \leq 1 & x_2^2 + (y_2 - 2)^2 \leq 16 \end{cases}$$

~~$x_1^2 + y_1^2 = 1$ и $x_2^2 + (y_2 - 2)^2 = 16$ радиусов, т.е.~~

II - касательная \Rightarrow имеет общие точки с системой окружностей, а не с их пересечением. Расстояние между $(x_1; y_1)$

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 = 8b \\ x_1^2 + y_1^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 8b - 2x_1 \\ x_1^2 + (8b - 2x_1)^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 8b - 2x_1 \\ x_1^2 + 64b^2 - 24bx_1 + 4x_1^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 8b - 2x_1 \\ 2x_1^2 - 24bx_1 + 64b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Расстояние $2x_1^2 - 24bx_1 + 64b^2 - 1 = 0$ между x_1 должно быть ≥ 0 , т.е. если $q \geq 0$ окружности касаются, следовательно дискриминант $D_y \geq 0$ $D_y = 24^2b^2 - 4 \cdot 2 \cdot (64b^2 - 1) = 576b^2 - 512b^2 + 4 = 64b^2 - 512b^2 + 4 = -448b^2 + 4 \geq 0$ $2 > 7\sqrt{2}b$ $b^2(2 - 4a^2)$

Заметим, что I касательная O_y в точке $(0; 8b)$, а из условия окружностей (параметры центров $(0; 0)$ и $(0; 2)$ и радиусы 1 и 4) видно, что касательная в точке $(0; 8b)$ и эти окружности касаются. Поэтому $1 \leq 8b \leq 4$

$$(8b)^2 - 1 + (12 - 8b)^2 - 16 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$64b^2 - 1 \times 144 - 192b \times 64b^2 - 16 = 128b^2 - 192b + 127 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

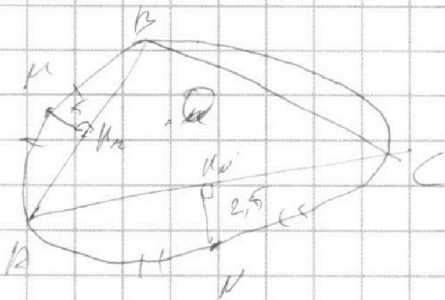
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax^2 - cx - 16 = 0$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$y = 86 - ax$$

$$(x^2 - 6x - 16)(x^2 - (4 - 12)x - 16) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-3x^2 + 15x + 2 \geq 0$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

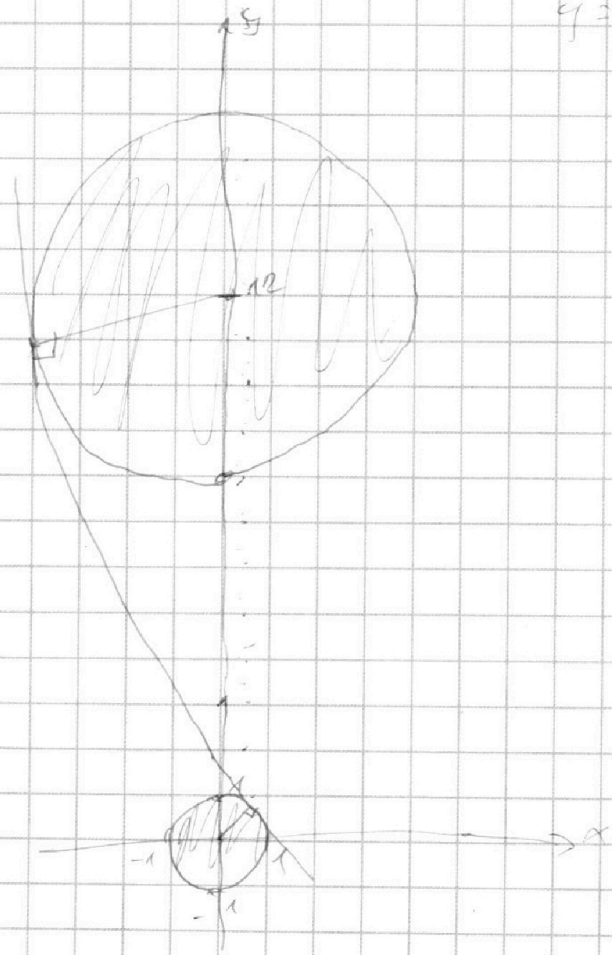
$$(-3x^2 + 15x + 2)^2 = (3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 4)$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 \\ -x+8 \\ \hline 2x^2 \\ -2x+5 \\ \hline 2x^2 \end{array}$$

$$37x^4 + 237x^3 + 15x^2 - 42x + 125x^2 + 4$$

$$2x^2 + 36$$

$$y = 3b - ax$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

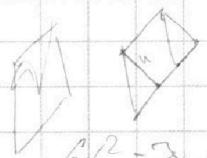


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = 2^d \cdot 7^e \cdot x$, $b = 2^f \cdot 7^g \cdot y$, $c = 2^h \cdot 7^j \cdot z$ $d, e, f, g, h, j \in \mathbb{Z}$

$ab = 2^{d+f} \cdot 7^{e+g}$

$d+f \geq 15$
 $e+g \geq 11$



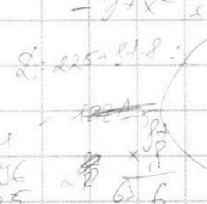
$x, y, z = 2, 7$

$bc = 2^{h+j} \cdot 7^{g+i}$

$6x^2 - 2x + 3 - 2\sqrt{3}x = 25 \cdot 5$

ab

$a = 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $b = 4 \cdot 2 \cdot 1$
 $5a - b = -5a - b$
 $23 \cdot 39 = 5b - b$



$ac = 2^{h+j} \cdot 7^{g+i}$

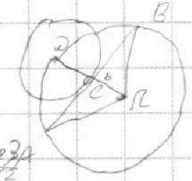
$300 \leq 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53$

$R = 2$
 $R = 15$



$2(d+f+h) \geq 55$ $6e-2h \geq 55$ $d+f+h \geq 28$

$2(e+g+j) \geq 68$



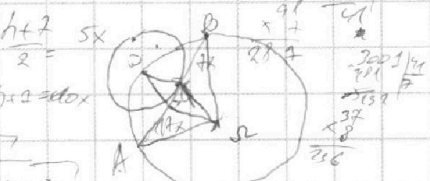
$S_{BC} = R_D - R_C = 15 - 2 = 13$
 $R_D = R_C = 13$

$3x^2 - 6x + 7 = 0$ $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$y - 6 = 3$
 3 ± 5
 $x = \frac{3 \pm 5}{3} = \frac{1 \pm 5}{3}$

$d = 9 - 3 \cdot 4 = -3$
 $q + h = \frac{5}{12} AB$

$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{3}x = 81x^2 - 18x + 1$



$-81x^2 + 16x + 28 = 2\sqrt{3}(x-1)(x-1+\sqrt{3})$

$y = 225 + 81 \cdot 8 = 1821$ $h = \sqrt{165 - 100x}$

Handwritten algebraic derivations and calculations involving variables a, b, x, y, z and various mathematical operations like squaring, taking square roots, and simplifying fractions.