



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

✓ 3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

✓ 6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

✓ 7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{51} \cdot 7^{64} \rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}}, \text{ но т.к. } \sqrt{2^{51}} \notin \mathbb{N} \Rightarrow abc \geq \sqrt{2^{52} \cdot 7^{64}} =$$
$$= 2^{26} \cdot 7^{32}$$

Заметим, что $abc: ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{16} \cdot 7^{37}$

Заметим, $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$ будет min, т.к. степень 7

мы уже не увелишим. Допустим, что мы можем

увеличить степень 2, тогда

$$ac: 2^{20} \Rightarrow \text{если } a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}, \text{ а } c = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}, \text{ то } \alpha_1 + \beta_1 \geq 20$$

$$\text{Тогда если } b = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2}, \text{ то } \gamma_1 \leq 6 \Leftrightarrow \gamma_1 \leq 25 - \alpha_1 - \beta_1$$

$$\text{т.к. } bc: 2^{17} \Rightarrow \gamma_1 + \beta_1 \geq 17 \Rightarrow \beta_1 \geq 12 \Rightarrow \alpha_1 \leq 25 - \gamma_1 - \beta_1 = 8$$

$$\text{и } ab: 2^{14} \Rightarrow \gamma_1 + \alpha_1 \geq 14, \text{ а у нас } \gamma_1 + \alpha_1 \leq 8 + 25 - \alpha_1 - \beta_1 = 13 \dots$$

$$\text{Итого: } abc_{\min} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b) = 1$$

$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2)_{\max} = ?$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab.$$

Заметим, что $(a+b)^2 - 8ab : a+b$, когда $a=3$, а $b=5$ п.к.

$$\begin{cases} (a+b)^2 : a+b \\ 8ab : a+b = 8 \end{cases}$$

Значит, $\text{НОД} (a+b; a^2 - 6ab + b^2)_{\max} = a+b$, при $a=3$, $b=5$.

$$\text{Значит } m_{\max} = a+b$$

Ответ: $a+b$.

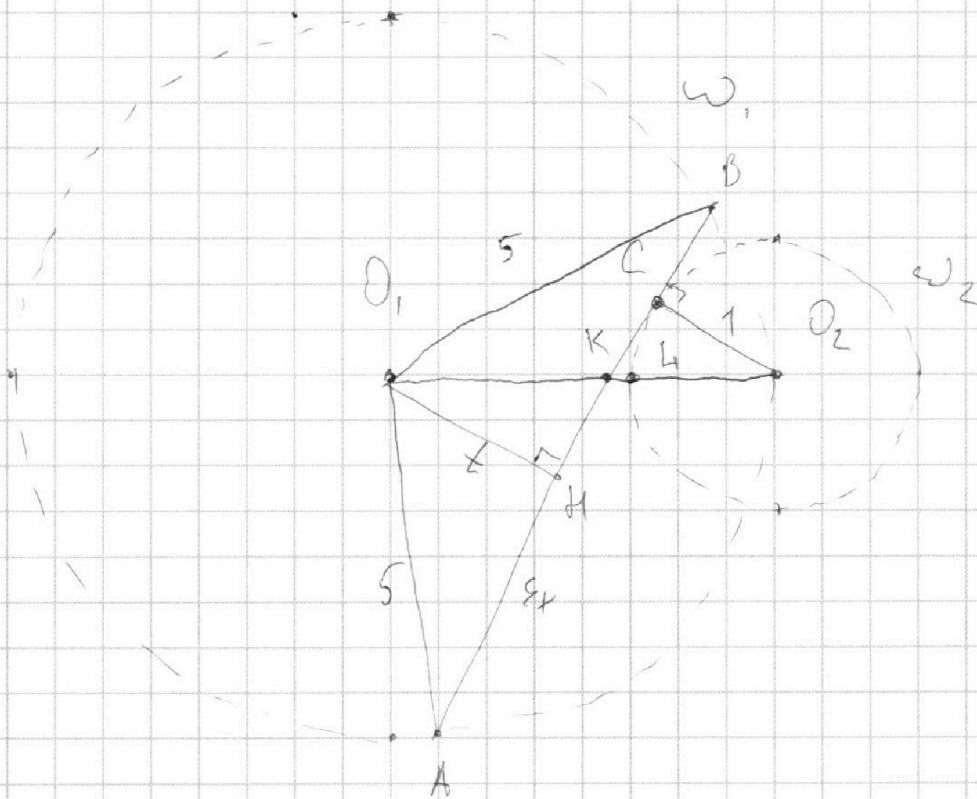
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть $BC = x$, тогда $AC = 4x$

2) $O_1H \perp AB \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AB = 8x \cdot \frac{1}{2} = 4x$

3) Пусть $O_1H = t$; $\Delta O_1HK \sim \Delta KCO_2 \Leftrightarrow$

a) $\frac{O_1K}{KO_2} = \frac{t}{1} \Leftrightarrow O_1K = t \cdot O_2K$ и т.к. $O_1K + O_2K = 5 \Rightarrow O_1K = \frac{5t}{1+t}$

b) $\frac{CK}{KH} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow CK = \frac{KH}{t}$ и т.к. $CK + KH = 8x - 4x - x = 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow CK = \frac{3x}{1+t}$

4) $CK^2 + CO_2^2 = KO_2^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3x}{1+t}\right)^2 + \left(5 - \frac{5t}{1+t}\right)^2 = \left(5 - \frac{5t}{1+t}\right)^2$ *

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{(*)} \quad \text{(*)} \quad \frac{9x^2}{(1+t)^2} + 1 = \frac{25}{(1+t)^2} \quad | \cdot (1+t)^2$$

$$9x^2 + (1+t)^2 - 25 = 0 \quad \left(t = \sqrt{25 - 16x^2} \text{ из } \Delta AOB \text{ т.к. } AH \perp OB \right)$$

$$9x^2 + 1 + 25 - 16x^2 + 2\sqrt{25 - 16x^2} - 25 = 0$$

$$7x^2 - 1 = 2\sqrt{25 - 16x^2}$$

$$49x^4 - 14x^2 + 1 = 100 - 64x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$(x^2 - 1)(49x^2 + 99) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = \frac{39}{49} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 1 - \text{подходит} \\ x = -1 - \text{не подходит} \end{array}$$

$$AB = 8x = 8$$

$$\text{Ответ: } 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{(2x^2 + 2x + 1) + (2 - 7x)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 = a \\ 2 - 7x = b \end{cases}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \Leftrightarrow \sqrt{a+b} = b + \sqrt{a}$$

$$a+b = b^2 + 2b\sqrt{a} + a$$

$$b^2 + b(2\sqrt{a} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \\ b=1-2\sqrt{a} \quad (1) \end{cases}$$

$$\text{DAB: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$(1) \quad 2 - 7x = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Leftrightarrow 7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{22}{41} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{22 - \sqrt{976}}{82} - \text{не подходит, } x < 0 \\ x_2 = \frac{22 + \sqrt{976}}{82} - \text{подходит } x > 0 \end{cases}$$

$u < 1$

Проверка:

$$1) x = \frac{2}{7} : \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \text{т.к. } 2 - 7x = 0 \text{ при } x = \frac{2}{7}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$7x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{7} - \text{верно.}$$

$$2) x = 0 - \text{не подходит } \sqrt{3} - \sqrt{1} = 2 - \text{не верно}$$

$$3) x = \frac{22}{41} : \sqrt{\frac{2 \cdot 22^2 - 5 \cdot 22 + 3 \cdot 41^2}{41^2}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 22^2 + 2 \cdot 22 + 41^2}{41^2}} = 2 - \frac{7 \cdot 22}{41}$$

$$\sqrt{2 \cdot 22^2 - 5 \cdot 22 + 3 \cdot 41^2} - \sqrt{2 \cdot 22^2 + 2 \cdot 22 + 41^2} = 41 \cdot 2 - 7 \cdot 22$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 4~~

Answer: $x_1 = \frac{2}{7}$; $x_2 = \frac{224\sqrt{976}}{82}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

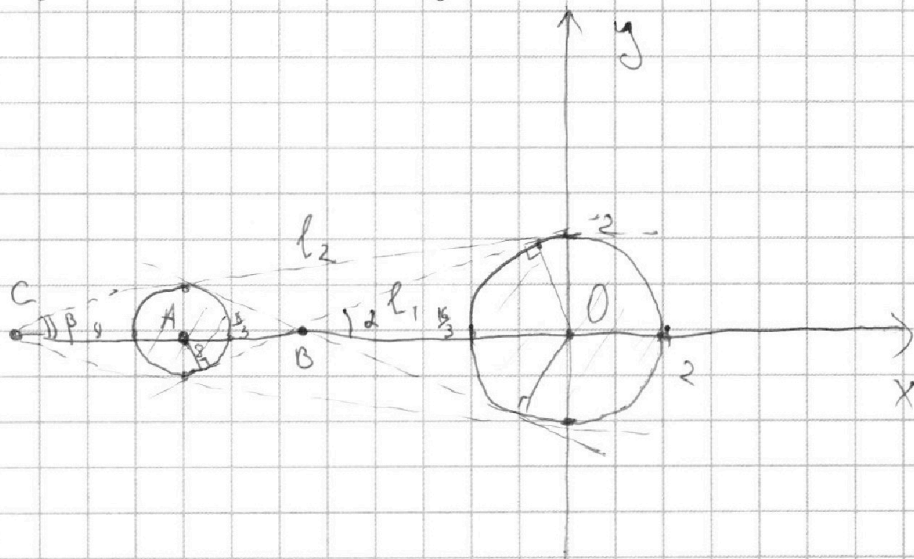
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a = ?$: $\exists b$: было решено 2 решения.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$



Чтобы были решения, необходимо, чтобы точки находились внутри окружностей или на границе, чтобы выполнялось 2 неравенство. Первое равенство задает прямую с коэф. наклона a , которую мы поднимаем или опускаем на $10b$. Значит, чтобы система имела ровно 2 решения, необходимо найти всевозможные прямые, которые будут касаться обеих окружностей, если какая-то прямая будет пересекать хоть 1 оф., то будет бескон. много решений таких касат. 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По условию, если необходимо найти угол наклона
прямых \Leftrightarrow угол между прямой и осью Ox , т.к.
то мы всегда сможем подобрать, т.к. $b \in \mathbb{R}$. Прямые
у нас параллельны и они симметричны относительно Ox \Rightarrow
 \Rightarrow достаточно найти коэф. наклона одной из
прямых и вынести касательных. Заметим, т.к.
радиусы окр. равны 2 и 1, то в силу подобия треугол,
которые прямая l_1 и радиусы окр. образуют в
 Ox , отрезок OA делится l_1 в отношении 2:1 \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow \frac{AB}{BO} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ т.к. $OA = 8$, то $BO = \frac{16}{3} \Rightarrow$ угол наклона

$$l_1 \Rightarrow \alpha = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{3}{8}, \text{ Знаем } \alpha_{1,2} \Rightarrow \frac{3}{8} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2:1}{\sqrt{1-(2:\frac{16}{3})^2}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Прямая l_2 и радиусы также образуют подобие треугол.

$$\frac{AC}{AC+8} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 8 \Rightarrow l_2 \text{ отрезок имеет коэф.}$$

$$\text{наклона } \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{8} \Rightarrow \tan \beta = \frac{1:8}{\sqrt{1-(1:8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

~~Ответ: $a_{1,2} = \pm \frac{3}{8}$; $a_{3,4} = \pm \frac{1}{8}$.~~

Знаем в силу симметрии $a_{1,2} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$; $a_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$

Ответ: $a_{1,2} = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$; $a_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$

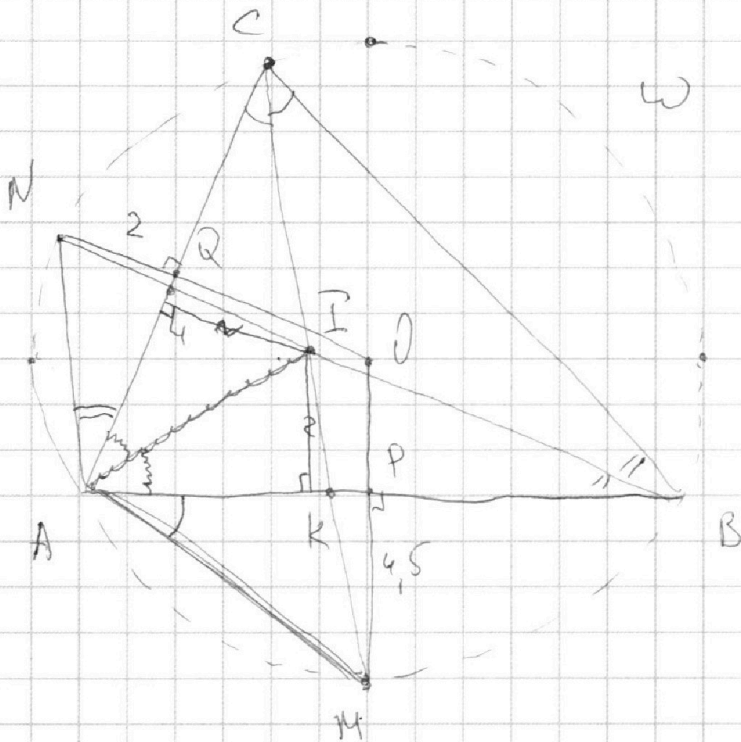
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

- 1) ~~Значит~~ Соединим BN и CM от их пересек. в I - это и будет центр вписанной окр. т.к. если $\widehat{AN} = \widehat{NC}$, то $\angle ABN = \angle NBC$ и если $\widehat{AM} = \widehat{MB}$, то $\angle ACM = \angle BCM$.
- 2) $NQ = 2$, а $MP = 4,5$ т.к. $OM \perp AB$ и $ON \perp AC$.
- 3) $AN = NI$ и $AM = MI$ по лемме о трезубце, т.к. M и N - точки пересек. биссектр. и опис. окружностей.
- 4)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 6,5



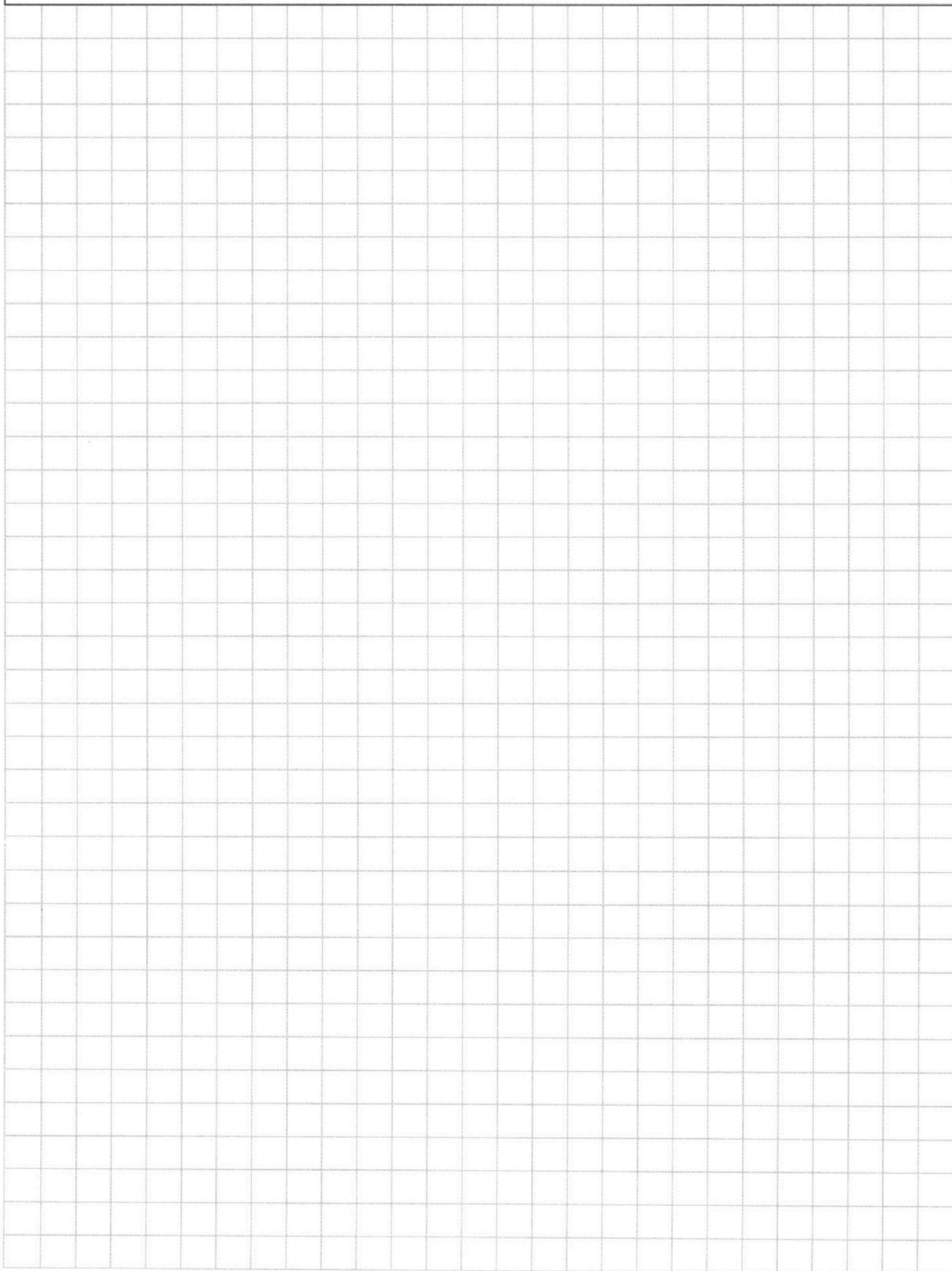
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





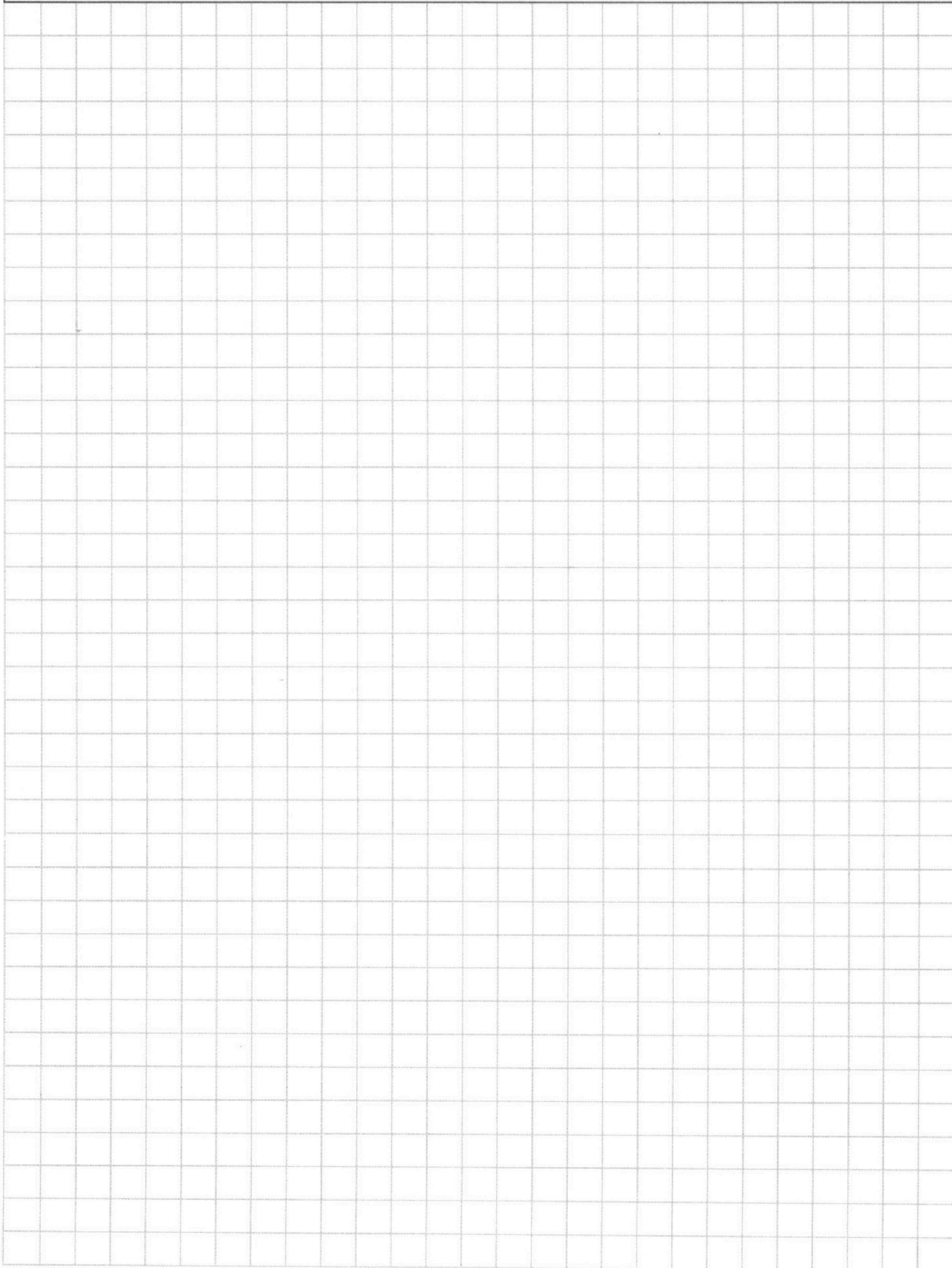
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(x-1)(2x-3) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$2 \cdot \frac{7-22}{41} = \frac{184}{41}$$

$$\frac{22 \cdot 7 - 41}{44} = 2 \cdot \frac{143}{44} = 2 \cdot \frac{13}{4} = \frac{13}{2}$$

$$143 = 2 \cdot 71.5$$

$$\sqrt{2 \cdot 22 \cdot 41 - 22 \cdot 41 + 41^2}$$

$$483$$

$$22 - \sqrt{976}$$

$$x_1 = \frac{22 - \sqrt{976}}{82}$$

$$22 + \sqrt{976}$$

$$x_2 = \frac{22 + \sqrt{976}}{82}$$

$$49x^2 - 14x + 1 \geq 8x^2 + 8x + 8$$

$$41x^2 - 22x - 7 \geq 0$$

$$D = 22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 7$$

$$D = 484 + 1148 = 1632$$

$$= 976$$

$$x \geq \frac{1}{4}$$

$$2\sqrt{a} = 1 + b$$

$$4a = 1 + 2b + b^2$$

$$8x^2 + 48x + 4 = 1 - 4 + 14x + 4 - 14x + 49x^2$$

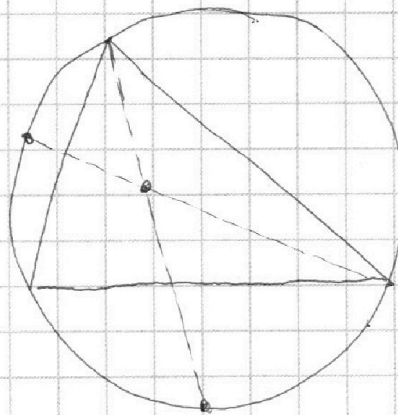
$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

$$D = 25 -$$

$$x = 1$$

$$x = \frac{3}{2}$$



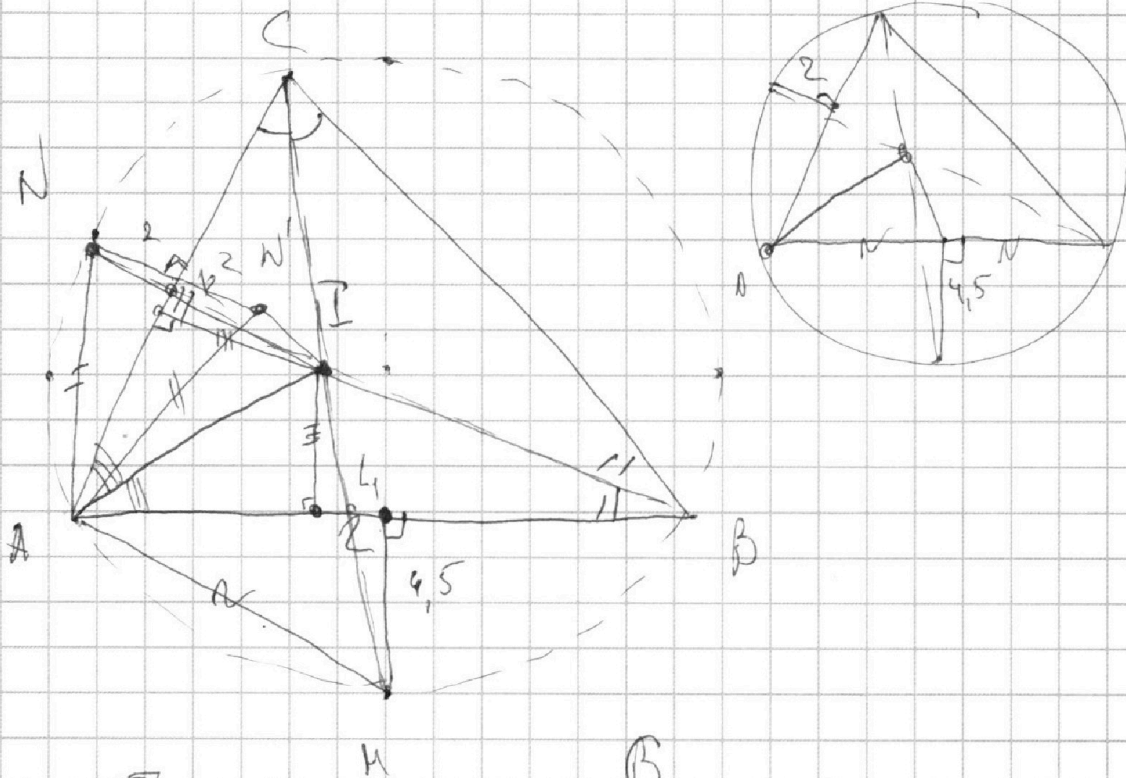
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



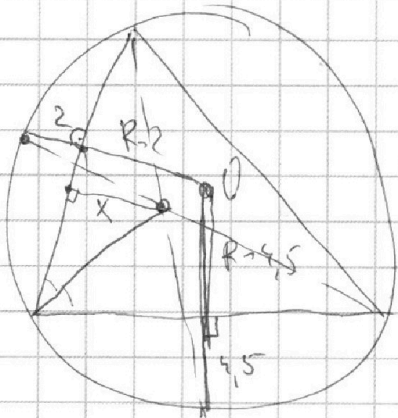
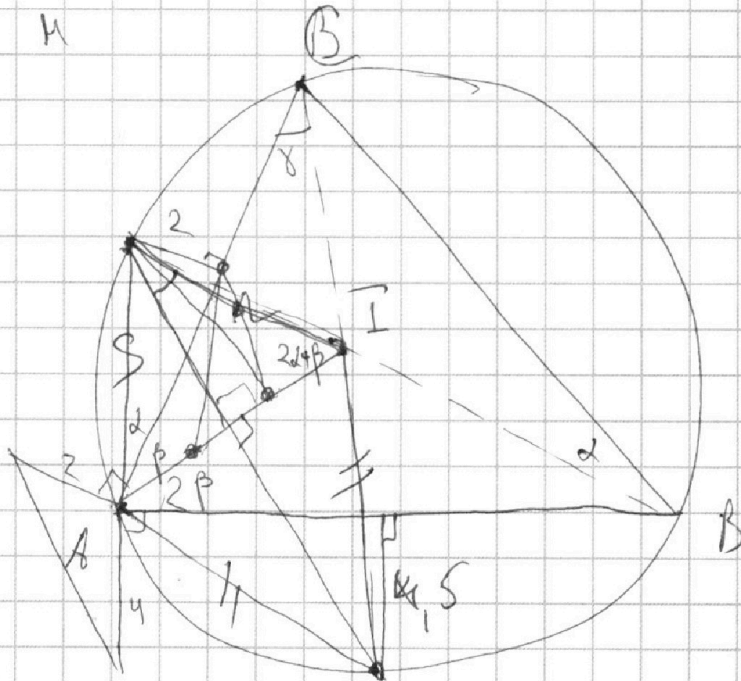
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{LN}{LM} = \frac{1}{4,5}$$

$$\frac{LK}{KN} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{LN \cdot KN}{LK \cdot LM} = \frac{2}{4,5}$$



$$180 - 2\alpha - 2\beta$$

$$2\alpha + 2\beta - 90$$

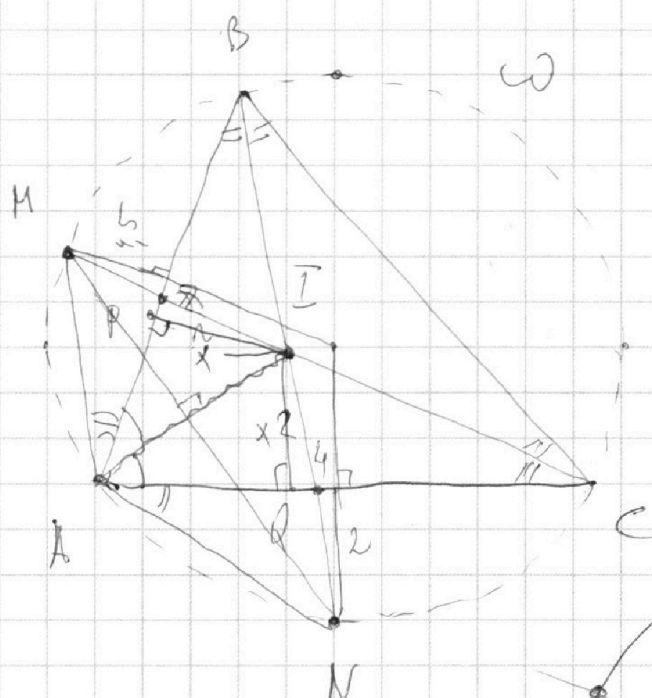
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{4}{x} + 2 = \frac{4.5}{2}$$

90°

$$\frac{IN}{LN} = \frac{x}{2}$$

$$NI = IN + NI$$

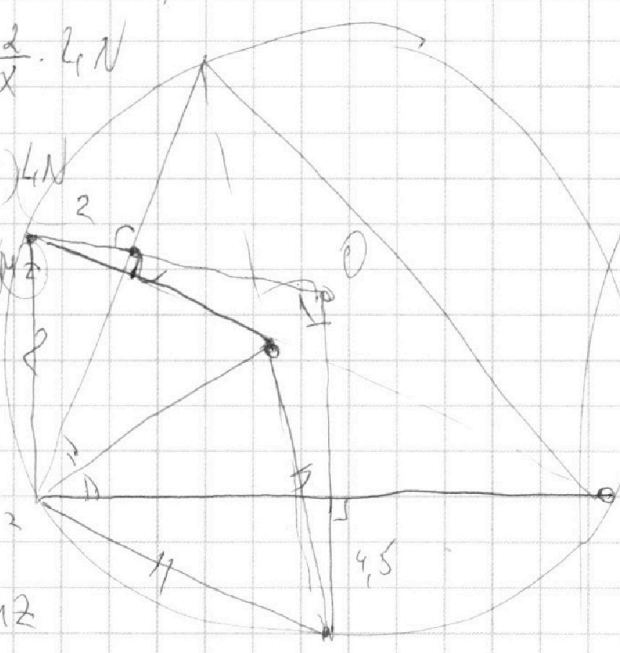
$$IN = \frac{2}{x} \cdot LN$$

$$NI = \left(\frac{2}{x} + 1\right) LN$$

$$MI = \left(\frac{4.5}{x} + 1\right) NI$$

$$\left(\frac{2}{x} + 1\right) LN =$$

$$\left(\frac{4.5}{x} + 1\right) MI$$



$$\frac{2}{x} + 1 =$$

$$\frac{4.5}{x} + 1 =$$

$$\frac{MI}{LN} = \frac{4.5}{2}$$

$$\frac{2}{x} + 2 = \frac{(4.5)^2}{x} + 4.5$$

$$4 + 2x = (4.5)^2 + 4.5x$$

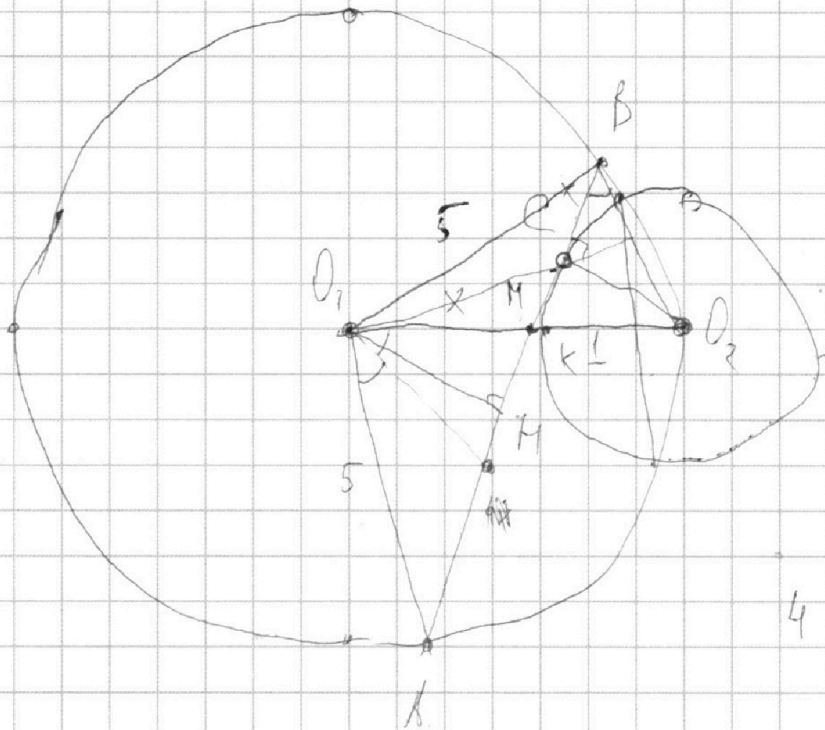
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение 1.

$$\frac{OH}{1} = \frac{x}{x-5}$$

$$\frac{OH}{1} = \frac{x}{x-5}$$

$$\frac{OH}{1} = \frac{x}{x-5}$$

$$MK \cdot MO_2 = MC^2$$

$$(5-x) \cdot (4-x) =$$

$$= (20 + x^2 - 9x)$$

$$20 + x^2 - 9x + 1 = (5-x)^2$$

$$20 + x^2 - 9x + 1 = 25 - 10x$$

$$\frac{MH}{MC} = \frac{x}{5-x}$$

$$MH = \frac{(4-x)(5-x)}{5-x} \cdot x = 4x - x^2$$

$$AH^2 = (4-x)^2 \cdot x^2 + \frac{x^2}{(5-x)^2} \cdot x^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + 1 =$$

$$(4-x)^2 (5-x)^2 + 1 - (5-x)^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



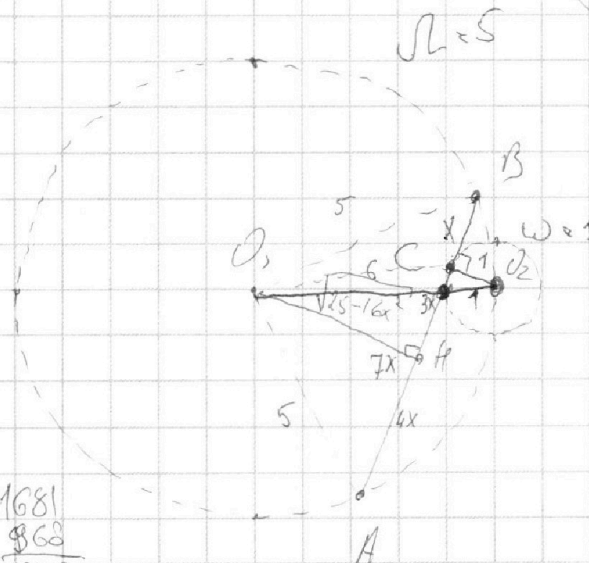
① $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$
 $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$
 $a^2bc^2: 2^{51} \cdot 7^{64}$
 $a^2b^2c^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$
 $abc \geq \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}} = 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}$
 $abc \geq 7 \cdot 2$ $abc \geq 7 \cdot 2$

$a = 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $b = 2^{17} \cdot 7^{17}$
 $c = 2^{20} \cdot 7^{37}$
 $a^2bc^2 = 2^{51} \cdot 7^{64}$
 $a^2b^2c^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$

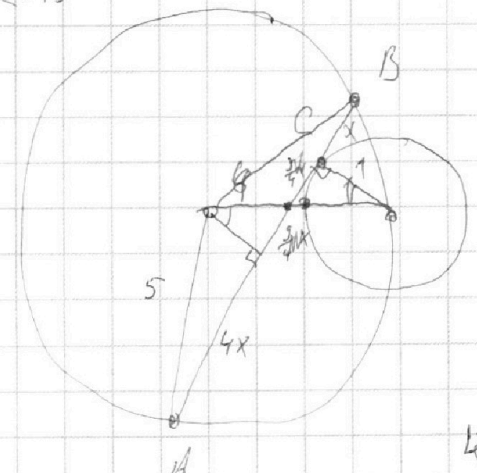
$(a|b) \geq 1$ ②
 $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$
 $(a+b)(a^2-6ab+b^2) = ?$
 $(a+b)^2 - 8ab$
 $8ab \geq a+b$
 $a=3, b=5$
 $m = a+b$
 $\frac{2 \cdot 22^2 - 5 \cdot 22 \cdot 41 + 3 \cdot 41^2}{-5 \cdot 22 \cdot 41 + 3 \cdot 41^2}$
 $\frac{41}{110}$
 $\frac{41}{9510}$
 $\frac{41}{4510}$

③

$2x^2 + 23x - 1 = 2\sqrt{2 \cdot 22^2 + 2 \cdot 22 \cdot 41 + 41^2}$
 $2x^2 + 23x - 1 = 2\sqrt{1681 + 868 + 2649}$
 $2x^2 + 23x - 1 = 2\sqrt{4998}$



$AB = ?$
 $OH = \sqrt{25 - 16x^2}$
 $O_1C = \sqrt{25 - 4x^2}$
 $\cos \angle OBH = \frac{4x}{5}$
 $\Delta OCB:$



$25 - 16x^2 = 25 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \frac{4x}{5}$
 $25 - 16x^2 = 25 + x^2 - 8x^2$
 $7x - 2 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$
 $7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$
 $49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 1$
 $48x^2 - 2 = 968$

$b^2 + 4b^2a$
 $\frac{41}{110}$
 $\frac{41}{9510}$
 $\frac{41}{4510}$
 $\frac{41}{1501}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 12 \\ \hline 82 \end{array}$$



$$\sqrt{(2x^2 + 2x + 1) + (2 - 7x)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ \hline 452 \\ + 484 \\ \hline 936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2500 \\ - 820 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{y-x} - \sqrt{y} &= x \\ \sqrt{y-x} &= \sqrt{y} + x \\ y-x &= y + x^2 + 2x\sqrt{y} \\ x^2 - x(1+2\sqrt{y}) &= 0 \\ x(x - 1 - 2\sqrt{y}) &= 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ y= \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b$$

$$a-b = b^2 + a + 2b\sqrt{a}$$

$$b^2 + b(1+2\sqrt{a}) = 0$$

$$b=0 \quad (1)$$

$$b = -1 - 2\sqrt{a} \quad (2)$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$$

$$a+b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}$$

$$b^2 + b(2\sqrt{a}-1) = 0$$

$$\downarrow$$

$$b=0 \quad (1)$$

$$b = 1 - 2\sqrt{a} \quad (2)$$

$$(1) \quad 2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$(2) \quad 2 - 7x = -1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$7x - 2 = 1 + 2\sqrt{(x+1)^2 + x^2}$$

$$(7x-3)^2 = 4(x+1)^2 + 4x^2$$

$$49x^2 - 42x + 9 = 4x^2 + 8x + 4 + 4x^2$$

$$41x^2 - 50x + 5 = 0$$

$$D = 50^2 - 20 \cdot 41 = 2500 - 820 = 1680$$

$$\sqrt{2 \cdot 22^2 - 5 \cdot 22 + 3} - \sqrt{2 \cdot 22^2 + 2 \cdot 22 + 1} = 2 - 7 \cdot 22$$

$$464 \cdot 2 = 968 - 110 + 3 = 858 + 3 = 861 =$$

$$(1) \quad b=0$$

$$2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

$$(2) \quad b = 1 - 2\sqrt{a}$$

$$2 - 7x = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 484 + 12 \cdot 41$$

$$1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2 - 7x = \left(\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 \right)^2 - 2x^2 - 2x - 1$$

$$3 + 2x^2 + 5x$$



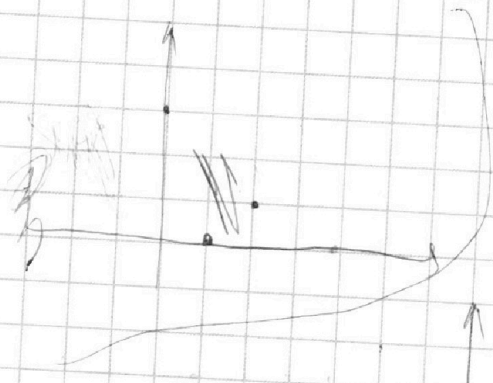
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

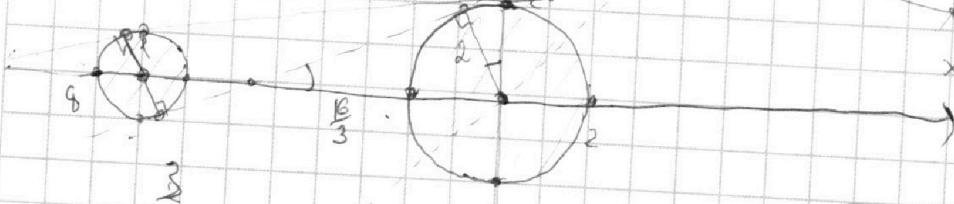
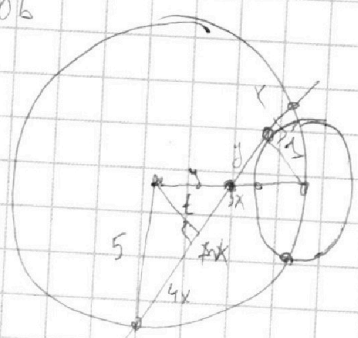


$$\begin{cases} 9x - y + 106 = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

ар? $\frac{3}{16} = \frac{2}{16}$

$$y = 9x + 106$$

$$\sin t = \frac{3}{8}$$



$$\sin = \frac{3}{8}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$t = \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$\frac{y}{3x - y} = \frac{1}{t}$$

$$ty = 3x - y$$

$$y = \frac{3x}{1+t}$$

$$\frac{y}{5-y} = \frac{6}{t}$$

$$y = 5t - yb$$

$$y = \frac{5t}{1+t}$$

$$\sin = \frac{3}{8}$$

$$\cos = \sqrt{\frac{64-9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\frac{\sqrt{256-36}}{3} = \frac{\sqrt{220}}{3} = \frac{\sqrt{44 \cdot 5}}{3}$$

$$\frac{\sin}{\cos} = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{\sqrt{55}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\sin = \frac{1}{8}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\tan = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$25 = (1+t)^2 + 9x^2$$

$$25 = 1 + 2\sqrt{25-16x^2} + 25-16x^2 + 9x^2$$

$$7x^2 - 1 = 2\sqrt{25-16x^2} \Rightarrow x = 1$$

$$\left(\frac{5}{1+t}\right)^2 = 1 + \frac{9x^2}{(1+t)^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{3x}{1+t}\right)^2$$

$$t \cdot ck = 3x - ck$$

$$49x^4 - 16x^2 + 1 = 100 - 64x^2$$

