



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} p$, $bc = 2^{14} \cdot 7^{18} q$, $ac = 2^{20} \cdot 7^{34} t$,

где $p, q, t \in \mathbb{N}$, тогда

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} pqt$$

П.к. $a^2 b^2 c^2$ — полный квадрат, то все простые множители входят в четной степени.

П.к. степень вхождения 2 в $a^2 b^2 c^2$ кратна 51,

тогда степень вхождения должна быть кратна 52.

П.к. в $a^2 b^2 c^2$ 2 входит кратн. 51 в 52 степени,

а 7 — кратн. 64, то в abc 2 входит кратн.

26 в 26 степени, а 7 кратн. 32. Но т.к.

в ac 7 входит кратн. 34 степени, то и

в abc 7 входит кратн. 32 степени. Тогда

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32} \quad (\text{т.к. } 2 \text{ и } 7 \text{ взаимнопросты})$$

Пример: Если $a = 2^9 \cdot 7^{10}$, $b = 2^5 \cdot 7$, $c = 2^{12} \cdot 7^{24}$,

то условие задачи выполняется и $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{32}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если $\frac{a}{b}$ - несократ, то $(a; b) = 1$ (в кружках скобкам будем обозначать НОД чисел)

$$(a+b; a^2-6ab+b^2) = (a+b; a^2-6ab+b^2-(a+b)^2) = \\ = (a+b; -8ab) = (a+b; 8ab)$$

Мы по алгоритму Евклида можем оставить меньшее число и сколько-то раз его вычитать из большего (мы вычли $(a+b)$ раз число $(a+b)$)
Докажем, что $(a+b, ab) = 1$.

Предположим, что это не так, тогда пусть $a+b : p$, $ab : p$, где p - простое число.

Так $ab : p \Rightarrow a : p$ или $b : p$. Пусть $b : a : p$.

Так $a : p$, $a+b : p$, то $b : p$, тогда $a : p$, $b : p$, тогда $(a, b) \geq p$ - противоречие, так $(a, b) = 1$.

Тогда наше предположение неверно, а верно, что ab и $(a+b)$ взаимнопросты

Тогда $(a+b; 8ab) = (a+b; 8) \leq 8$. И.e. $m \leq 8$

Пример. Если $a=3$, $b=5$, то $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{9-6 \cdot 15+25} = \frac{8}{-56}$. Тогда $m=8$.

Ответ: 8.

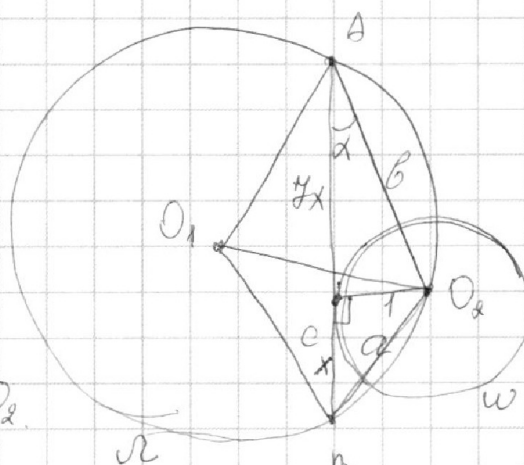
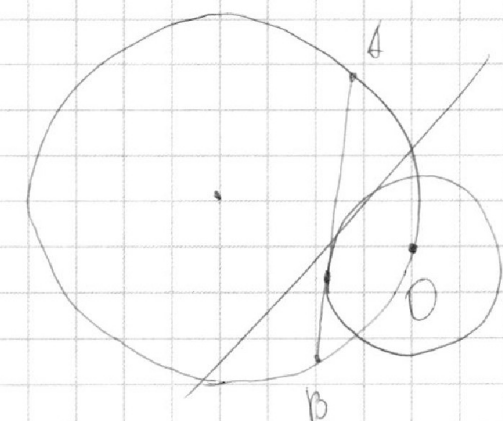
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть центр окр ω O_2 .

Пк AB — касательная к ω и касается ω в B , то

$$O_2 C \perp AB, \quad O_2 C = 1.$$

Пусть $\angle O_2 AB = \alpha$, $O_2 B = a$, $O_2 A = b$, тогда

$BC = x$, тогда $AC = 4x$, тогда

$$S_{ABO_2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x = 4x \quad (\text{п.к. } S_{ABO_2} = \frac{1}{2} O_2 C \cdot AB)$$

С другой стороны, $S_{ABO_2} = \frac{4R}{ab \cdot 8x}$, где R — радиус

описанной около $\triangle ABO_2$ окружности, т.е. $R = 5$.

Из т-мы синусов $\triangle ABO_2$: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$

И из $\triangle AO_2 C$: $\sin \alpha = \frac{1}{b}$, тогда $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = ab = 2R = 10$, т.е. $ab = 10$

Тогда $S_{ABO_2} = \frac{4 \cdot 5}{10 \cdot 8x} = \frac{1}{4x}$ или $S_{ABO_2} = 4x$, т.е.

$$\frac{1}{4x} = 4x \Leftrightarrow 16x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}. \quad \text{Пк } AB = 8x, \text{ то}$$

$$AB = 2.$$

Ответ: 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a$, $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b$, тогда

$$a - b = 2 - 7x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$a^2 - b^2 = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2 = a - b$$

$$\text{т.е. } a^2 - b^2 = a - b$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$1) \underline{a = b} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 7x = 2 \\ \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \quad (\text{входит в ОДЗ})$$

$$2) \underline{a = 1 - b} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

П.к обе части ~~положительные~~ не отрицательные, то можно возвести в квадрат равносильно. Получим

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x + 1$$

П.к обе части ~~положительные~~ не отрицательные, возведем равносильно в квадрат, получим

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1 \Leftrightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0$$

Решим квадратное уравнение, получим $x \neq \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$,

$$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

каждое из которых входит в ОДЗ.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{2}{7}, x_2 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}, x_3 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Посчитаем, сколько пар A и B , если $x_1 \neq x_2$,
тогда если $x_1 \neq x_2 \geq 0$, то всего 90 пар,
если $x_1 \neq x_2 \geq 1$, то 10, если $x_1 \neq x_2 \geq 2$, то
9, и т.д. то в этом случае
всего $10+10+9+9+\dots+4+4 \geq 2 \cdot (4+\dots+90) =$
 $= 2 \cdot 49 = 98$. Аналогично, если $y_1 \neq y_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

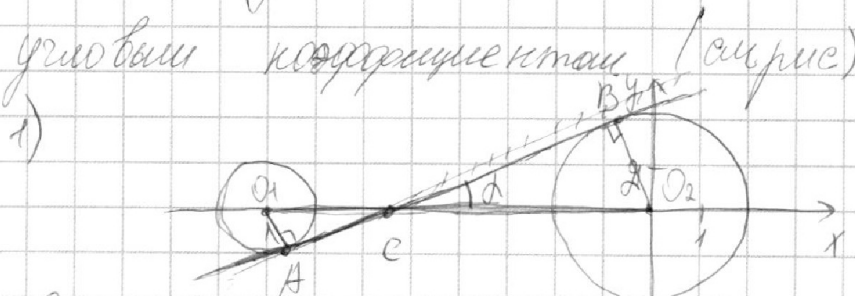
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.к. решением 2-го ур-я является вся внутренняя область окружности. Так всего должно быть равно 2 решения, то это возможно только, если прямая касается первой и второй окружности одновременно, т.е. является общей касательной.

У 2-х пересекающихся окружностей могут быть всего 4 общие касательные. Так линии центров окружностей лежат на ^{оси} прямой Ox , то у 2-х из этих 4 общих касательных разбиваются на 2 пары, в каждой из которых касательные имеют противоположные по знаку, но одинаковые по модулю угловые коэффициенты и свободный член. Каждой паре угловых коэффициентов у ^{общих} касательных с положительными угловыми коэффициентами (см. рис)



Отметим точки касания A и B , точку пересечения с осью Ox C (см. рис). Пусть центры окр. O_1 и O_2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

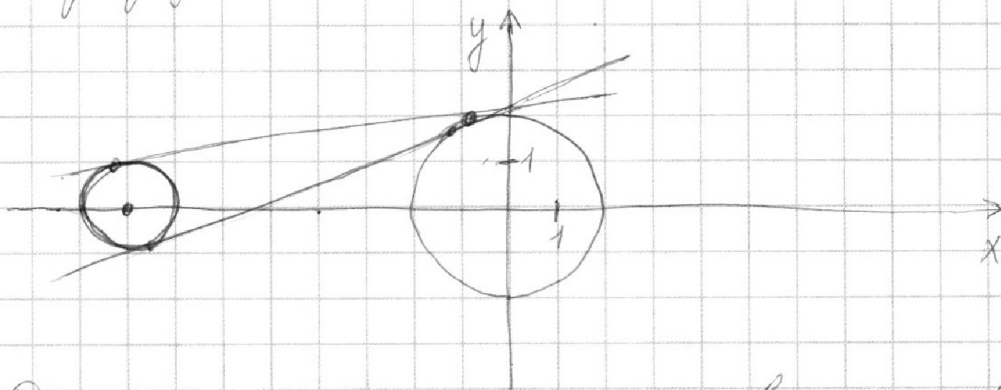


Решим задачу графически

Изобразим ур-е 2 на графике

Каждая из енобок - это ур-е окружности.

Тогда если бы был знак равенства, то графиками были бы совокупность двух окружностей с радиусами с центрами с координатами $(-8; 0)$, $(0; 0)$ и радиусами 1 и 2 соответственно



Тогда решениями 2-го ур-я являются внутренние области окружностей (метод продвигая точку)

Первое уравнение задает прямую, где a - угловой коэффициент прямой, b - свободный член.

Если прямая касается окружностей, то она образует решение, если не имеет общих точек, то нет решений (с этой окружностью), если пересекает, то образует бесконечно много решений.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O_1 A \perp AB, O_2 B \perp AB$$

Пусть упр-е этой касательной $y = kx + b$, тогда $C(-\frac{b}{k}; 0)$

Тогда $CO_2 = \frac{b}{k}$, $CO_1 = 8 - \frac{b}{k}$. Пусть угол наклона α .

$$\sin \alpha = \frac{1}{8 - \frac{b}{k}} = \frac{2}{\frac{b}{k}} \Leftrightarrow \frac{b}{k} = 16 - 2 \frac{b}{k} \Leftrightarrow 3 \frac{b}{k} = 16$$

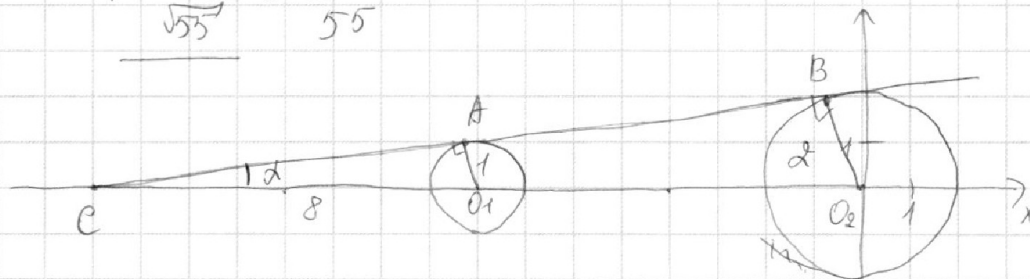
$$\Leftrightarrow \frac{b}{k} = \frac{16}{3}. \text{ Тогда } O_1 C = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

По т-ме Пифагора $\triangle ACO_1$: $AC = \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \frac{\sqrt{55}}{3}$

$$k = \tan \alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{55}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{П.с. } a_1 = \frac{9^9}{\sqrt{55}} = \frac{9\sqrt{55}}{55}$$

2)



Аналогично отметим точки касания A и B

Точку пересечения с осью OX C.

$\triangle AO_1 C \sim \triangle BO_2 C$ с коэф. подобия $\frac{1}{2}$, тогда

$$O_1 C = \frac{1}{2} O_2 C \Leftrightarrow O_1 C = O_2 O_1 = 8$$

По т-ме Пифагора $\triangle AO_1 C$: $AC = \sqrt{64 - 1} = \sqrt{55}$,

$$\text{тогда } \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{55}}, \text{ т.е. } a_2 = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ! } a = \pm \frac{9}{\sqrt{55}}, a = \pm \frac{1}{\sqrt{55}}.$$

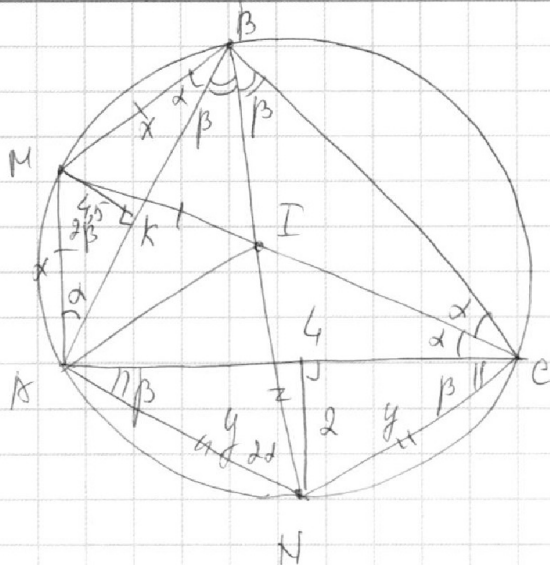
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Так M — середина AB ,
 N — середина AC , то
 $MB = MA$, $NA = NC$, CM —
биссектриса $\angle BCA$, BN — биссектриса
 $\angle ABC$

Пусть $\angle ACM = \angle BCM = \alpha$, $\angle ABN = \angle CBN = \beta$

Из вписан. $\triangle AMB$ $\angle MBA = \angle MAB = \alpha$, из

вписан. $\triangle ACN$ $\angle CAN = \angle ACN = \beta$

Также $\angle AMC = 2\beta$, $\angle ANB = 2\alpha$

Пусть $\rho(M; AB) = MK$, $\rho(N; AC) = NL$

Пусть $AM = MB = x$, $AN = CN = y$

Из прямоугол. $\triangle AMK$ и $\triangle ANL$: $\sin \alpha = \frac{4,5}{x}$, $\sin \beta = \frac{2}{y}$

Из $\triangle CMN$ Пусть $CM \cap BN = I$, тогда I — центр впис. окр.

Из леммы о трезубце $MI = MA = MB$, $NI = AN = NC$.

Из $\triangle AMI$ — равноб., то $\angle MAI = \angle MIA = 90^\circ - \beta$; из $\triangle ANI$ — равноб., то $\angle NAI = \angle NIA = 90^\circ - \alpha$

$$AI = \frac{x \cdot 2 \sin \beta \cos \beta}{\cos \beta} = 2 \sin \beta \cdot x = 2x \cdot \frac{2}{y} = \frac{4x}{y} \quad (1)$$

$$AI = \frac{y \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2y \cdot \sin \alpha = 2y \cdot \frac{4,5}{x} = 9 \frac{y}{x} \quad (2)$$

$$\text{Из (1) и (2): } 4 \frac{x}{y} = 9 \frac{y}{x} \Rightarrow 4x^2 = 9y^2 \Rightarrow 2x = 3y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \quad \text{Тогда из (1) } AI = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$$

Ответ: 6.



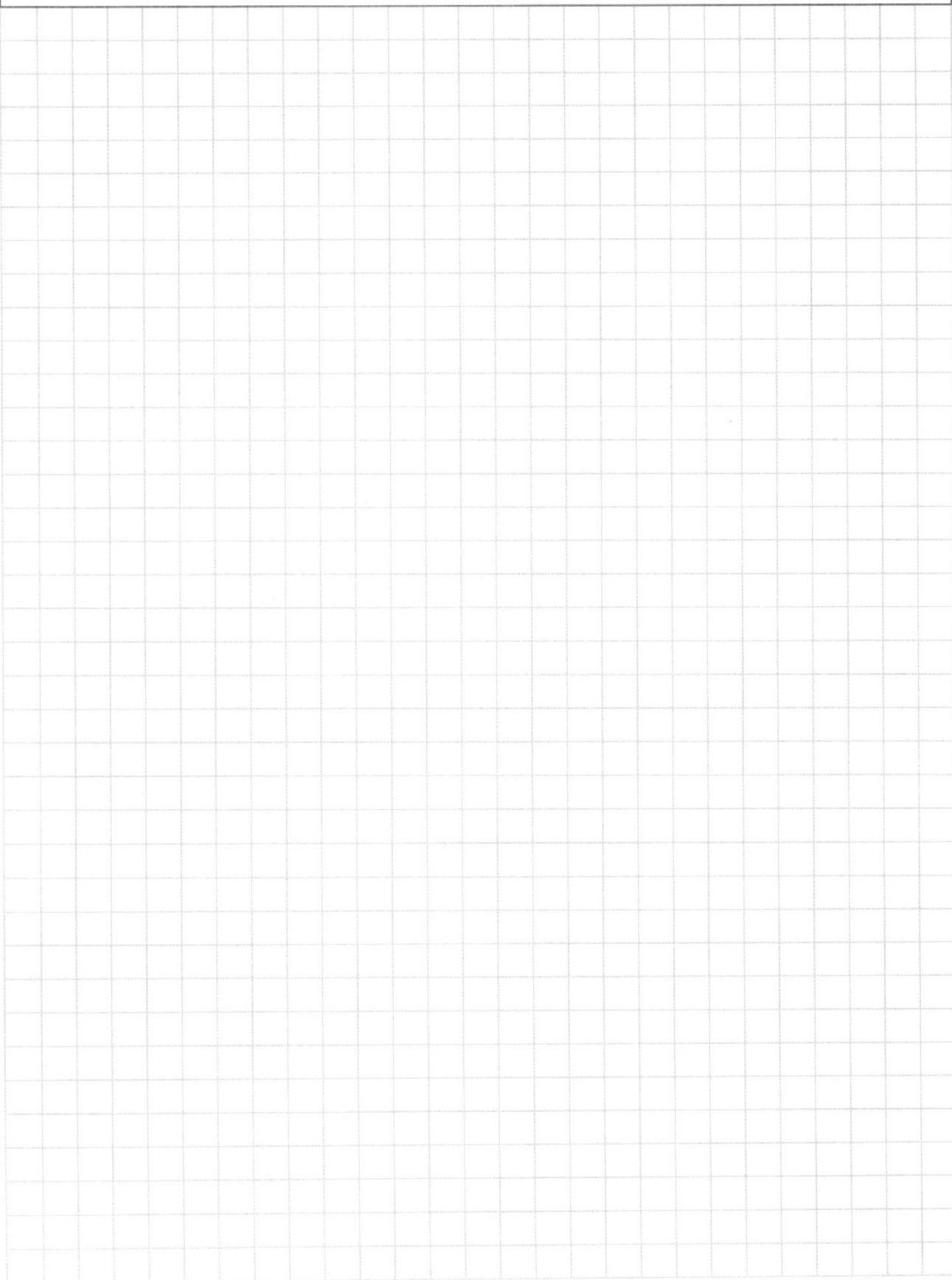
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



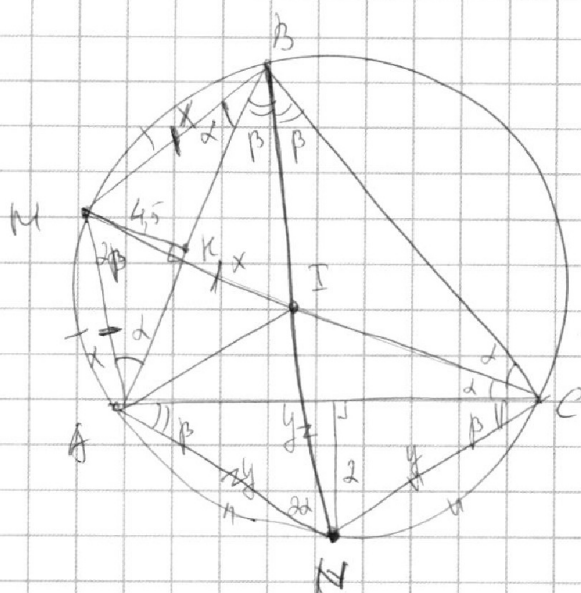
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AI = ?

$$\sin \alpha = \frac{4,5}{x}$$

$$\sin \beta = \frac{2}{y}$$

$$\frac{AI}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{y}{\cos \alpha}$$

$$AI = 2y \cdot \sin \alpha = 2y \cdot \frac{4,5}{x} = \frac{9y}{x}$$

$$\frac{AI}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{x}{\cos \beta}$$

$$AI = 2x \sin \beta = 2x \cdot \frac{2}{y} = \frac{4x}{y}$$

$$\frac{9y}{x} = \frac{4x}{y} \quad / \cdot xy$$

$$9y^2 = 4x^2$$

$$3y = 2x \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

$$AI = \frac{9}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{6}$$

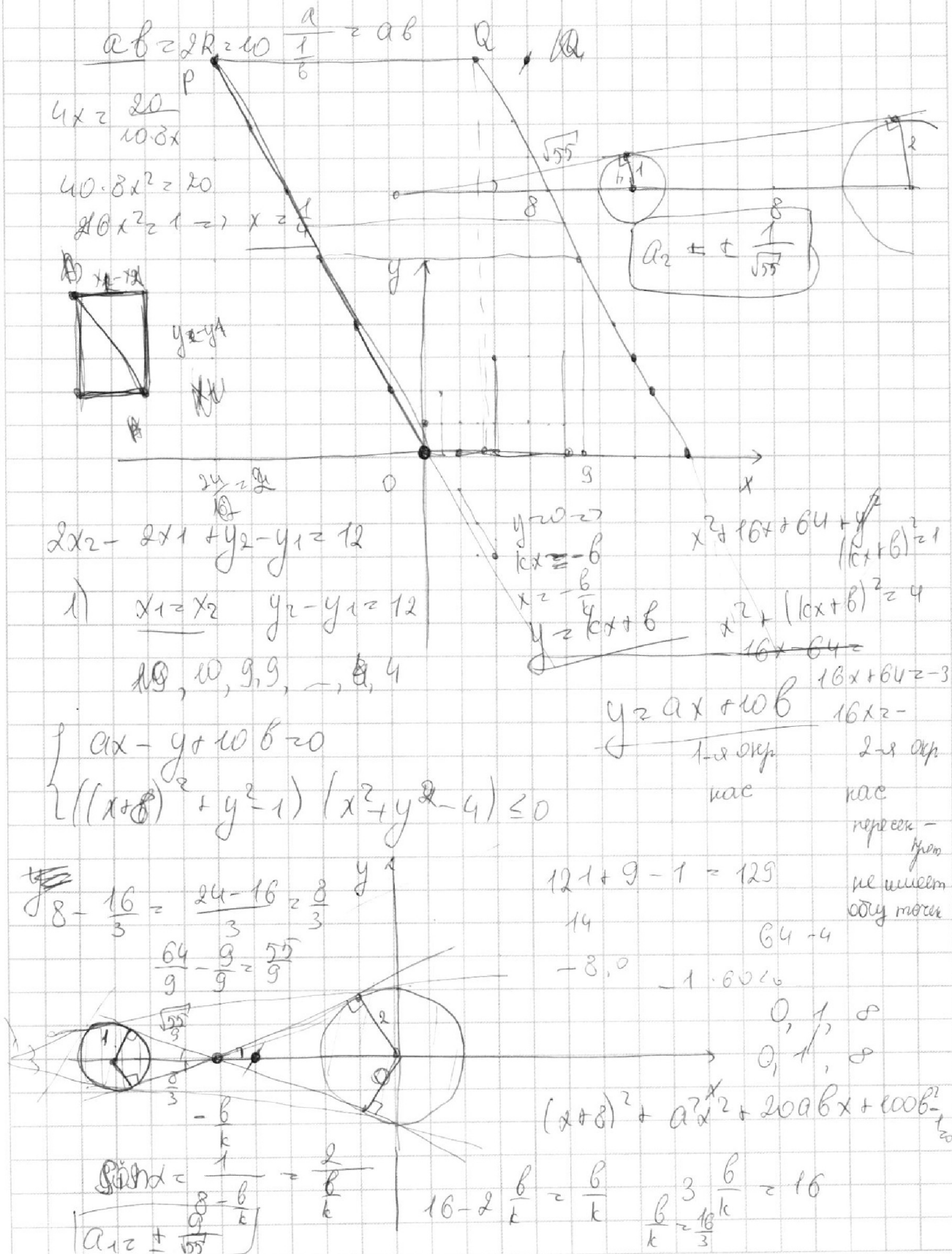
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



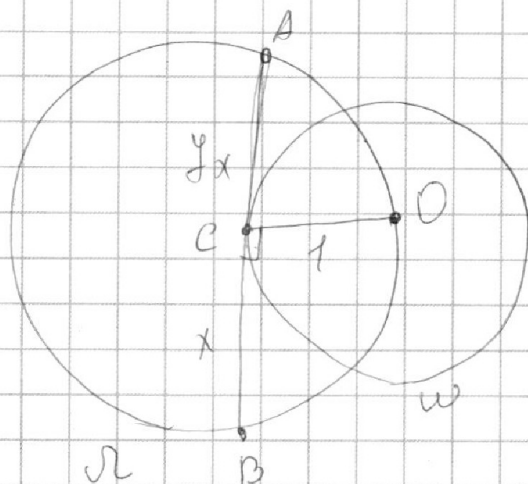
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

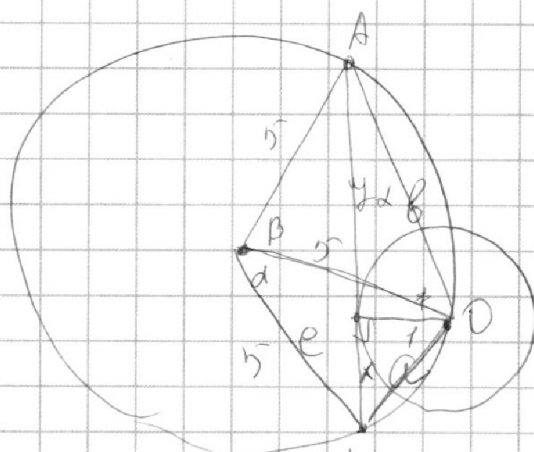
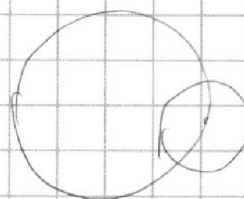
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AB = ?

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ R &= 5 \end{aligned}$$



$$a^2 = x^2 + 1$$

$$b^2 = 49x^2 + 1$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos \alpha = \\ &= 50(1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos \beta = \\ &= 50(1 - \cos \beta) \end{aligned}$$

$$x^2 + 1 = 50(1 - \cos \alpha)$$

$$49x^2 + 1 = 50(1 - \cos \beta)$$

$$64x^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$64x^2 = 50(1 - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha = \frac{-x^2 + 1 + 50}{2 \cdot 25} = \frac{-x^2 + 49}{50} = \frac{(-x + 7)(x + 7)}{50}$$

$$\cos \beta = \frac{-49x^2 + 1 + 50}{2 \cdot 25} = \frac{-49x^2 + 49}{50} = \frac{(7 - 7x)(7 + 7x)}{50}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 7^{14}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$abc \text{ мин.} - ?$$

$$\Rightarrow ac \geq 2^{20} \cdot 7^{34}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot 2^{14} \cdot 7^{14} \cdot 2^{20} \cdot 7^{34} = 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{64}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$pqst : 2$$

Пример.
 $a = 2^9 \cdot 7^{10}$

$$b = 2^5 \cdot 7^8$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{24}$$

$$abc \geq 2^{26} \cdot 7^{34}$$

② $\frac{a}{b}$ - несократ. $\Rightarrow (a, b) = 1$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$a+b : m$$

$$1+2 \geq 3$$

$$5-6 \cdot 2 = -7$$

$$m \text{ - мин.}$$

$$a^2-6ab+b^2 : m$$

$$5^3 - 6 \cdot 14 = 125 - 84 = 41$$

$$m \mid (a+b, a^2-6ab+b^2) \Rightarrow (a+b, -6ab-2ab) = (a+b, -8ab)$$

$$\Rightarrow (a+b, 8)$$

$$m_{\text{мин}} = 8$$

$$(a+b, ab) = 1$$

$$(a+b) \mid p, p \text{ - простое число}$$

$$ab \mid p \Rightarrow a \mid p, b \mid p$$

$$\text{НОД: } a \mid p \Rightarrow b \mid p \Rightarrow (a, b) \geq p$$

$$a \geq 3, b \geq 5$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{9+25-0 \cdot 15} = \frac{8}{34} = \frac{4}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{34} = \frac{4}{17}$$

③

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

a

b

$$a^2 - b^2 = 2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1) = 2 - 4x + 2$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

1) $a = b \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$

2) $a + b = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

$$\frac{4x^2 - 3x + 4}{2} \geq \frac{1}{4}$$

$$8x^2 - 6x + 8 \geq 1$$

$$8x^2 - 6x + 7 \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = \frac{9}{4} < 0$$

$$2\sqrt{61} < 30$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$4x - 4 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 - 44x + 4 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$41x^2 - 36x = 0$$

$$x \geq 0$$

$$x = \frac{36}{41}$$

$$\frac{D}{4} = 121 + 123 =$$

$$41 = 244 =$$

$$\frac{41}{3} = 4.61$$

$$\sqrt{29} - \sqrt{137} = -2$$

$$\sqrt{29} - \sqrt{137} = -14$$

$$\sqrt{29} = \sqrt{137} - 14$$

$$29 = 137 - 196 =$$

$$22 + 4\sqrt{61} < 123$$

$$4\sqrt{61} < 101$$

$$16.61 < 101^2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \\ x_2 &= \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \end{aligned}$$

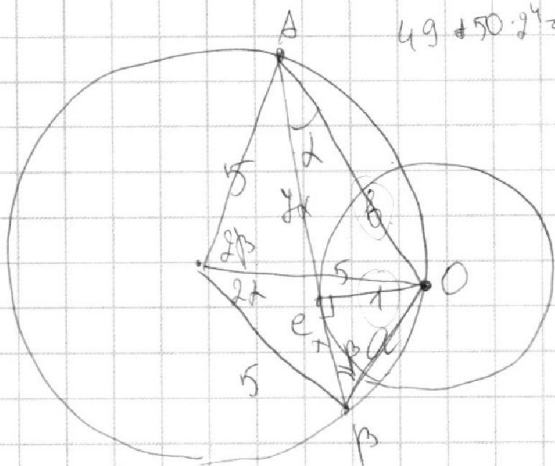
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49 + 50 \cdot 2^4 = 99 \cdot 2^8 \quad \frac{49x^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{49x^2 - 1}{b^2}$$

$$a^2 = x^2 + 1$$

$$b^2 = 49x^2 + 1$$

$$\frac{49x^2 + 1 - 49x^2 + 1}{49x^2 + 1}$$

$$a^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 50(1 - \cos 2\alpha) =$$

$$= 50(x - \cos x + 2 \sin^2 x) =$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$= 100 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$x^2 + 1 = 100 \cdot \frac{1}{49x^2 + 1}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{b^2}$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 625 + 4851 =$$

$$x^2 + 1 = 50 - 50 \cdot \frac{49x^2 - 1}{49x^2 + 1} =$$

$$= 50 \cdot \frac{2}{49x^2 + 1}$$

$$b = 4x = \frac{45}{ab \cdot 8x}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{1}{b} \cdot \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \cdot \frac{x}{b}$$

$$ab \cdot 8x^2 = 5 \quad 80x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$ab = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} = \boxed{AB = 2}$$

$$= \sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1} = 10$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50}{2^8} = 99$$

$$\frac{49}{2^8} + \frac{50}{2^8} = 99$$