



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Заметим, что $abc : 7^{39}$. Тогда пусть a имеет в своем разложении на простые множители 7^{12} , а $c - 7^{27}$. Таким образом ~~все~~ условия на кратность 7^{11} и 7^{18} выполняются и в abc будет минимальная возможная степень 7 .

Пусть a_2, b_2, c_2 - степени 2 в разлож. на простые множители a, b, c соотв.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 15 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ c_2 + a_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 15 + 17 + 23 = 55 \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \text{ хотя бы } 56, \text{ т.к. } a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}_{\text{нн}} = 0$$

$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2$ хотя бы 28 . Пример: $a_2 = 11, b_2 = 5, c_2 = 12$ (все условия выполнены)

Очевидно, что добавлять какие-то простые мн-м, кроме 2 и 7 , нет смысла, т.к. на них нет условий, но они увеличат abc .

Ответ: мин. возможн. произв. $abc = 7^{39} \cdot 2^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

Найдем НОД $(a+b, a^2-7ab+b^2)$ используя алгоритм Евклида:
 $(a+b, a^2-7ab+b^2) = (a+b, a^2-7ab+b^2 - (a+b)(a+b)) =$
 $= (a+b, -7ab-2ab) = (a+b, -9ab)$
т.е. вычли $(a+b)(a+b)$ раз

Заметим, что $a+b \nmid a$ и $a+b \nmid b$, т.к. a и b - взаимно
просты. При этом $9ab$ делится на a, b и 9

\Rightarrow наибольшее возможное $m = 9$.

Пример: $a=4, b=5$: $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-140+25} = \frac{9}{-99} = \frac{1}{-11}$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

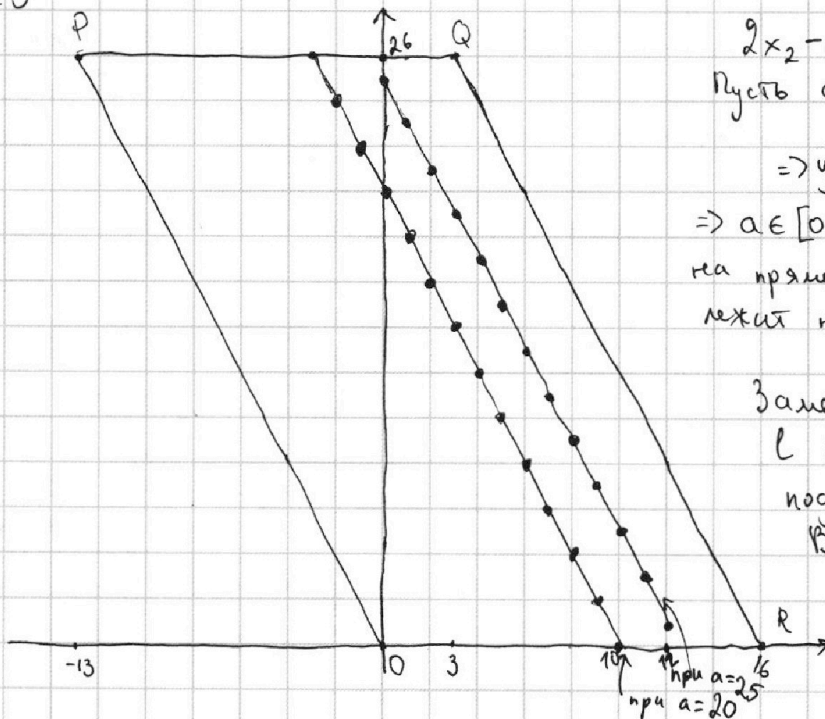
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

Пусть $a = 14 + 2x_1 + y_1$

$$\Rightarrow y_2 = a - 2x_2 \text{ (прямая } l)$$

$\Rightarrow a \in [0; 32]$, т.к. PO лежит на прямой $y = -2x$, а QR лежит на прямой $y = 32 - 2x$.

Заметим, что при a -чет, l будет пересекать 14 подходящих точек (т.е. точек B, которые подходят в пару с этим a). А при a -нечет, l будет пересекать 13 подходящих точек.

(т.е. сколько точек A задают по a)

Рассмотрим, сколько раз a принимает каждое своё значение. Заметим, что $a \geq 14$, т.к. иначе $y_1 = -2x_1$, где $x_1 \in [1; 14]$, а такая прямая будет полностью вне PQRO, т.к. PO является $y = -2x$. При наблюдении возможна $a = 32$:

$$32 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$y_1 = 18 - 2x_1 \Rightarrow \text{подойдет } 14 \text{ точек A}$$

$a \leq 32$ подходит, т.к. даже при $a = 32 = 32 - 2x_1 + y_1$

$$y_1 = 18 - 2x_1 \text{ (подходит)}$$

$\Rightarrow a \in [14; 32]$. При этом при a -чет, подойдут 14 возможных точек A, которые задают это самое a , и для каждой такой точки A подойдут 14 точек B, т.е. пар (A, B) - $14 \cdot 14$ для a -чет. Аналогично для a -нечет пар (A, B) - $13 \cdot 13$. Всего четных a - 10, а нечетных a - 9.

(Заметим, что прямые "из точек B" и "из точек A" не пересекаются, т.к. первая прямая задается как $y_2 = a - 2x_2$, а вторая как $y_1 = (a - 14) - 2x_1$, $a \neq a - 14$)

$$\Rightarrow \text{ответом будет: } 10 \cdot 14 \cdot 14 + 9 \cdot 13 \cdot 13 = 1960 + 1521 = 3481$$

Ответ: 3481 пара



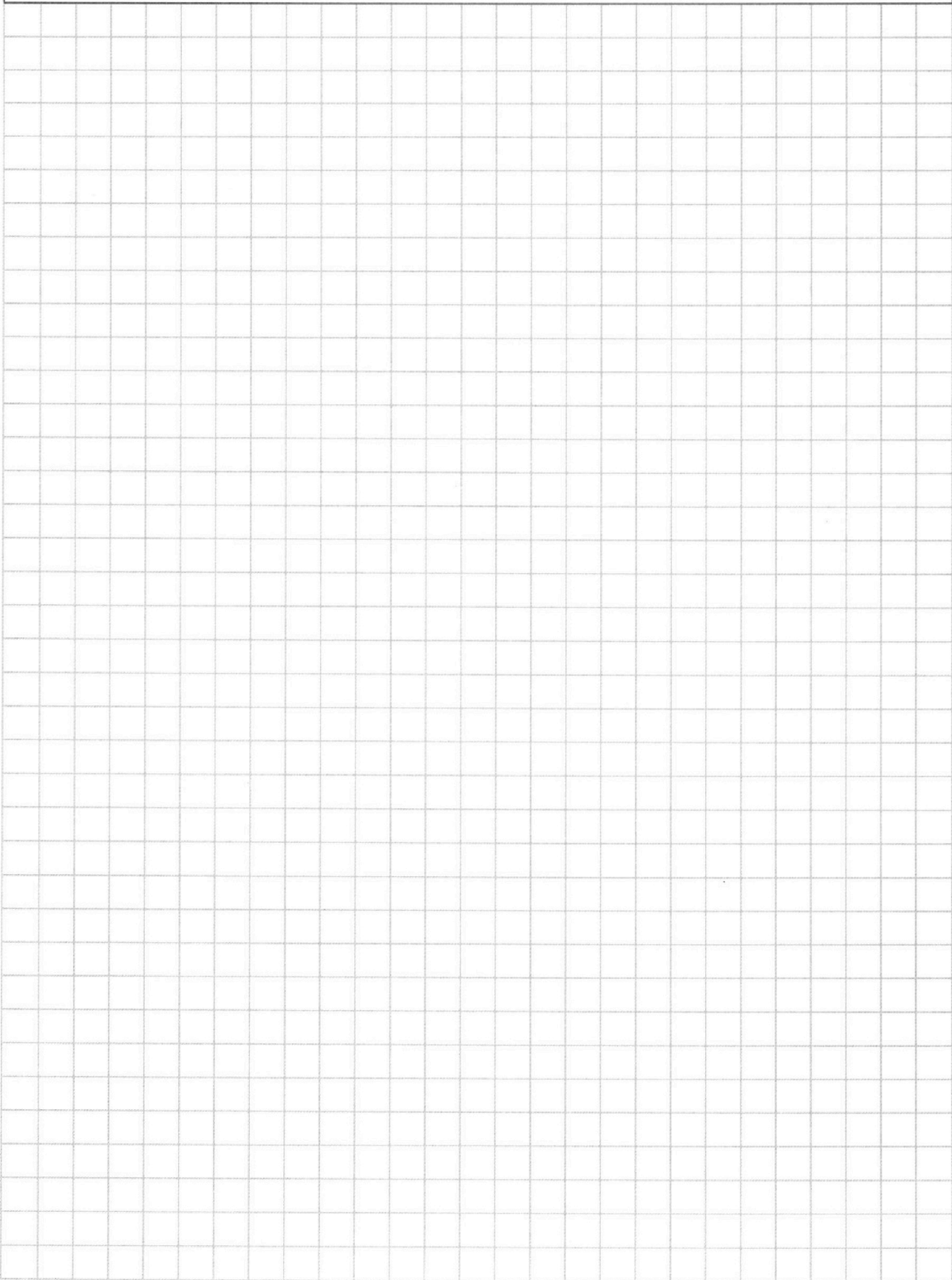
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чертовик

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \rightarrow y = 8b - ax \\ (x^2 + y^2 + 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 24y + 144 - 16 &= \\ &= x^2 + y^2 - 24y + 128 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 24 \\ 80 \\ 182 \end{array}$$

$$(x^2 + (8b - ax)^2 - 1)(x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 24y + 128) \leq 0$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1 \leq 0$$

$$\begin{aligned} x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 192b + 24ax + 128 &= \\ = (a^2 + 1)x^2 + (6ab + 24a)x + (64b^2 - 192b + 128) \end{aligned}$$

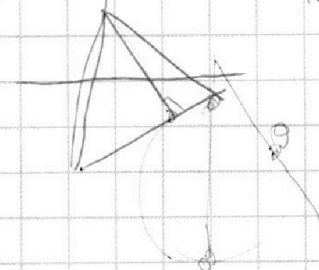
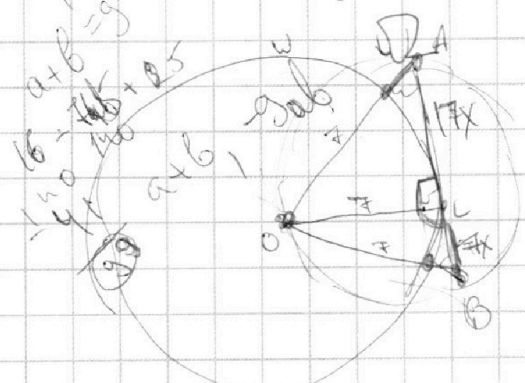
$$(a^2 + 1)x^2 - 16abx + (64b^2 - 1) \leq 0$$

$$D = 256a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) \Rightarrow 4a^2 - 256b^2 + 4 = 0$$

$$x = \frac{16ab \pm 2\sqrt{a^2 - 64b^2 + 1}}{2(a^2 + 1)}$$

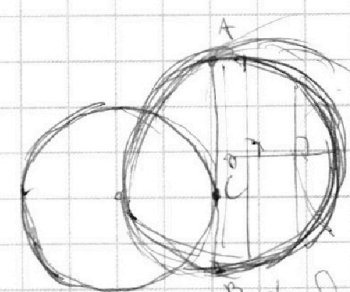
$$\frac{8ab + \sqrt{D}}{a^2 + 1} \leq x \leq \frac{8ab - \sqrt{D}}{a^2 + 1}$$

$$a^2 = 64b^2 - 1$$

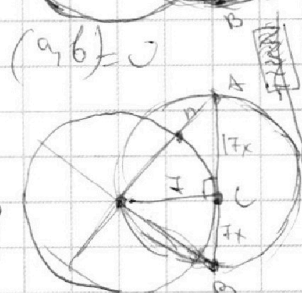


$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 17 \\ 680 \\ 280 \end{array}$$

$$17x + 7x = 24x$$

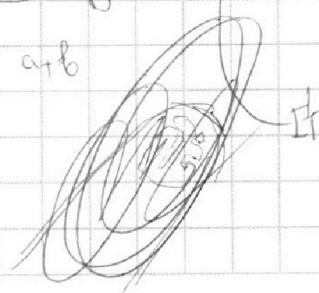


$$\begin{aligned} 289x^2 + 49 &= 49 + 14n + n^2 \\ 19x^2 + 49 &= 49 + 14m + m^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (7+x)^2 + 7^2 &= (7+n)^2 \\ (7+x)^2 + 7^2 &= (7+m)^2 \\ 14m &= 49x^2 \\ 14n &= 289x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) &=? \\ \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} & \cdot (a+b, -8ab) \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

черновик

$a+b, -9ab$

$D = 36 - 24 = 12$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

$$9x + \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 + 36x^2 - 36x + 2 + 18x\sqrt{\dots} = 1 + 3x^2 + 9x + 1 + 2\sqrt{\dots}$$

$(3 \pm \sqrt{3})x -$

$\frac{15}{2} = 33$

$8(x^2 - 9x + 1) =$

$(9x - 1)^2 - 1$

ab

$(a+i)b + a(b+i)$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 + 9x$$

$(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (6 - 2\sqrt{6})x$

$b-2$



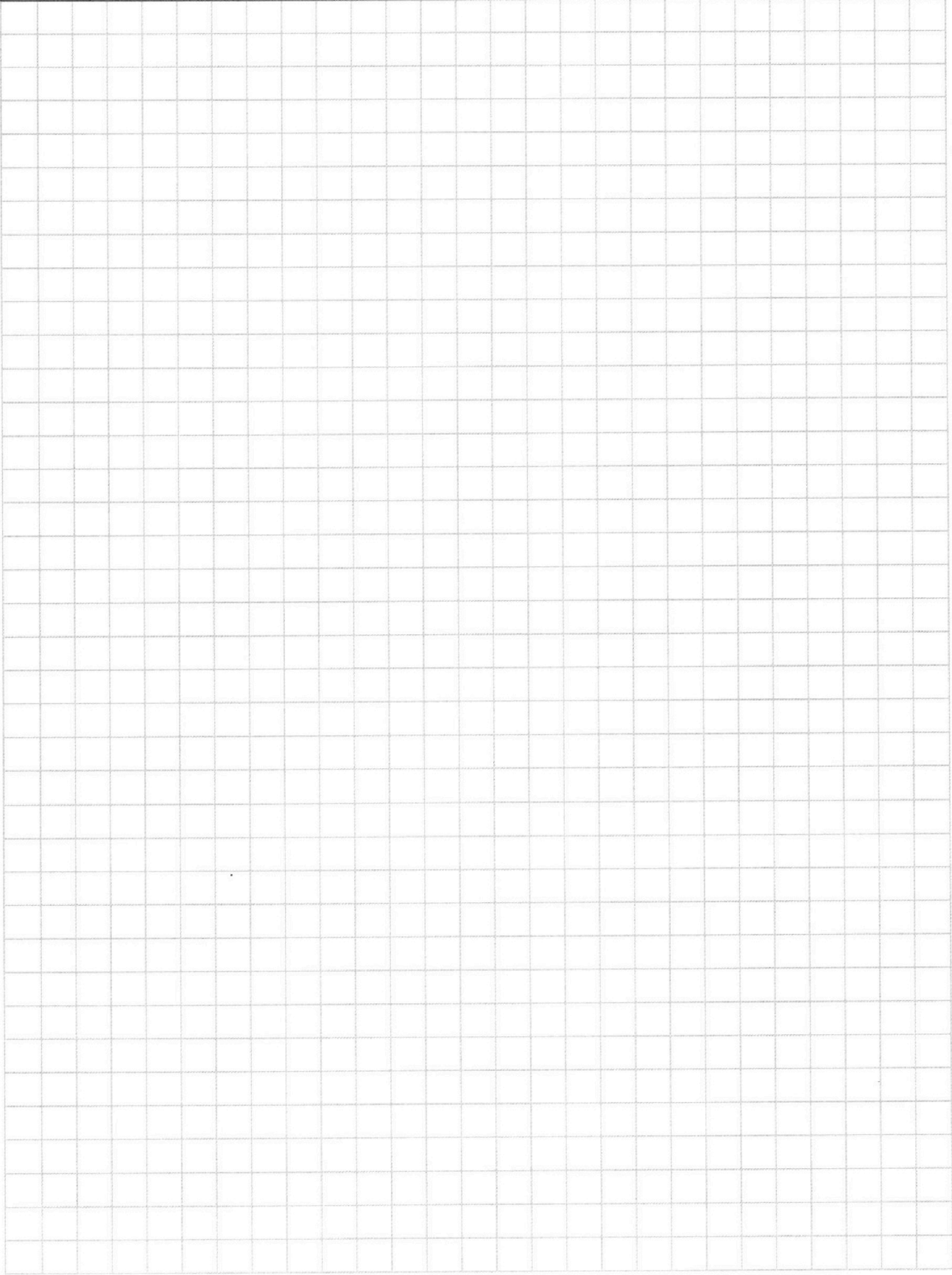
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

