



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

У a, b, c — медианы треугольника, кресты α и β , если медианы a, b и c приложены к началу координат, то их сумма равна нулю. А α и β — углы при вершине C в треугольнике MCB , где M — середина AB . Тогда из-за симметрии мы имеем:

$$a_1 + b_1 = 14, c_1 + b_2 = 13, a_1 + c_1 = 20$$

Условие:

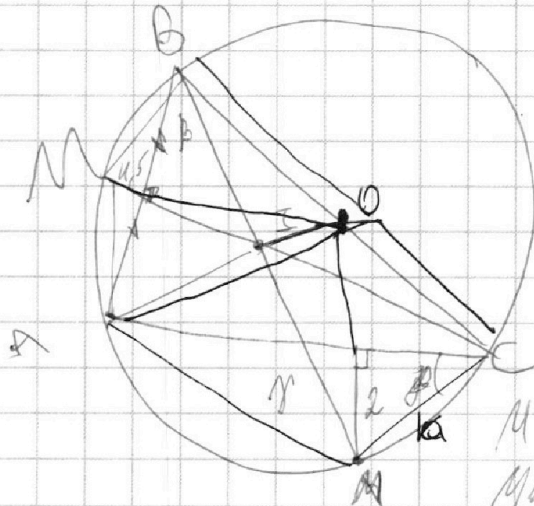
$$\frac{\sin^2 \beta}{\sin \gamma} = 2,25$$

$$\frac{\sin \beta = 1,5}{\sin \gamma}$$

$$2,5 \sin^2 \gamma = 4,5 \sin^2 \beta$$

$$MC = \frac{2}{\sin \beta} = 2R = \frac{4,5}{3 \sin \beta}$$

$$\frac{MC}{\sin \beta} = 2R$$



$$MC \cdot \sin \beta = 2$$

$$MB \cdot \sin \gamma = 4,5$$

$$\sin \beta = 1,5 \sin \gamma$$

$$MC \cdot 1,5 \sin \gamma = 2$$

$$MB \cdot \sin \gamma = 4,5$$

$$\frac{MC \cdot 1,5 = 2}{MB \cdot 4,5}$$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



Задача 1

а) $2^{14} \cdot 4^4$ ~~знаем, что abc - это a~~ Заметим, что для того, чтобы abc было наименьшим, у чисел a, b, c не должно быть делителей, отличных от 2 или 4 (иначе можно поделить числа на эти делители и для них всё равно будет выполняться условие задачи). Тогда пусть $a = 2^{a_1} \cdot 4^{a_2}$, $b = 2^{b_1} \cdot 4^{b_2}$, $c = 2^{c_1} \cdot 4^{c_2}$. Из условия делимости:

$a_1 + b_1 \geq 14$, $c_1 + b_1 \geq 14$, $a_1 + c_1 \geq 20$. Поскольку числа a, b, c - натуральные, то $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ - целые неотрицательные.

$2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 34$, $b_1 + c_1 \geq 14$, $a_1 + c_1 \geq 20$. Сложим все не равенства, тогда $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 14 + 14 + 20 = 51$ - нечетное число. Тогда

$2(a_1 + b_1 + c_1)$

Верно, что $2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 52$, $a_1 + b_1 + c_1 \geq 26$. Если ~~хотим~~ ^{предположим}, чтобы

abc было наименьшим, нужно подобрать наименьшие возможные значения чисел a, b, c . Тогда $a_1 + b_1 + c_1 = 26$. Если $b_1 + c_1 = 20$, то $a_1 = 26 - 20 = 6$.

$a_1 + b_1 \geq 14$, $b_1 = 6$, $a_1 \geq 8$, $a_1 = 8$. $a_1 + c_1 = 20$, $a_1 = 8$, $c_1 = 20 - 8 = 12$. $c_1 + b_1 = 12 + 6 = 18 < 14$ - верно. Аналогично из-за делимости: $a_2 + b_2 \geq 10$, $b_2 + c_2 \geq 14$,

$c_2 + a_2 \geq 34$. Тогда $a_2 + b_2 + c_2 \geq 34 + 10 + 14 = 64$, $a_2 + b_2 + c_2 \geq 32$, но ~~то~~

при этих равенствах невозможно так как $a_2 + c_2 \geq 34$, но задано, что предельное условие, может выполняться, например, при $b_2 = 0$,

$c_2 + a_2 = 34$, $a_2 = 14$, $c_2 = 20$. (напомним, что abc - это произведение степеней 2 и 4, а не их конкретные значения для каждого числа. Временные значения степеней в формуле приведены, чтобы доказать возможность такой ситуации.) Тогда заметим, что при

наименьших значениях abc , $a_1 + b_1 + c_1 = 26$, $a_1 + b_2 + c_2 = 34$, тогда, поскольку у чисел a, b, c нет других делителей, $abc = 2^{26} \cdot 4^{34}$

Ответ: $2^{26} \cdot 4^{34}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2. Ответ: $m=8$.

$\frac{a}{b}$ несократима, значит a и b взаимно просты числа.

Пусть $a+b:m$ и $a^2-6ab+b^2:m$, тогда заметим, что
 a и b взаимнопросты с m , потому что если у a и m , есть делитель
 p , то делимость $a-b:m$, то $a+b:p$, то $a:p$, то a и b взаимно
просты. Так же $(a+b)^2:m$, $a^2+2ab+b^2:m$. Тогда $a^2+2ab+b^2-a^2-6ab+b^2$
 $8ab:m$. $a+b:m$, $a \equiv -b$, тогда из $8ab \equiv 0$ $8ab:m \equiv -8b^2 \equiv 0$.
 $-8b^2 \equiv 0$, тогда $8b^2:m$, аналогично $8a^2:m$. Но $8ab:m$.

Если допустить, что a и b взаимнопросты с m , тогда
можно сказать, что $8b^2:m$, $8:m$, а значит $8 \geq m$. Тогда
посмотрим левую часть m для $m=8$. Да может, например

при $a=3$ и $b=5$, тогда $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+5}{9+25-6 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{8}{34-90} = -\frac{8}{56}$, значит
что $56=8$ и $8=8$.

Ответ: $m=8$ - наибольшее возможное значение m .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

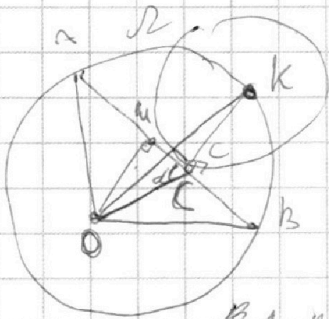
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3



Пусть O - центр окружности ω , тогда пусть M - середина AB , тогда из $OA = OB$ (радиусы) следует $\triangle ABO$ - равнобедренный, тогда OM также и высота. $\frac{AC}{CB} = 4$, $AC = 4CB$. $AC + CB = AB$, тогда

$AB = 8CB$. M - середина AB , тогда $AM = 8CB$, $4CB$, $MC = 8CB - 4CB = 4CB$. Заметим что тогда

в $\triangle AOM$ по теореме Пифагора $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} =$

$= \sqrt{25 - 16CB^2}$. в $\triangle OCM$ $OC = \sqrt{OM^2 + MC^2} = \sqrt{25 - 16CB^2 + 16CB^2} = \sqrt{25 - 4CB^2}$

Пусть K - середина AC , тогда $CK = 1$ (радиус ω) Пусть $\angle OCA = \alpha$.

Тогда $\angle OCK = \alpha + 90^\circ$, так как $CK \perp AB$ (AB касается ω). По теореме косинусов в $\triangle OCK$: $OK^2 = OC^2 + CK^2 - 2 \cdot OC \cdot CK \cdot \cos \angle OCK$

$OK = 5$ (радиус ω), $CK = 1$ (радиус ω) $\cos \angle OCK = \cos(\alpha + 90^\circ) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$. Тогда $25 = 25 - 4CB^2 + 1 + 2 \cdot OC \cdot 1 \cdot \sin \alpha$, заметим, что

в $\triangle OCM$ $OC \cdot \sin \alpha = OM$, так как это высота в $\triangle OCA$ с углом α . Тогда $-4CB^2 + 1 + 2OM = 0$

$-4CB^2 + 1 + 2\sqrt{25 - 16CB^2} = 0$ $2\sqrt{25 - 16CB^2} = 4CB^2 - 1$, возведем обе

$4(25 - 16CB^2) = 16CB^4 - 8CB^2 + 1$

$49CB^4 + 4CB^2 - 100 = 0$ $49CB^4 + 4CB^2 - 100 = 0$ - квадратное уравнение относительно

CB^2 . $D = 50^2 + 99 \cdot 4 \cdot 98 = 2500 + 19404 = 21904 = 148^2$

Тогда $CB^2 = \frac{-50 + 148}{49 \cdot 2} = \frac{98}{98} = 1$, другой корень меньше

нуля, не подходит, тогда $CB^2 = 1$, $CB = 1$, так как $CB > 0$.

$AB = 8CB = 8$.

Ответ: $AB = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

Ограничения: $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$, так находится под корнем.
Найдем корни уравнения $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1. \quad x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{5-1}{4} = 1; \quad \text{Тогда, } x \notin (1; \frac{3}{2}).$$

Аналогично $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$. $D = 4 - 2 \cdot 4 \cdot 1 = -4 < 0$, значит $2x^2 + 2x + 1$ всегда > 0 .

Возведем обе части в квадрат:

$$(2x^2 - 5x + 3) + (2x^2 + 2x + 1) - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 49x^2 - 28x + 4.$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 49x^2 - 28x + 4, \text{ сократим на } 4 \text{ и возведем в квадрат.}$$

$$(-2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)})^2 = (45x^2 - 25x)^2$$

$$4(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 \cdot 5x + 6x^2 + 6x + 3) = 45^2 x^4 - 2 \cdot 45 \cdot 25x^2 + 25^2 x^2$$

$$2009x^4 - 2226x^3$$

Пусть $2x^2 - 5x + 3 = a$, $4x - 2 = b$, тогда

исходное неравенство переписывается в виде

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b} = -b, \text{ возведем обе части в квадрат.}$$

$$a + a + b - 2\sqrt{a^2 + ab} = b^2, \quad 2a + b - b^2 = 2\sqrt{a^2 + ab};$$

$$4a^2 + b^2 + b^4 + 4ab - 4ab^2 - 2b^3 = 4a^2 + 4ab. \quad b^2 + b^4 - 4ab^2 - 2b^3 = 0.$$

$$a = \frac{b^2 + b^4 - 2b^3}{4b^2} = \frac{1 + b^2 - 2b}{4} = \frac{(b-1)^2}{4}, \text{ подставим исходные значения:}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = \frac{(x-3)^2}{4} \quad 8x^2 - 20x + 12 = 49x^2 - 42x + 9$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$D = 22^2 + 3 \cdot 4 \cdot 41 = 184 + 492 = 676 = (26)^2.$$

$$x_1 = \frac{22 + 26}{82} = \frac{11 + 13}{41} < 1, \quad x_2 = \frac{22 - 26}{41} < 1, \text{ оба}$$

корня удовлетворяют ограничениям

Ответ: $x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}, \quad x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}.$

45	25
45	125
225	50
180	625
2025	
25	
45	
2250	

22	41
22	12
44	82
44	41
484	492
2	9+14
12	14
16	62
16	16

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5.

Заметим, что данные параллельные образуют пересек. семейство прямых $y = -2x + a$ (там точки $P_1(a)$, $y = -2x$ ($P_1(0)$), $y = -2x - 30$ ($R_1(0)$), $y = 0$ ($R_1(0)$). Тогда если точка лежит внутри параллелограмма, ~~то~~ про неё верно, что если x и y её координаты, то $y \geq 0$, $y \geq -2x$, $y \leq -2x + 30$, $y + 2x \geq 0$, но $y - 2x \leq 30$.

Заметим, что если точка лежит ~~на границе параллелограмма~~ внутри параллелограмма и ~~у неё координаты целые~~, то она лежит на прямой параллельной $y = -2x + a$. Заметим, что через любую точку, лежащую внутри параллелограмма, можно провести прямую, параллельную сторонам этого параллелограмма. Тогда для прямой можно считать, что она лежит внутри параллелограмма или a принадлежит $[0; 30]$.

$y = -2x + a$, где $a \in [0; 30]$, a - целое, на которой будут ~~лежать~~ ~~целые точки~~. ~~Всего параллельных прямых будет 31, из них одна будет прямой $y = -2x$ параллельной оси Ox , а остальные 30 параллельных прямых будут параллельными сторонам параллелограмма.~~ ~~Решим $y = -2x + a$, где $a \in [0; 30]$, a - целое, на которой будут лежать целые точки.~~ ~~Заметим, что на прямой $y = -2x + a$ лежат целые точки тогда, когда a - целое, то есть $a \in [0; 30]$, a - целое. Тогда заметим, что на прямой $y = -2x + a$ лежат целые точки тогда, когда a - целое, то есть $a \in [0; 30]$, a - целое. Тогда заметим, что на прямой $y = -2x + a$ лежат целые точки тогда, когда a - целое, то есть $a \in [0; 30]$, a - целое.~~

Заметим, что у 16 этих прямых есть по две целые точки на границах параллелограмма, поскольку $0 \leq y \leq 24$, то на них будет $24 - 1 = 13$ целых точек, а на остальных 15 прямых будет 12 целых точек. Если точка лежит на прямой $2x + y = a$, то ~~она~~ ~~лежит~~ ~~внутри~~ ~~параллелограмма~~ все точки лежат на прямой $2x + y = a = 12$, если такая точка лежит внутри параллелограмма. ~~Тогда заметим, что на прямой $2x + y = a$ лежат целые точки тогда, когда a - целое, то есть $a \in [0; 18]$, a - целое.~~

Тогда заметим, что если точка лежит на прямой $y + 2x = a$ и $a \in [2; 18]$, то ей тоже можно было сказать две целые точки, если бы разность координат различалась на 12, если $a \in (0; 12)$ или $(18; 30)$, то для них невозможно подобрать прямую, параллельную y и x координат $a \in [12; 18]$, тогда остается лишь посчитать ~~их~~ ~~количество~~ ~~на~~ ~~каждой~~ ~~прямой~~ ~~с~~ ~~целыми~~ ~~координатами~~ ~~внутри~~ ~~параллелограмма~~.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (проблемная)

от 12 до 18 и числа числа и три нечетных. Тогда
для каждой из точек с x прямой с четными коэффициентами
будет по 2 прямых, для которых x является четным числом
точек, тогда получили пары, $4 \cdot 2 \cdot 12 = 96$ пар
(так как прямые вида $2x + y = a$, то разность $2x_1 + y_1 = a_1$ и $2x_2 + y_2 = a_2$
разность $2x_1 + y_1 - 2x_2 - y_2 = a_1 - a_2$), тогда будет
 $4 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 13 = 169 \cdot 8$ пар, и еще прямых с четными коэффициентами
и аналогично будет $4 \cdot 2 \cdot 12^2 = 144 \cdot 8$ пар.

Тогда всего $169 \cdot 8 + 144 \cdot 8 = 81(169 + 144) = 8 \cdot 313 =$
 $= 2504$

Ответ: 2504 пары.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 Выразим y .

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \quad y = 10b + ax$$

$$((x+8)^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1)(x^2 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 4) \leq 0$$

$$x^2 + 16x + 64 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx - 1$$

$$(x^2 + y^2 + 63 + 11x)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0.$$

~~Все эти случаи рассматривать не надо. Если $x^2 + y^2 - 4 > 0$ то $x^2 + y^2 + 63 + 11x > 0$ и наоборот. Поэтому не надо рассуждать так: тогда $x^2 + y^2 + 63 + 11x > 0$ и $x^2 + y^2 - 4 > 0$.~~

$$(x^2 + 63 + 11x + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx)(x^2 - 4 + 100b^2 + a^2x^2 + 20abx) \leq 0.$$

Эти выражения имеют два общих корня, а другие разные корни. Корни отрицательны, а по условию оба

выражения должны быть неотрицательными. Значит все значения

исключены.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

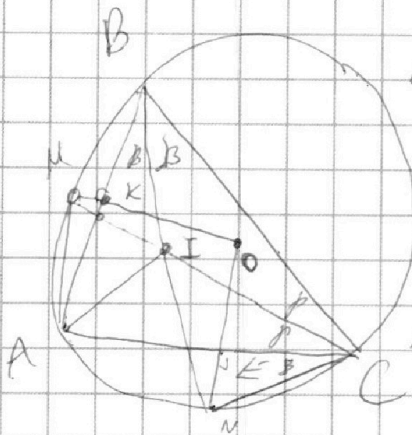
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4



M и N - середины сторон AB и AC , значит BM и CN - медианы, тогда BM и CN пересекаются в I . Также заметим, что медиана BM перпендикулярна к средней линии KN (так как $KN \parallel BC$), значит $BM \perp KN$. Аналогично $CN \perp KN$. Тогда $BM \parallel CN$ и $KN \perp BM$. Тогда OM и ON - средние линии BM и CN , где O - центр описанной окружности.

$\triangle ABC$. Пусть K и E - середины AB и AC , тогда по условию $MK = 4,5$, $EN = 2$. Пусть $\angle B = 2\alpha$, $\angle C = 2\beta$. Тогда в $\triangle NEC$ $NE = CN \cdot \sin \beta$, $2 = CN \cdot \sin \beta$. По теореме синусов $\frac{NC}{\sin \beta} = 2R$, где R - радиус описанной окружности.

$\triangle ABC$. Также $\frac{AM}{\sin \gamma} = 2R$ (там $\sin \gamma = \sin \alpha$). Тогда $\frac{NC}{\sin \beta} = \frac{AM}{\sin \alpha}$

$NC = \frac{2}{\sin \beta}$, $AM = \frac{4,5}{\sin \alpha}$ так как $\triangle AKM$ прямоугольный с углом α .

Тогда $\frac{2}{\sin^2 \beta} = \frac{4,5}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \frac{4,5}{2} = 2,25$, α и $\beta < 90^\circ$, так

как это видно из рисунка, тогда $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$, $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1,5$. $\sin \alpha = 1,5 \sin \beta$. $CN = \frac{2}{\sin \beta}$

$AM = \frac{4,5}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin \beta}$, тогда $\frac{AM}{CN} = \frac{3}{2}$, $AM = 1,5 CN$.

По условию отрезки $IN = AN = CN$, $AM = MI = MB$. $\triangle MIB$ равнобедренный, тогда также $\angle BMA = \angle BAC$, отсюда

сама середина дуги. Тогда, по теореме косинусов для

$\triangle MIA$. $AI^2 = MI^2 + AN^2 - 2AN \cdot MI \cdot \cos 2\beta$

$AI^2 = 2CN^2 + 2CN^2 - 4CN^2 \cdot \cos 2\beta$. $AI^2 = 4CN^2(1 - \cos 2\beta) = 4CN^2 \cdot 2\sin^2 \beta = 8CN^2 \sin^2 \beta$. $AI = 2CN \sin \beta$. $AI = \frac{2 \cdot 2}{\sin \beta} \sin \beta = 4$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

$$AI^2 = 2CN^2 - 2CN^2 \cos^2 \gamma = 4CN^2 \sin^2 \gamma = 4 \cdot \left(\frac{2}{\sin \gamma}\right)^2 \sin^2 \gamma = 16$$
$$= \frac{16}{\sin^2 \gamma} \cdot 4 \cdot \frac{1}{\sin^2 \gamma} \cdot \sin^2 \gamma = \frac{16}{\sin^2 \gamma} \cdot 4 \cdot \sin^2 \gamma = 64$$

Проверка: $\cos \gamma = \frac{2}{2,25} = \frac{8}{9}$, $\sin^2 \gamma = 1 - \frac{64}{81} = \frac{17}{81}$, $AI^2 = 16 \cdot \frac{81}{17} = \frac{1296}{17}$

$$AI^2 = 36, \quad AI = 6$$

ОТВЕТ: 6.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



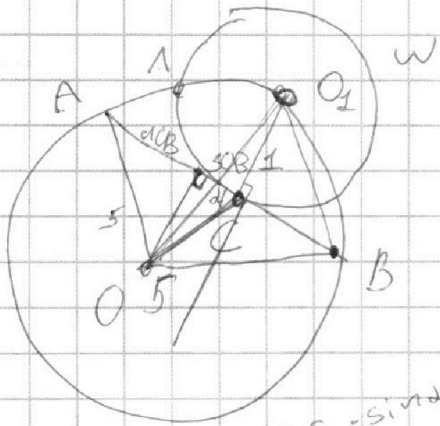
Задача 6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ax = y - 10b \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y - 10b}{a}$$

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$ и $(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$. Вокруг центра окружности $(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ или $x^2 + y^2 < 4$, $x+8+y^2 \geq 1$ и $x^2 + y^2 > 4$ и $(x+8)^2 + y^2 < 1$ и $x^2 + y^2 < 4$

Пусть $(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$, тогда подставим $x = \frac{y - 10b}{a}$,
 $\frac{(y - 10b)^2}{a^2} + 16y - 160b + 64 + y^2 - 1 = 0$

Чертовски

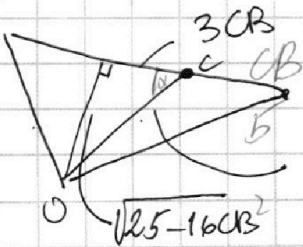


~~AB = 8~~?
Тогда $AB = \frac{148}{3} = 49\frac{1}{3}$
 $AC = CB = 25$

$\frac{AC}{CB} = 4$
 $AC = 4CB$
 $AB = 8CB$

$OC = \sin \alpha = \sqrt{25 - 16CB^2}$
 $OC^2 = 25 - 16CB^2$

$\beta \triangle O_1 OC$



$OC^2 = 25 - 16CB^2 + 9CB^2 = 25 - 7CB^2$

$OC \cos \alpha = 3CB$

$OC^2 + CB^2 + 2OC \cdot CB \cos \alpha = 5$

$25 = 1 + 25 - 4CB^2 + 2\sqrt{25 - 16CB^2}$
 $25 - 4CB^2 + CB^2 + 6CB^2 = 5$

$1 - 4CB^2 + 2\sqrt{25 - 16CB^2} = 0$ $25 - 12CB^2 = 5$
 $CB^2 = \frac{20}{12} \Rightarrow CB = \frac{5}{3}$

$500 - 64CB^4 = 49CB^4 - 19CB^2 + 1$
 $49CB^4 + 50CB^2 - 99 = 0$
 $CB^2 = 0$ $2500 + 99 \cdot 4 = 99$

$\frac{89}{39} \frac{6}{51}$

$\frac{19404}{2500}$
 $\frac{21904}{4}$

$\frac{21904}{169} \frac{44}{4}$

$\frac{1130}{1130}$
 $\frac{142}{142}$
 $\frac{142}{142}$
 $\frac{142}{142}$
 $AB = 8$



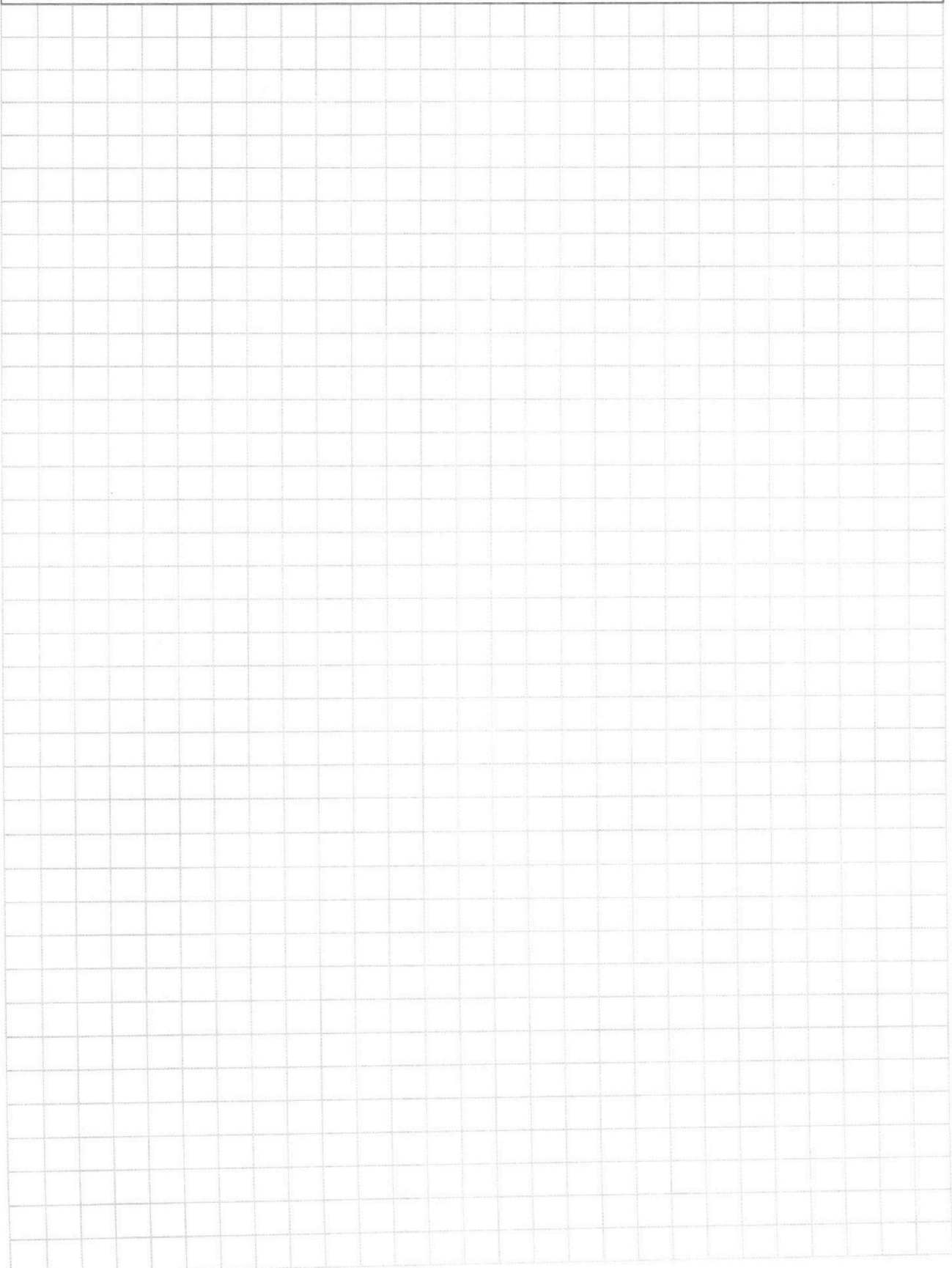
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$AC = 4CB$
 $AC \cdot CB = 4CB^2$
 $w \quad OC$

$\frac{AC}{CB} = 4$
 $AC = 4CB$

$\Delta \approx 15$
 $y = -2x + 15$
 $x = 0$
 $x = 7.5$

$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{5}{\cos \alpha}$
 $OB = \frac{5}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$
 $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$
 $OB = \frac{5}{\sin 2\alpha}$
 $OB = 10$
 $\frac{OB}{\sin \alpha} = 10$
 $\frac{10}{\sin \alpha} = 10$
 $\sin \alpha = 1$
 $\alpha = 90^\circ$

$12 - 12 = 0$
 $12^2 + 2x^2 = 720$
 $y = kx + b$
 $b = 0$
 $-12 \cdot 2$

$\frac{4}{11} \frac{4}{11} \frac{4}{11} \frac{4}{11}$
 $\frac{16}{121} \frac{16}{121} \frac{16}{121} \frac{16}{121}$
 $\frac{256}{14641}$

$2 \sin \alpha - 1 = \dots$
 $\sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 4 \sin \alpha \cos \alpha$
 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$
 $\sin^2 \alpha (1 - 2 \cos 2\alpha) + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$
 $\sin^2 \alpha - \cos 2\alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 1 - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$

$y \geq 0$
 $y \leq 15$
 $-2x + 15 \geq 0$
 $-2x \geq -15$
 $x \leq 7.5$
 $2x + y \leq 15$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$a^2 + 2ab + b^2 : m^2$$

$$8ab : m^2$$

$$a+b : m$$

$$a+b = mk$$

$$8ab = mn$$

$$a = mk - b \rightarrow 8b(mk - b) = mn$$

$$8b^2 : m \quad (8a^2 : m)$$

$$8ab : m, \text{ арифметическая}$$

$$8b(a-b) : m$$

Если $b : m$, то $a : m$, тогда $8 : m$.

Если a : делится m , b не делится \rightarrow a и b : взаимно простые

Тогда $m \leq 8$. Проверим 3 и 5 ? 90

$$9 + 25 = 6 \cdot 6 = 36$$

$$36 - 90 = 54 : 6$$

$$x^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 + a^2 = b^2$$

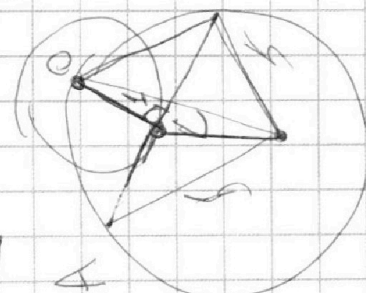
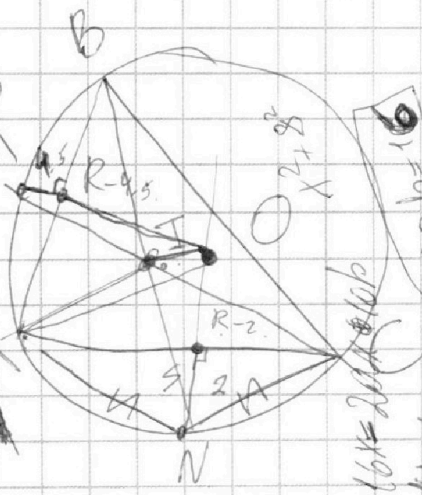
$$x^2 + a^2 = b^2$$

$$x^2 + a^2 = b^2$$

$$x^2 + a^2 = b^2$$

$$x^2 + a^2 = b^2$$

$$x^2 + a^2 = b^2$$



$$\frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{10}{13}$$

Делится a ?

$$\sin \alpha = 16 \sin \beta$$

$$\sin \alpha = 16 \sin \beta$$

$$4,5 = 2$$



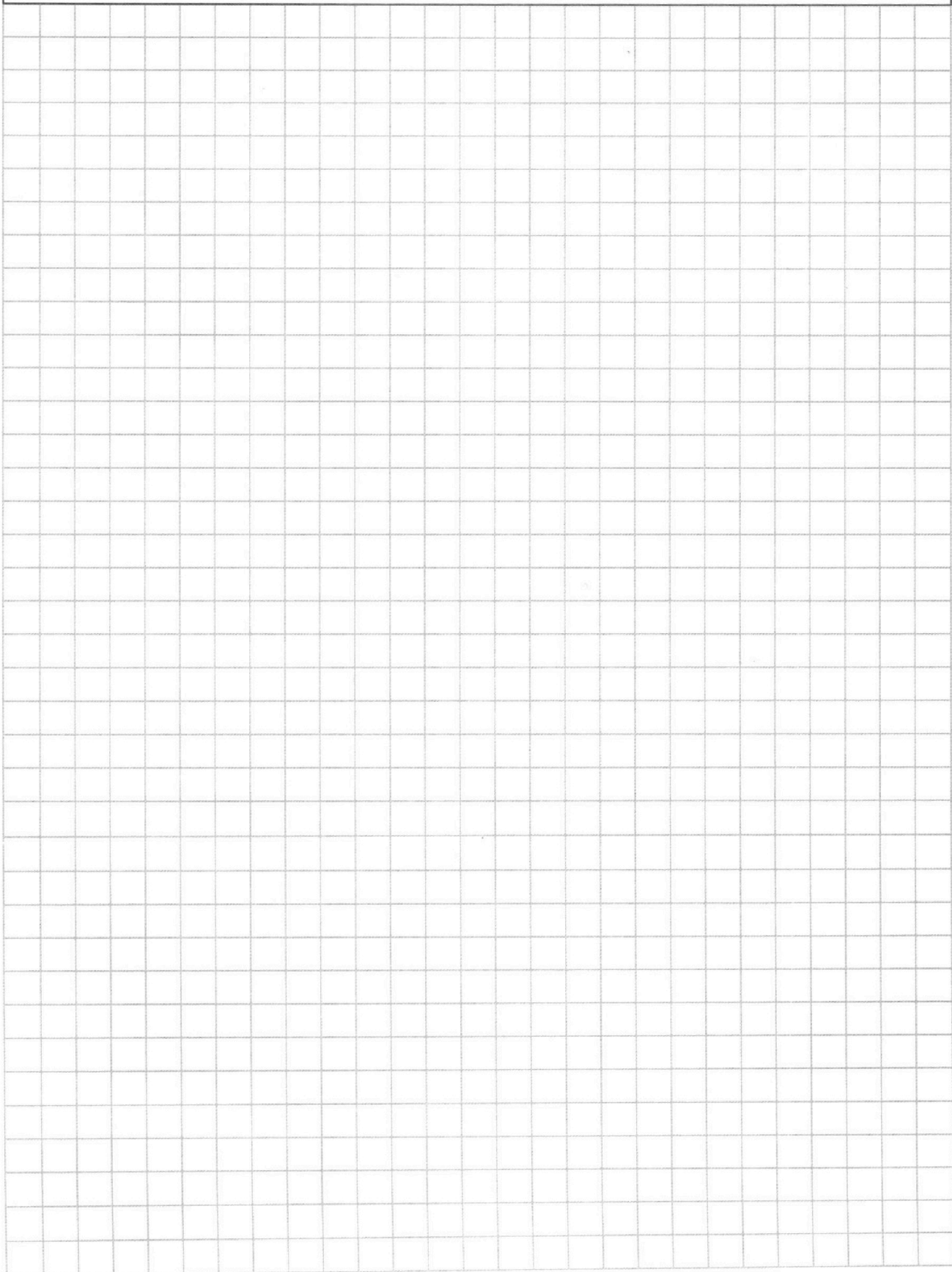
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

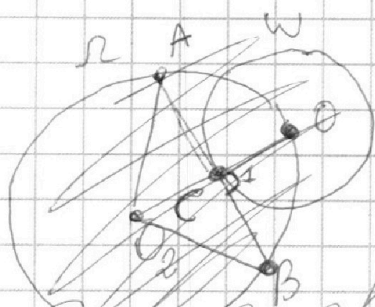
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

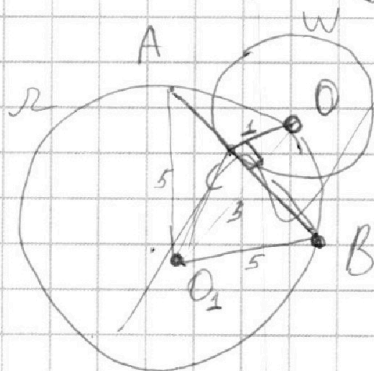


Задача 3 Черновик

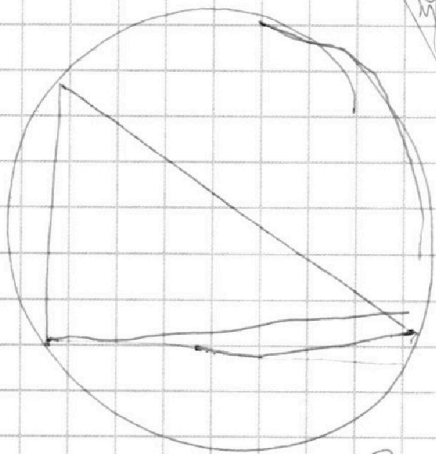
Дано: w, r - окружности, центр w лежит на r . АВ - хорда r и касается w в точке C . $AC = 4$
 Радиусы w и r 4 и 5 .
 $AB = ?$



~~Пусть O_1 - центр r , O_2 - центр w . O_1C и O_2C - радиусы r и w соответственно, $O_1C \perp AB$.~~



O_1 и O_2 - центры r и w соответственно.
 $O_1C \perp AB$, так как AB касается w . $AO_1 = O_1B = O_1O_2$ (радиусы) $= 5$. $O_2C = 4$ (радиус w).

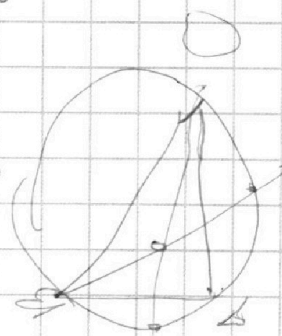


~~Забора θ $\sin \theta = \frac{1}{4}$. $\frac{1}{4} \cdot 4.5 = 3.18$~~

~~$AB = 2 \cdot 3.18 = 6.36$~~

~~$3 \cdot \sin \theta =$~~

~~$P = O_1C + O_2C$~~



~~$a=0$ $100 = \frac{100a}{1-a}$~~

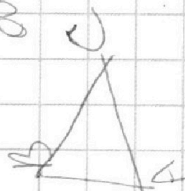
~~$(100a + 100 - 100a) =$~~

~~$100a + 100 - 100a =$~~

~~$100 = 100a$~~

~~$100 = 100 \cdot 1$~~

~~$100 = 100$~~



~~$x^2 + a^2 = r^2$~~