



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + p_1 + p_2 \geq 104 \\ x_1 + x_3 + p_1 + p_3 \geq 14 \\ x_2 + x_3 + p_2 + p_3 \geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \frac{51 + p_1 + p_2 + p_3}{2} = 26 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 + p'_1 + p'_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 + p'_2 + p'_3 \geq 14 \\ y_1 + y_3 + p'_1 + p'_3 \geq 34 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 32 + \frac{p'_1 + p'_2 + p'_3}{2} \end{array} \right.$$

Нетрудно заметить, что
вторая система имеет
решения при $p'_2 \neq p'_1 + p'_3 = 5$,
которое при этом является
минимальным.

Пример: $x_1 = 9, x_2 = 11, x_3 = 6$
 $y_1 = 20, y_2 = 0, y_3 = 10$

$$abc = 2^{26} \cdot 4^{34}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 4^{37}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$abc = 7^{34} \sqrt{K_1 K_2 K_3 \cdot 2^{51}} \Leftrightarrow$$

$$2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 7^{y_1+y_2+y_3} = 7^{\frac{(32+p_1+p_2+p_3)}{2}} \cdot 2^{\frac{51+p_1+p_2+p_3}{2}}$$

$$\text{т.к. } \sqrt{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot 2^{51}} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\frac{51+p_1+p_2+p_3}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow 51+p_1+p_2+p_3 \div 2$$

Без ограничения общности при-
мем, что $p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0$
(подобрать тройку (p_1, p_2, p_3)

такую, чтобы $\frac{p_1+p_2+p_3+51}{2} \div 2$

и при этом, чтобы сумма $p_1+p_2+p_3$
в новой тройке была меньше

$p_1+p_2+p_3$ при $p_1=1, p_2=0, p_3=0$
меньше, т.к. наименьшее число к

$p_1+p_2+p_3+51$ которое будет $\div 2$

при $p_1, p_2, p_3 \geq 0$ будет 52).

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{14}, \quad ac :$$

$$2^{10} \cdot 7^{34} \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

м.к $ab: 2^{14} \cdot 4^{10}$, $bc: 2^{14} \cdot 4^{17}$,
 $ac: 2^{20} \cdot 4^{37} \Rightarrow ab = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 4^{10}$,
 $bc = k_2 \cdot 2^{14} \cdot 4^{17}$, $ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 4^{37}$,
где k_1, k_2, k_3 - частное полученное
при делении: ab на $2^{14} \cdot 4^{10}$,
 bc на $2^{14} \cdot 4^{17}$, ac на $2^{20} \cdot 4^{37}$
соответственно \Rightarrow

$$ab \cdot bc \cdot ac = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{14+14+20} \cdot 4^{10+17+37}$$
$$\Leftrightarrow (abc)^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{51} \cdot 4^{67} \Leftrightarrow$$
$$abc = 4^{32} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{51}}. \text{ Так как}$$

как $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 $\sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{51}} \in \mathbb{N}$. Очевидно,
чтобы abc было минималь-
ным, $k_1 = 2^{p_1} \cdot 4^{p_1'}$, $k_2 = 2^{p_2} \cdot 4^{p_2'}$,
 $k_3 = 2^{p_3} \cdot 4^{p_3'}$, где $p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3'$
 $p_3' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a = 2^{x_1} \cdot 4^{y_1}$,
 $b = 2^{x_2} \cdot 4^{y_2}$, $c = 2^{x_3} \cdot 4^{y_3}$. Тогда
получаем, что $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in$
 $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из условия следует, что
 m — это НОД: $(a+b, a^2 - 6ab + b^2)$
 $a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab \Rightarrow$
 $(a+b, (a+b)^2 - 8ab) = (a+b, -8ab) \Rightarrow$
(п.к. a является несократимой
дробью $\frac{a}{b}$) $\Rightarrow a$ и b взаимнопросты
 $\Rightarrow (a+b, -8ab) = \pm 8, \pm 4, \pm 2,$
 ± 1

П.к. нас интересуют наиболь-
шие $m \Rightarrow m = 8$. Пример: $a=11, b=5$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{11+5}{11^2 - 6 \cdot 5 \cdot 11 + 5^2} = \frac{16 \overset{\cdot 8}{}}{184 \overset{\cdot 8}{}} = \frac{2}{23}$$

Ответ: $m = 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow AB = 8 \sqrt{\frac{-50 + \sqrt{50^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49}}$$

Ответ: $8 \sqrt{\frac{-50 + \sqrt{50^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

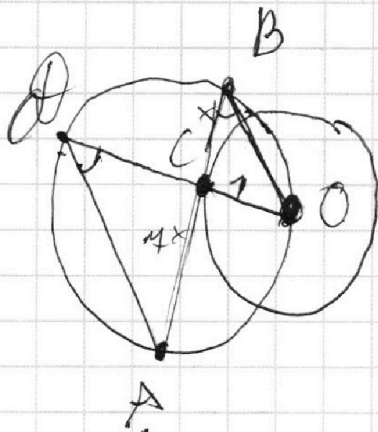
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



N3



Дано

O - ц. ω

$$\frac{AC}{CB} = 4$$

$$r_{\omega} = 1$$

$$R_{\Omega} = 5$$

$$AB = ?$$

Решение: Проведём CO .

Продлим OC до пересечения с Ω в точке D . $\angle ADO = \angle CBO$

как опирающиеся на одну дугу ω . Пусть $AC = 4x$, $CB = x$.

П.к. C - это точка касания \Rightarrow

$$\angle OCB = 90^\circ \Rightarrow \angle DCA = \angle OCB = 90^\circ$$

(как вертикальные).

$$\angle ADC = \angle CBO, \angle DCA = \angle BCO = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BCO \Rightarrow \frac{AC}{CO} = \frac{DC}{x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = 8x = 8 \sqrt{\frac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49}}$$

Ответ: $8 \sqrt{\frac{-50 + \sqrt{50^2 + 4 \cdot 49 \cdot 99}}{2 \cdot 49}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x^2+2x+1} \leq 1$ и $\sqrt{2x^2-5x+3} \leq 1$
не пересекаются $\Rightarrow \sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3}$
будет больше 1 при всех допустимых $x \Rightarrow x = \frac{2}{7}$ является
единственным корнем.

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-4x \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \right) \left(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} \right) = 2-4x$$

$$-\sqrt{2x^2+2x+1} + \sqrt{2x^2-5x+3}$$

$$\frac{2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-4x$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$\frac{2-4x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-4x$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$$

Заметим, что $x = \frac{2}{4}$ является
решением. Рассмотрим теперь все

$$x \neq \frac{2}{4} : \frac{2-4x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-4x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1.$$

Заметим, что $\sqrt{2x^2-5x+3} \leq 1$
при $x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$, а с учетом
того, что $2x^2-5x+3 \geq 0$:

$$\sqrt{2x^2-5x+3} \leq 1 \text{ при } x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right] \cup$$
$$\left[1,5; 2 \right]$$

А при $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0 \right] : \sqrt{2x^2+2x+1} \leq 1$
ИТ. к множеству x , при которых



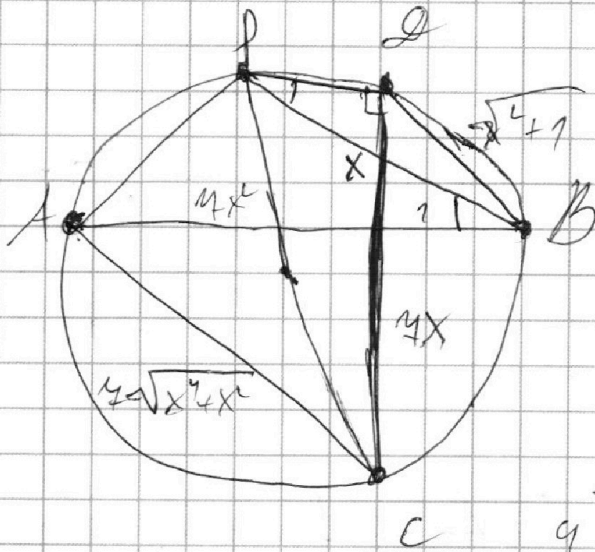
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49(x^4 + x^2) + x^4 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 + 99 = 0$$

$$x = 50 \pm \sqrt{\dots}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 99 \\ \times 99 \\ \hline \end{array}$$

$$27904 =$$

$$9 \cdot 11 \cdot 4^2$$

$$\begin{array}{r} 977 \\ + 449 \\ \hline 9857 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 79404 \\ + 2500 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27904 \\ - 20 \\ \hline 79 \\ - 16 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{5446} = 7 \\ - 39 \\ \hline 46 \\ \times 46 \\ \hline 456 \\ 532 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

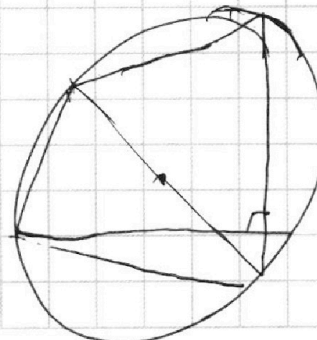
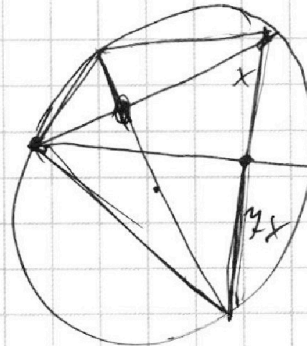
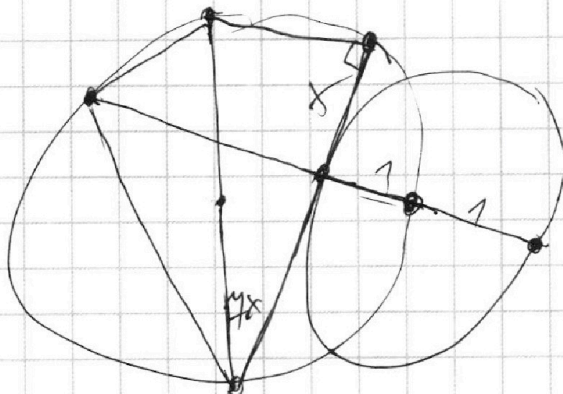
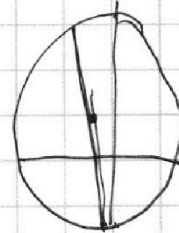
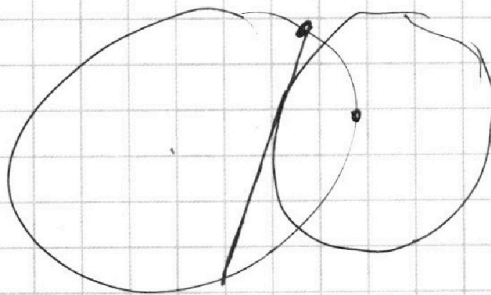
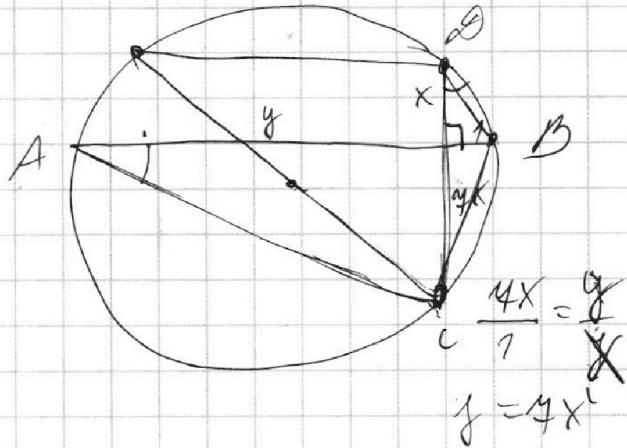
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 14 \\ y_1 + y_2 \geq 10 \\ x_2 + x_3 \geq 14 \\ y_2 + y_3 \geq 14 \\ x_1 + x_3 \geq 10 \\ y_1 + y_3 \geq 34 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5r_1 + r_2 + r_3}{2} = \frac{5L}{2} = 26 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 32 + \frac{r_1 + r_2 + r_3}{2} \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2x - 7$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = (2x - 7)^2$$

$$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$-7x + 2 = (2x - 7)(\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 3})$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{-7x+2}{2x-7} = \frac{-\sqrt{2x^2+2x+1} - \sqrt{2x^2-5x+3}}{-5x+11}$$

$$ab : 2^{14} \cdot 4^{10} \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 14, y_3 = 20$$

$$bc : 2^{14} \cdot 4^{12} \Rightarrow bc = k_2 \cdot 2^{14} \cdot 4^{12}$$

$$ac : 2^{10} \cdot 4^{32} \Rightarrow ac = k_3 \cdot 2^{20} \cdot 4^{32}$$

$$(abc)^c = k_1 k_2 k_3 \cdot \sqrt[3]{2^{51} \cdot 4^{69}} \Rightarrow$$

$$abc = \sqrt[3]{k_1 k_2 k_3 2^{51} \cdot 4^{69}} = 2^{26} \cdot 4^{32}$$

$$k_1 = 2^1$$

$$ab = 2^{25} \cdot 4^{10}$$

$$a = 2^{x_1 + x_2} \cdot 4^{y_1 + y_2}$$

$$b = 2^{x_1 + x_3} \cdot 4^{y_1 + y_3}$$

$$c = 2^{x_2 + x_3} \cdot 4^{y_2 + y_3}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + x_3 = 14 \\ x_2 + x_3 = 20 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{15 + 14 - 20}{2} = 6$$

$$y_1 = 8, x_1 = 6, x_2 = 11$$

$$x = 9, x_2 = 11$$

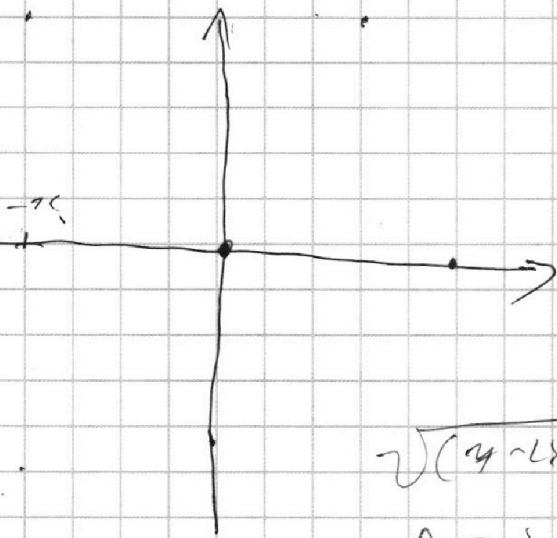
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \frac{4 - 2x}{2 - 4x}$$

$$4 - 2x = a, \quad 2 - 4x = b$$

$$\sqrt{(4 - 2x)(2 - 4x)} = 2(x - 1)(x - 1,5)$$

$$a = x - 1, \quad b = x - 1,5$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 4 - 4x \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 4x - 4$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 16x^2 - 32x + 16 \\ 4x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$4x - 4 \geq 0 \quad \frac{4x - 5}{2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}} + \frac{4x + 2}{2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$$

$$4x - 4 \leq 0$$

$$x = \frac{2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{4}{49} - \frac{40}{49} + \frac{49}{49}} = \frac{8}{4}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{28}{49} + \frac{49}{49}} = \frac{9}{4}$$

$$x = \frac{9}{4}$$

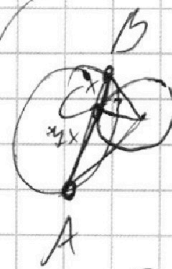
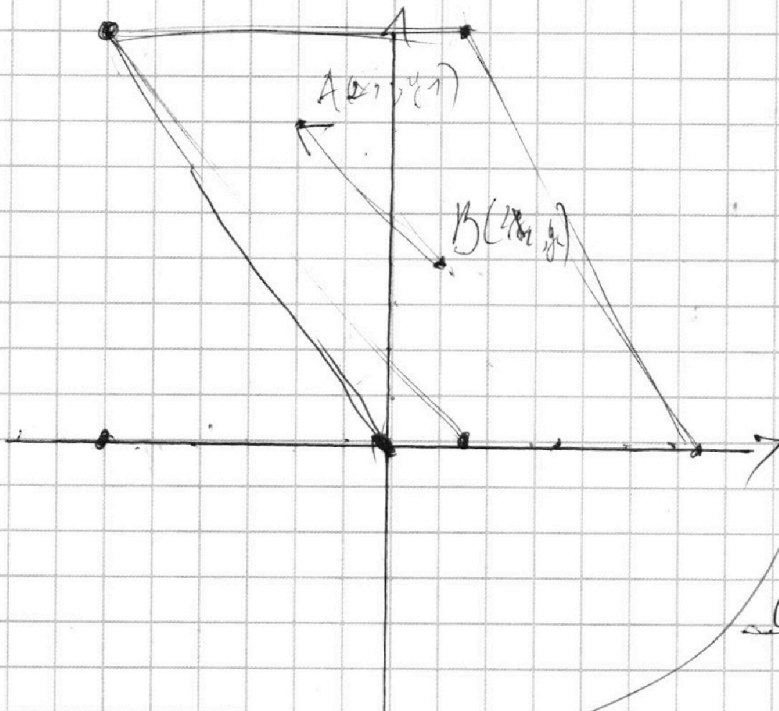
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



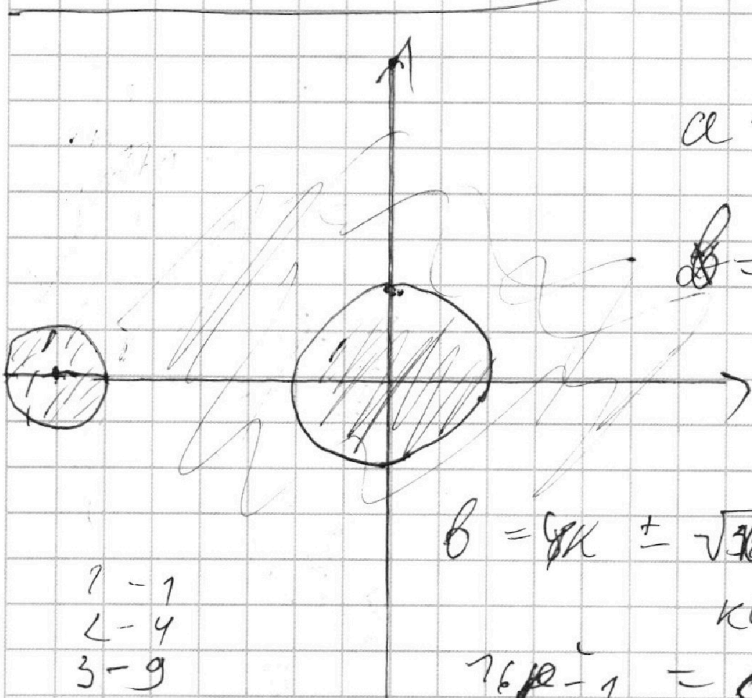
$$\frac{3+5}{9+25-60} = \frac{8}{25}$$

$a+b = kab$

$$\frac{a(bk+1) + b(bk+1)}{(-bk+1)(a+b)} = -bk$$

$$a+b = 8k$$

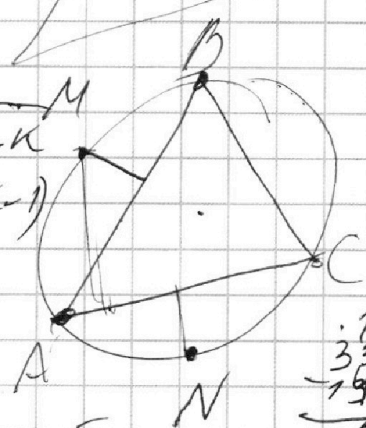
$$ab = k$$



$$y = ax + 10b$$

$$a = \frac{k}{8}, \quad k - 8kb + b^2 = 0$$

$$b = \frac{8k \pm \sqrt{64k^2 - 4k}}{2}$$



$$b = \frac{8k \pm \sqrt{36k^2 - k}}{2}$$

$$76k - 1 = a$$

- 1 - 1
- 2 - 4
- 3 - 9
- 4 - 0
- 5 - 9
- 6 - 4
- 7 - 1
- 8 - 0

$$\begin{array}{r} 16 \\ 156 - 336 \end{array}$$

8

$$\frac{12+5}{12+25-60 \cdot 5}$$

$$\begin{array}{r} 330 \\ -195 \\ \hline 135 \\ 134 \end{array}$$

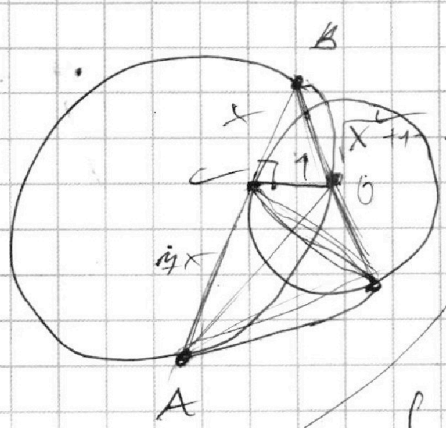
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{pow}(A, w) = R^c - R^c = 0$$

$$\text{pow}(B, w)$$

$$a^c - 8ab + b^c =$$

$$(a+b)^c - 8ab$$

$$\left\{ (a+b)^c - 8ab, a+b \right\}$$

$$(a+b)^c - 8ab \stackrel{a+b}{=} -8ab \Rightarrow$$

$$\left((a+b)^c - 8ab, a+b \right) = (-8ab, a+b)$$

$\frac{a}{b}$ - месса $\Rightarrow a \perp b \Rightarrow \text{?}$

$$a+b = -8ab \Leftrightarrow a(8b+1) = -b \Rightarrow$$

$$\sqrt{2x^c - 5x + 3} - \sqrt{2x^c + 2x + 1} = 2 - 4x \Leftrightarrow$$

$$-4x + 2$$

$$\sqrt{2x^c - 5x + 3} + \sqrt{2x^c + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$x \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{2x^c - 5x + 3} + \sqrt{2x^c + 2x + 1} = 1$$

$$f(x) = 2x^c + 2x + 1, f'(x) = 4x + 2; x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \frac{2 \cdot 15}{16} - \frac{5 \cdot 5 \cdot 4}{16} + \frac{48}{16} =$$

