МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\left.\begin{aligned} ab &\vdots 2^{15}7^{11} \\ bc &\vdots 2^{17}7^{18} \\ ac &\vdots 2^{23}7^{39} \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} ab &\geq 2^{15}7^{11} \\ bc &\geq 2^{17}7^{18} \\ ac &\geq 2^{23}7^{39} \end{aligned}\right| \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{55}7^{68} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} abc \geq 2^{28}7^{34} \\ ac \geq 2^{23}7^{39} \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{28}7^{39}.$$

(в ac содержится хотя бы 7^{39} ⇒ в abc тоже содержится хотя бы 7^{39})

Тогда $\min\{abc\} = 2^{28}7^{39}$:

Пример:

$a = 2^{11}\cdot 7^{14}$

$b = 2^{5}$

$c = 2^{12}\cdot 7^{25}$

Предположим, что двоек в abc меньше ⇒
⇒ 1) уменьшим кол-во двоек в a:
Пусть $a = 2^{10}\cdot 7^{14}$, тогда
(рассматриваем для минимальных) $c = 2^{13}\cdot 7^{25}$, тогда, если $bc = m\cdot 2^{17}7^{18}$
$b = 2^{4}\cdot 7^{0}$, но тогда $ab \not\vdots 2^{15}$, т.к содержит только 2^{14} ⇒

⇒ $b = 2^5$ ⇒ Таким образом кол-во двоек все равно $= 28$.

Если мы уменьшаем кол-во двоек в каком-либо из трех чисел ⇒ увеличиваем кол-во двоек в других числах. Семерки, как минимум 39, чтобы $ac \vdots 7^{39}$.

Ответ: $\min\{abc\} = 2^{28}7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Известно: $\frac{a}{b}$ – несократимая дробь, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$, так как мы

ищем наиб. m, чтобы сократить числитель и знаменатель $\Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; (a+b)^2-9ab)$,

т.к. $(a+b)^2 \vdots a+b \Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; -9ab)$, $\Bigg\} \Rightarrow$

a и b – взаимнопростые числа

$\Rightarrow a+b \not\vdots ab \Rightarrow$ так как $-9ab \vdots 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b$ тоже должно быть $\vdots 9 \Rightarrow m = 9$

Пример: $\left.\begin{matrix} a = 7 \\ b = 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{7+11}{49 - 7\cdot 7\cdot 11 + 121} =$

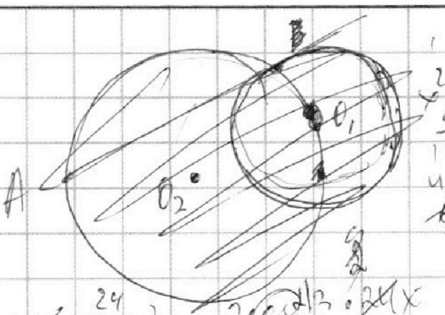
$$= \frac{18}{18^2 - 9\cdot 7\cdot 11} = \frac{\cancel{9}\cdot 2}{\cancel{9}(\underset{36}{2\cdot 18} - \underset{77}{7\cdot 11})} = \frac{2}{-41}$$

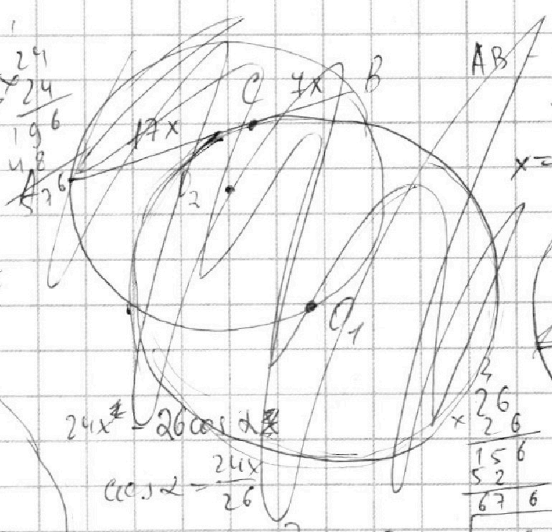
Ответ: $m = 9$

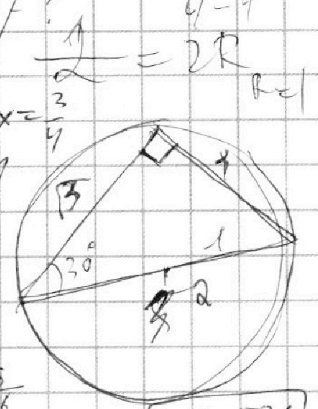
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

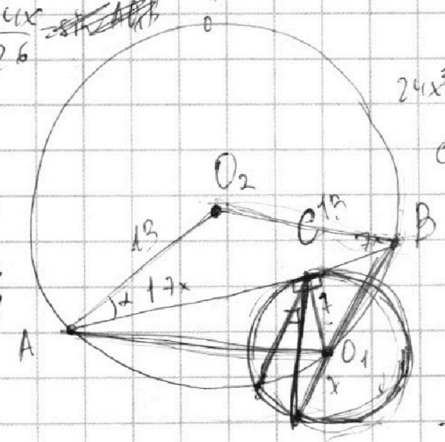
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!









$169 = 169 + 576x^2 - 2\cos \cdot 13 \cdot 24x$

$\cos\alpha = \frac{24x}{26}$

$24x = 26\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{24x}{26}$

$\sqrt{\frac{676 - 576}{676}} = \frac{100}{}$

AB - ?

$AO_1 = \sqrt{289x^2 + 49}$

$O_1B = \sqrt{49x^2 + 49}$

$AB = 24x$

$\frac{AB}{\sin\angle AO_1B} = 2R = 26$ по теор. синусов.

$\boxed{\frac{24x}{\sin\angle AO_1B} = 26}$

$12 \cdot 24x^2 = \cancel{2}169 - \cancel{2}\cos\angle AO_2B \cdot 169$

$\cos\angle AO_2B = \frac{169 - 12 \cdot 24x^2}{169} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle AO_2B = \sqrt{1 - \cos^2\angle AO_2B} = \sqrt{\frac{169^2 - (169 - 24 \cdot 12x^2)^2}{169^2}} =$

$= \sqrt{\frac{169 \cdot 24^2 \cdot x^2 - 24^2 \cdot 12^2 x^4}{169^2}} = \frac{24x}{13}\sqrt{169 - 144x^2}$

$\angle AO_1B = \frac{1}{2}\cup ADB = \frac{1}{2}\cup(360° - \cup AO_1B) = 180 - \frac{\cup AO_1B}{2} = \frac{360° - \angle AO_1B}{2}$

$\angle AO_2B = \cup AO_1B$

$2\angle AO_1B = 360° - \angle AO_2B$

$\sin\angle AO_2B = \sin 2\angle AO_1B = 2 \cdot \frac{24x}{26} \cdot \cos\angle AO_1B$

$24^2x^2 = 289x^2 + 49 + 49x^2 + 49 - 2\cos\sqrt{289x^2+49}\sqrt{49x^2+49}$

$-238x^2 + 98 = 2\cos\sqrt{\ }\sqrt{\ }$

$\frac{24x}{13}\sqrt{169 - 144x^2} = \frac{2 \cdot \frac{34}{\cancel{238}}x^2 + \frac{14}{\cancel{98}}}{\sqrt{289x^2+49}\sqrt{49x^2+49}}$

$169 - 144x^2 = \frac{(14 - 34x^2)^2}{(289x^2+49)(x^2+1)}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
			[X]			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решить уравнение:

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2}=1-9x+\sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$\begin{cases}3x^2-6x+2=\left((1-9x)+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)^2 & (1)\\ 3x^2-6x+2\geq 0 & (2)\\ 3x^2+3x+1\geq 0 & (3)\end{cases}$$

(1) $\cancel{3x^2}-6x+\cancel{2}=\cancel{1}-18x+81x^2+\cancel{3x^2}+3x+\cancel{1}+2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1}$

$9x-81x^2=2(1-9x)\sqrt{3x^2+3x+1}$

При $x\neq\frac{1}{9}$:

$\frac{9x\cancel{(1-9x)}}{2\cancel{(1-9x)}}=\sqrt{3x^2+3x+1}$

$\frac{9x}{2}=\sqrt{3x^2+3x+1}$ | возводим в квадрат

$3x^2+3x+1=\frac{81x^2}{4}$ $|\cdot 4$

$12x^2+12x+4-81x^2=0$

$-69x^2+12x+4=0$

$D=12^2+4\cdot4\cdot69=144+1104=1248=$
$=3\cdot16\cdot26$

$x=\frac{-12\pm4\sqrt{3\cdot26}}{-138}=\frac{-6\pm2\sqrt{3\cdot26}}{-69}$

Возвращаемся к системе уравнений:

$$\begin{cases}x=\frac{-6+2\sqrt{3\cdot26}}{-69}\\ x=\frac{-6-2\sqrt{3\cdot26}}{-69}\\ \left[\begin{array}{l}x\leq\frac{3-\sqrt3}{3}\\ x\geq\frac{3+\sqrt3}{3}\end{array}\right.\end{cases}$$

$\frac{6-2\sqrt{78}}{69}$ $\frac{3-\sqrt3}{3}$ $\frac{3+\sqrt3}{3}$

При $x=\frac{1}{9}$:

$\sqrt{3\cdot\frac{1}{81}-\frac{6}{9}+2}=\sqrt{3\cdot\frac{1}{81}+\frac{3}{9}+1}$

$\sqrt{\frac{54-17}{27}}=\sqrt{\frac{27+10}{27}}$

$\sqrt{\frac{37}{27}}=\sqrt{\frac{37}{27}}\Rightarrow x=\frac{1}{9}$ — корень уравнения.

(2) $3x^2-6x+2\geq0$

$D=36-4\cdot3\cdot2=12$

$x=\frac{6\pm2\sqrt3}{6}=\frac{3\pm\sqrt3}{3}$

$\frac{3-\sqrt3}{3}$ $\frac{3+\sqrt3}{3}$

$\left[\begin{array}{l}x\leq\frac{3-\sqrt3}{3}\\ x\geq\frac{3+\sqrt3}{3}\end{array}\right.$

(3) $3x^2+3x+1\geq0$

$D=9-4\cdot3<0\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. коэф. перед $x^2>0\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $3x^2+3x+1$ всегда ≥0.

Сравнение:

$\frac{3+\sqrt3}{\cancel{3}}$ $>$ $\frac{6+2\sqrt{78}}{\cancel{69}\,23}$

$69+23\sqrt3$ $>$ $6+2\sqrt{26\cdot3}$

$\sqrt3\underbrace{(23-2\sqrt{26})}_{>0}$ $>$ $\underbrace{-63}_{<0}$

$\frac{3-\sqrt3}{\cancel{3}}$ $>$ $\frac{6+2\sqrt{78}}{\cancel{69}\,23}$

$69-23\sqrt3$ $>$ $6+2\sqrt{26\cdot3}$

63 $>$ $\sqrt3(\sqrt{104}+23)$ $|^2$

$9\cdot7\cdot3\cdot3\cdot7$ $>$ $\cancel{3}(104+529+46\sqrt{104})$

1323 $>$ $633+92\sqrt{26}$

690 $>$ $92\sqrt{26}$

$\frac{6-2\sqrt{78}}{69}<\frac{6+2\sqrt{78}}{69}$

Ответ: $x\in\left\{\frac{1}{9};\ \frac{6+2\sqrt{78}}{69};\ \frac{6-2\sqrt{78}}{69}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

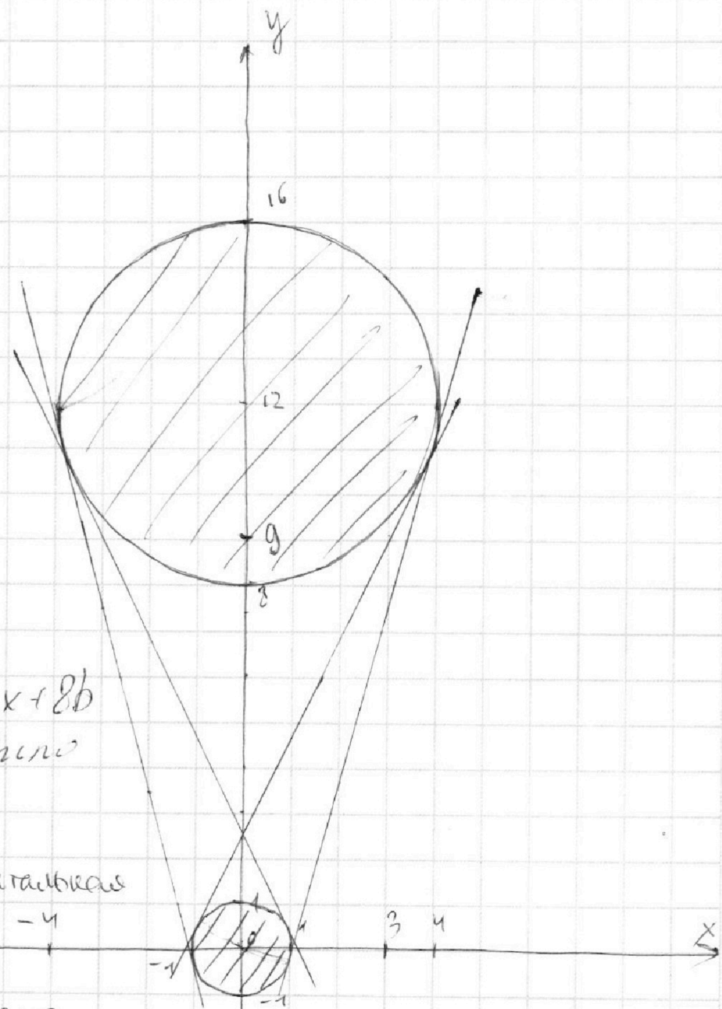
МФТИ

Найти все значения a, для каждого из которых $\exists b$: система имеет два решения.

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+(y-12)^2 \ge 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+(y-12)^2 \le 16 \end{cases} \end{array}\right. \\ -ax+8b = y \end{cases}$$

Изобразим на координатной плоскости:



Тогда система имеет ровно два решения при пересечении пер-ва и прямой $y=-ax+8b$ так, чтобы общих точек было только две.

1) При $a=0 \Rightarrow y=8b$ — горизонтальная прямая.
Она может иметь либо множество точек, либо одну общ. точку $\Rightarrow$ $a=0$ не подходит.

2) Чтобы прямая и подходящие области имели только две общие точки, прямая не должна пересекать эти области, только касаться $\Rightarrow$ тогда подходят такие прямые, которые являются общими касательными для обеих окружностей, изображенных на чертеже. Таких касательных может быть только че-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

щие: две касательные внешним образом и две внутренними обеих окружностей.

Тогда для внутренних касательных:

$$a = \frac{9}{4}$$

$$a = -\frac{9}{4}$$

Для внешних:

$$a = \frac{5}{2}$$

$$a = -\frac{5}{2}$$

Ищем угл наклона — коэф. перед x — для каждой прямой. Они попарно симметричны.

Ответ: $a \in \left\{ \frac{9}{4}; -\frac{9}{4}; \frac{5}{2}; -\frac{5}{2} \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}}{\frac{a^2}{m}-\frac{7ab}{m}+\frac{b^2}{m}}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

$3x^2-6x+2\geq 0$

$3x^2+3x+1\geq 0$

$D_1=36-4\cdot 3\cdot 2=12$

$x=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

$$\sqrt{3x^2-6x+2}=(1-9x)+\sqrt{3x^2+3x+1}$$

$$3x^2-6x+2=1+81x^2-18x+3x^2+3x+1+2(1-9x)\sqrt{\ }$$

$$81x^2-9x+(2-18x)\sqrt{3x^2+3x+1}=0$$

$$\sqrt{3x^2+3x+1}=\frac{9x-81x^2}{2-18x}, \quad 2-18x\neq 0$$

$9x(1-9x)$

$$3x^2+3x+1=\frac{81x^2(1-9x)^2}{4(1-9x)^2}$$

$$12x^2-81x^2+3x+1=0$$

$$-69x^2+3x+1=0$$

$$D=9+4\cdot 69=5\cdot 19\cdot 3$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{5\cdot 19\cdot 3}}{-138}=\boxed{\frac{3\pm\sqrt{5\cdot 19\cdot 3}}{138}}$$

$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{3+\sqrt{5\cdot 19\cdot 3}}{46}<\frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3+\sqrt{5\cdot 19\cdot 3}}{46}<3-\sqrt{3}$$

$$3+\sqrt{5\cdot 19\cdot 3}<138+46\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}(\sqrt{95}-46)<135$$

$$(\sqrt{95}+46)^2<135\cdot 45$$

$$95+46^2+92\sqrt{95}<135\cdot 45$$

$$92\sqrt{95}<6075-2211$$

$$\sqrt{95}<42$$

При $x=\frac{1}{9}$

$$\sqrt{3\cdot\frac{1}{81}-\frac{6}{9}+2}-\sqrt{3\cdot\frac{1}{81}+\frac{3}{9}+1}=0$$

$$\sqrt{\frac{1}{27}-\frac{18}{27}+2}=\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{9}{27}+1}$$

$$\sqrt{\frac{54-17}{27}}=\sqrt{\frac{27+10}{27}}$$

$$\frac{37}{27}=\frac{37}{27}$$

$12\cdot 12=3\cdot 4\cdot 3\cdot 4$

$16\cdot 69=4\cdot 4\cdot 3\cdot 23$

$3\cdot 16(3+23)$

$23 \quad 2\sqrt{26}$

$23\cdot 23>2\cdot 26$

$4\cdot 26$

26

$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

144+ 690+46

46·46=276+184=2116; 2116+95=2211; 69·6=414, 414+690=1104; 135·45=675+540=6075; 6075−2211=3864; 3864:92=42; 1104+144=1248; 26·3=78; 78·16=468+78=1248; 23·23=69+46=529; 529+104=633; 63·21=63+126=1323; 1323+633=690; 26·4=104; 78·4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab \vdots 2^{15}7^{11}$ $\quad a\cdot bc\cdot b = k\cdot 2^{32}7^{29}$ $\quad$ max одн.: $2^{32}\cdot 7^{29}$ тогда

$bc \vdots 2^{17}7^{18}$ $\quad a\cdot bc\cdot c = m\cdot 2^{40}7^{57}$ $\quad b=1$

$ac \vdots 2^{23}7^{39}$ $\quad a\cdot bc\cdot a = p\cdot 2^{38}\cdot 7^{50}$ $\quad c = 2^8 7^{28}$ $\quad a = 2^6\cdot 7^{21}$

$-\frac{1}{4}\le 3$ $\quad 1\le 3$ $\quad -4\le 1$

$2^{15}\quad 2^{17}\quad 2^{23}$ $\Rightarrow \max\{ab; bc; ac\} = ac$

$7^{11}\quad 7^{18}\quad 7^{39}$ $\quad \min\{ab; bc; ac\} = ab$

Предположим, что $c - \max\{a; b; c\}$

тогда $a - \min\{a; b; c\}$

$abc(c-b) = 2^{32}7^{29}(2^8 7^{28} m - k)$ $\quad abc \le 2^{32}7^{29}$

$abc(c-a) = 2^{38}7^{50}(2^2 7^7 m - p)$

$ab \ge 2^{15}\cdot 7^{11}$

$\Rightarrow 2^{55}\cdot 7^{68} > 2^{64} 7^{58}$ $\quad bc \ge 2^{17}7^{18}$, $ac \ge 2^{23}7^{39}$ $\Rightarrow (abc)^2 \ge 2^{55}7^{68}$

$(abc)^2 \le 2^{64}7^{58}$ $\quad ac = p\cdot 2^{23}\cdot 7^{39}$

$\Rightarrow (abc) \ge 2^{27{,}5}\cdot 7^{34}$ $\quad 2^{56}7^{68}$

$abc \ge 2^{28}\cdot 7^{34}$

$\min\{abc\} = 2^{28}\cdot 7^{39}$!

$a = 2^{14}7^{14}$, $b = 2^4 7^0$, $c = 2^{12}7^{18}$

Кол-во делит. 7 в a ≥ 11

$a = 2\ 7$, $b = 2\ 7$, $c = 2\ 7$ $\quad a = 2^{19}\cdot 7^{14}$, $b = 2^{?} < 15$, $c = 2^{13}\cdot 7^{25}$

$a = 2^{11}7^{14}$, $b = 2^5$, $c = 2^{12}7^{25}$ $\quad 2^{28}\cdot 7^{39}$

$345\quad 46\sqrt{26}$

$345\cdot 345\quad 46\cdot 46\cdot 26$

$a = 2^{11}7$, $b = 2^5 7^0$, $c = 2^{12}7^{26}$

$\min = 2^{28}\cdot 7^{39}$

$\frac{a}{b}$ - несокр. дробь

$\max\{m\}$ - ?

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(2a-7-3\sqrt5 b)(2a-7+3\sqrt5 b)}$$

$\frac{1}{1+\frac{1}{9}\left(\frac{a}{b}+1\right)^2}$

$D = 49b^2-4b^2 = 45b^2 = 15\cdot 3 = 9\cdot 5$

$a = \frac{7\pm 3\sqrt5 b}{\frac{1}{b}+\frac{2}{a}}$

$a^2-7ab+b^2 \mid a+b$

$a^2+ab \quad a-8b$

$-8ab+b^2$

$-8ab-8b^2$

$9b^2$

$= \frac{}{(2-\frac{7}{a}-3\sqrt5\frac{b}{a})(2\frac{a}{b}-\frac{7}{b}+3\sqrt5)}$

$\frac{a+b}{1} : \left((a+b)+\frac{9b^2}{a+b}\right) = 1+\frac{(a+b)^2}{9b^2} = 1+\left(\frac{a+b}{3b}\right)^2 = 1+\left(\frac{a}{3b}+\frac{1}{3}\right)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

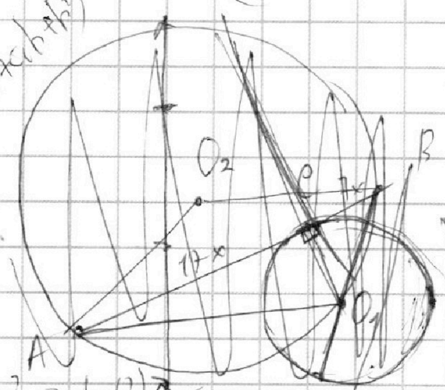
$169 - 144x^2 = \dfrac{4(7-17x^2)^2}{(289x^2+49)(x^2+1)}$

$-8ab$

$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+(y-12)^2-16>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x^2+(y-12)^2-16<0 \end{cases}$



$m = НОД(a+6b; a^2+2ab+b^2)$

$a+2ab-9$

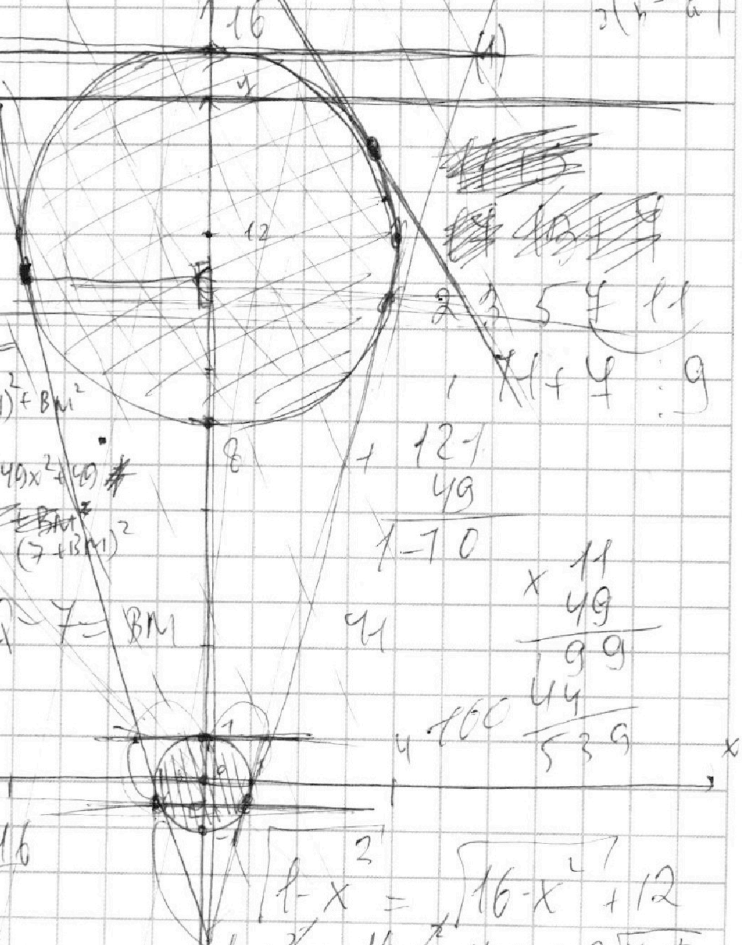
НОД $(a+b; a^2-2ab+b^2) =$

$=$ НОД $(a+b; (a+b)^2-8ab) =$

$=$ НОД $(a+b; -8ab) = m$ наиб. возможное $m=$

a и b – взаимопростые

$\dfrac{a+b}{-8ab} = -\dfrac{1}{8b} - \dfrac{1}{8a} = -\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)$



$ax+y-8b=0$

$y=-ax+8b$

$\exists b$: решения 2

$HB^2 = BK\cdot BM = 49x^2 = (BM+14)^2+BM^2$

$BQ_2^2 = 49x^2+49$

$(7+BM)^2$

При $a=0$ – верно

При $\forall a$; $b=0$ ⇒ возможно найти два решения

$BQ-7=BM$

Для $a\in[0,1]$ $\dfrac{9}{4}$

$2\ 3\ 5\ 7\ 11$

$1+4:9$

$1+\dfrac{121}{49}$ $\quad 170$

$11 \times 49 = 99 + 44 = 539$

$(y-12)^2 = 16-y^2-1$

$(y-12)^2-y^2=15$

$-24y+144=15$

$x^2+(y-12)^2=16$

$x^2+(y^2)=1$

$y=\dfrac{129}{24} \Rightarrow x=$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{16-x^2}+12$

$1-x^2 = 16-x^2+144+2\sqrt{16-x^2}$

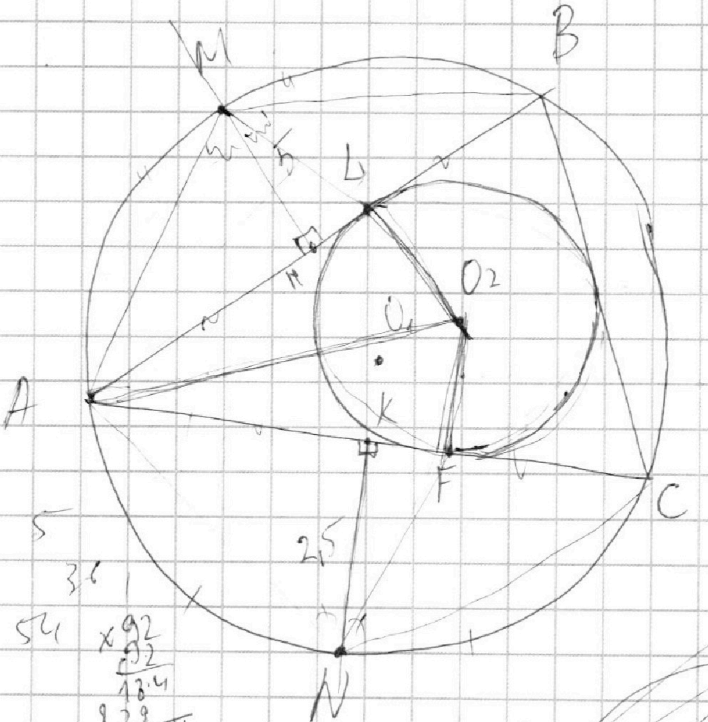
$-159 = 2\sqrt{16-x^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AO_2 - ?$



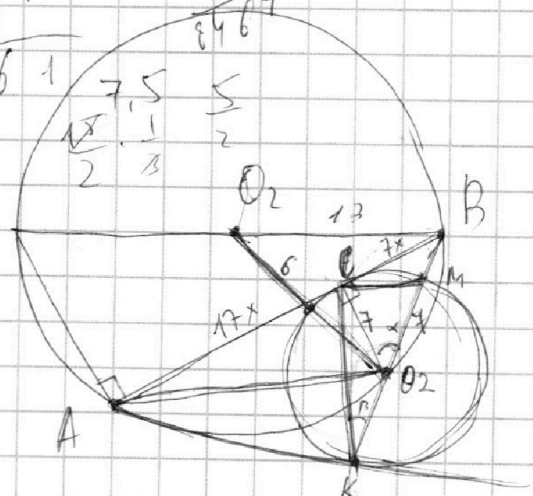
$AL = AF$

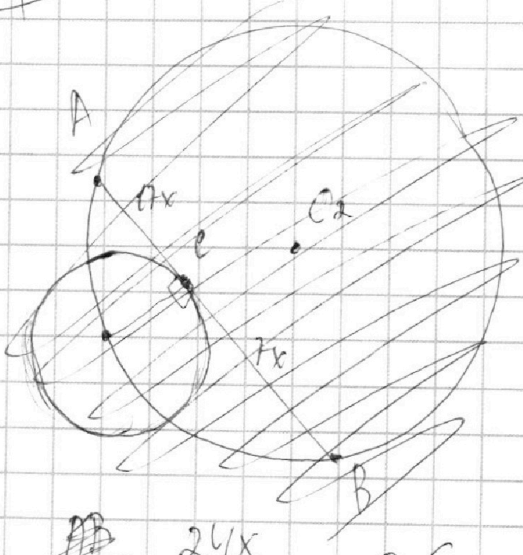
$S_{AML} = 2S_{ANF}$

$\sqrt{16-x^2}+12$

$69 \times 69 = 4761$

$92 \times 92 = 8464$





$\frac{24x}{\sin_2 AO_2B} = 26$

$\cos\alpha = \frac{CO_2}{BO_2} = \frac{\sqrt{49x^2+49}}{7} = \sqrt{x^2+1}$

$CM^2 = 98 - 2\sqrt{x^2+1}\,49$

$\sin\beta = \frac{7\cdot 49(49-2\sqrt{x^2+1})}{2\cdot 7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

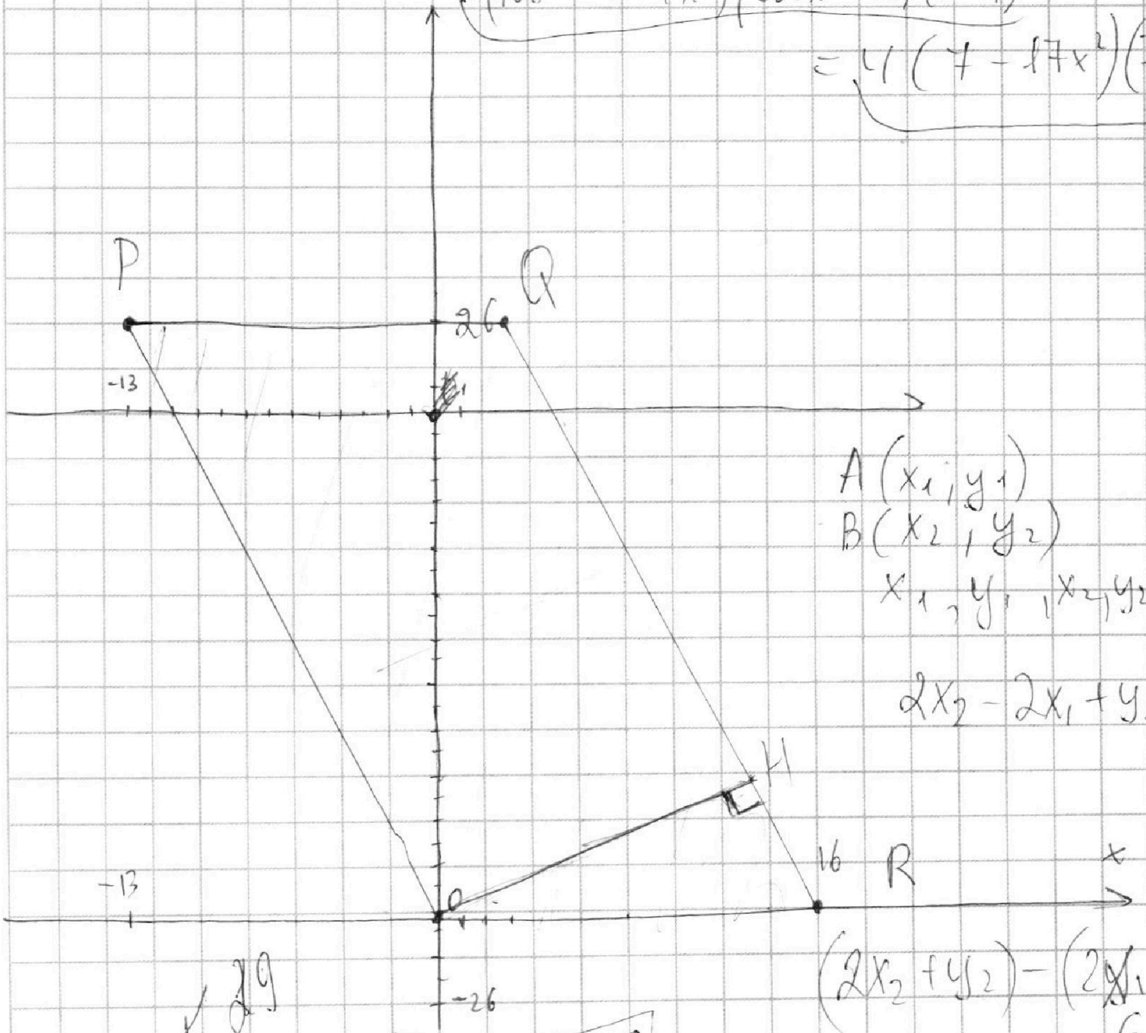
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(169-144x^2)(289x^2+49)(x^2+1) =$

$= 4(7-17x^2)(7-17x^2)$



$A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$

$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$

$(2x_2+y_2)-(2x_1+y_1)=14$

$2x_2+y_2 = 14+(2x_1+y_1)$

$16 \geq \frac{x_1}{x_2} \geq -13$ ↙ 29

$\boxed{\text{наи max } 26}$

$26 \geq \frac{y_1}{y_2} \geq 0$ ↖ 26