



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$\begin{cases} ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases} \Rightarrow abc = a^2 b^2 c^2 : 2^{23+17+15} \cdot 7^{39+18+18}$$
$$abc: 2^{55} \cdot 7^{68}$$

т.к. степень двойки нечетная, то

$$abc: 7^{34} \cdot 2^{28} \quad \cancel{abc: 7^{34} \cdot 2^{28}}$$

~~Ответ: $7^{34} \cdot 2^{28}$~~ ~~или по условию~~

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc: 2^{28} \cdot 7^{38}$$

тогда подойдет пример: $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$, $b = 2^5$, $c = 2^{13} \cdot 7^{28}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$\forall a, b \in \mathbb{N}$ $\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} \Rightarrow 9ab : m \text{ и } a+b : m$$

$m = 9$ возможно, например при $a = 1; b = 8$

$m > 9$ не может быть так как

~~произведение и сумма взаимно простых чисел~~

~~взаимно просты~~ НОД произведения и

суммы ~~простых~~ взаимно простых чисел равен 1.

Ответ: ~~$m = 9$, ab : любым делителем a и b~~

ab : любым делителем a и b

$a+b$: ~~любым~~ делителем a и b

Ответ: $m = 9$.

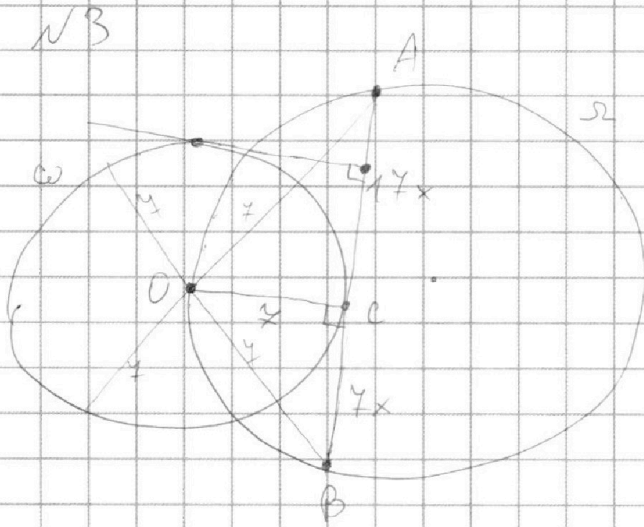
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1)$$

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1) = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \text{или} \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3(x-1)^2 - 1}$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{3(x-1)^2 - 1} \leq 1 \Rightarrow x \in [1 - \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}]$$

$$\sqrt{3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 0]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \leq 1 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1 \end{cases} \quad \text{— нет решений системы}$$

Подставим $x = \frac{1}{9}$:

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{34}{27}} - \sqrt{\frac{34}{27}} = 0$$

Ответ: $x = \frac{1}{9}$.

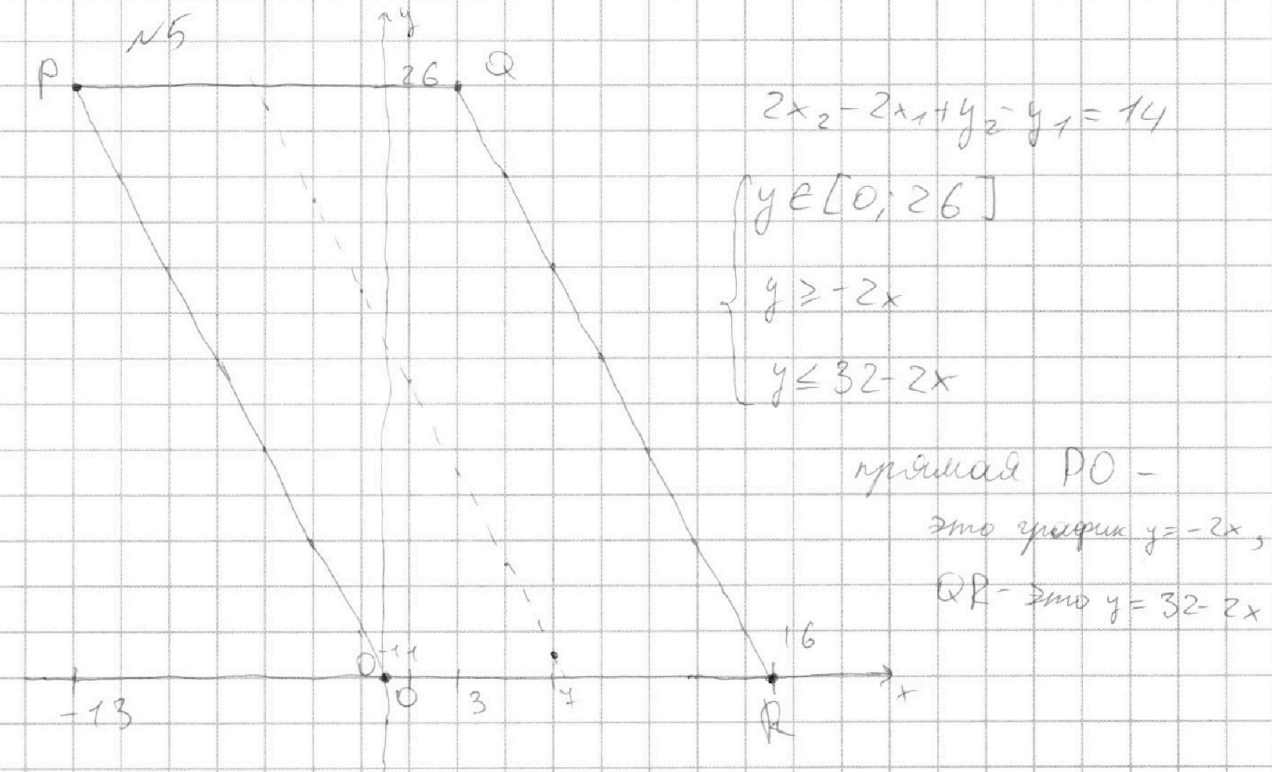
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 + y_2 \in [0; 32] ; -2x_1 - y_1 \in [-32; 0]$$

т.к. подставив максимальный y_2 :

$$2x_2 + (32 - 2x_2) = 32, \text{ максимальный } y_2:$$

$$2x_2 + (-2x_2) = 0 \neq$$

$$\Rightarrow 2x_2 + y_2 \geq 14 \Rightarrow 2x_2 + y_2 \geq 14$$

т.к. $-2x_1 - y_1 \leq 0$ Пусть $2x_2 + y_2 = k_2$,

$$2x_1 + y_1 = k_1 \text{ тогда } k_2 - k_1 = 14$$

$$y_2 = k_2 - 2x_2 ; y_1 = k_1 - 2x_1, \text{ если } k_2 >$$

если $k_2 \geq 2$ то в параллелограмме будет 14

точек $B(x_2, y_2)$, если $k < 2$, то 12 точек $B(x_2, y_2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

Для точек $A(x_1, y_1)$ аналогично.

$$K_2 \in [14; 32]; \Rightarrow \text{~~не в [18; 30]~~} \Rightarrow K_2 \in [0; 18]$$

$K_2 - K_1 = 14$ есть 10 случаев когда $K_2 \neq K_1 : 2$
и 9 случаев когда $K_2, K_1 \neq 2$

Получаем ~~уравнение~~ выражение:

$$10 \cdot 14 \cdot 14 + 9 \cdot 12 \cdot 12 = 1960 + 1296 = 3256$$

Ответ: ~~12~~ 3256.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

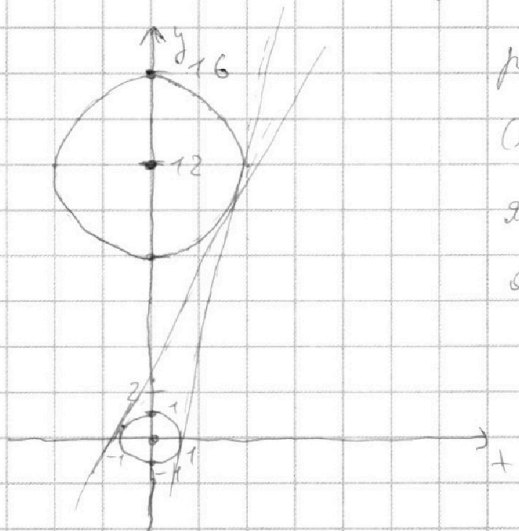


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$



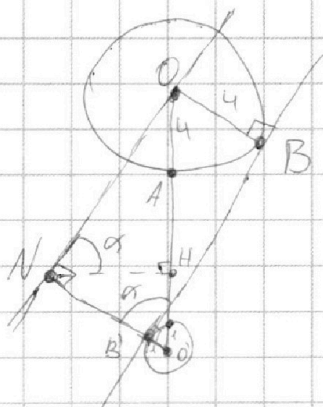
решением уравнения:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

являются точки лежащие на одной из окружностей или внутри одной из окружностей.

$ax + y - 86 = 0$ это график прямой \Rightarrow

$\Rightarrow y = 86 - ax$ - это касательная к обеим окружностям, тогда у системы будет ровно два решения.



$$OO' = 12 \quad ON \parallel BB' \Rightarrow OB = NB = 4$$

$$OB = OA = 4 \quad O'B = 1$$

$\triangle ONO'$ - прямоугольный \Rightarrow

$$\Rightarrow ON = \sqrt{OO'^2 - NO'^2} = \sqrt{12^2 - (4+1)^2} = \sqrt{119}$$

$ON \parallel BB' \Rightarrow$ тангенс угла наклона BB'

на графике равен $\angle ONH$, $\angle NO'O = 90^\circ - \angle NO'O' = \angle ONH$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ON}{NO'} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

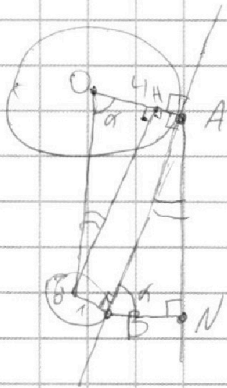
| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 6



$$OA = 4 \quad AN \parallel OO'$$
$$OB = 1 \quad \angle ANB = 90^\circ$$

$$OH = 4 - 1 = 3 \text{ т.к. } ABO'H \text{ - прямоугольник}$$

$$(\angle O'HA = \angle BAN = \angle ABO' = 90^\circ)$$

$$OO' = 12 \Rightarrow OH = \sqrt{12^2 - 3^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

$$\text{т.к. } OO' \parallel AN \text{ и } OH \parallel AB \Rightarrow \angle BAN = \angle OOH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOO' = \angle ABN = \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OH}{OH} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha x + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \quad \text{имеет р-во}$$

$$\text{при } \alpha = \pm \frac{4\sqrt{10}}{3}; \alpha = \pm \frac{\sqrt{118}}{5} \text{ существуют } b,$$

при которых система имеет ровно два решения

$$\text{Ответ: } \alpha = \pm \frac{4\sqrt{10}}{3}, \alpha = \pm \frac{\sqrt{118}}{5}$$



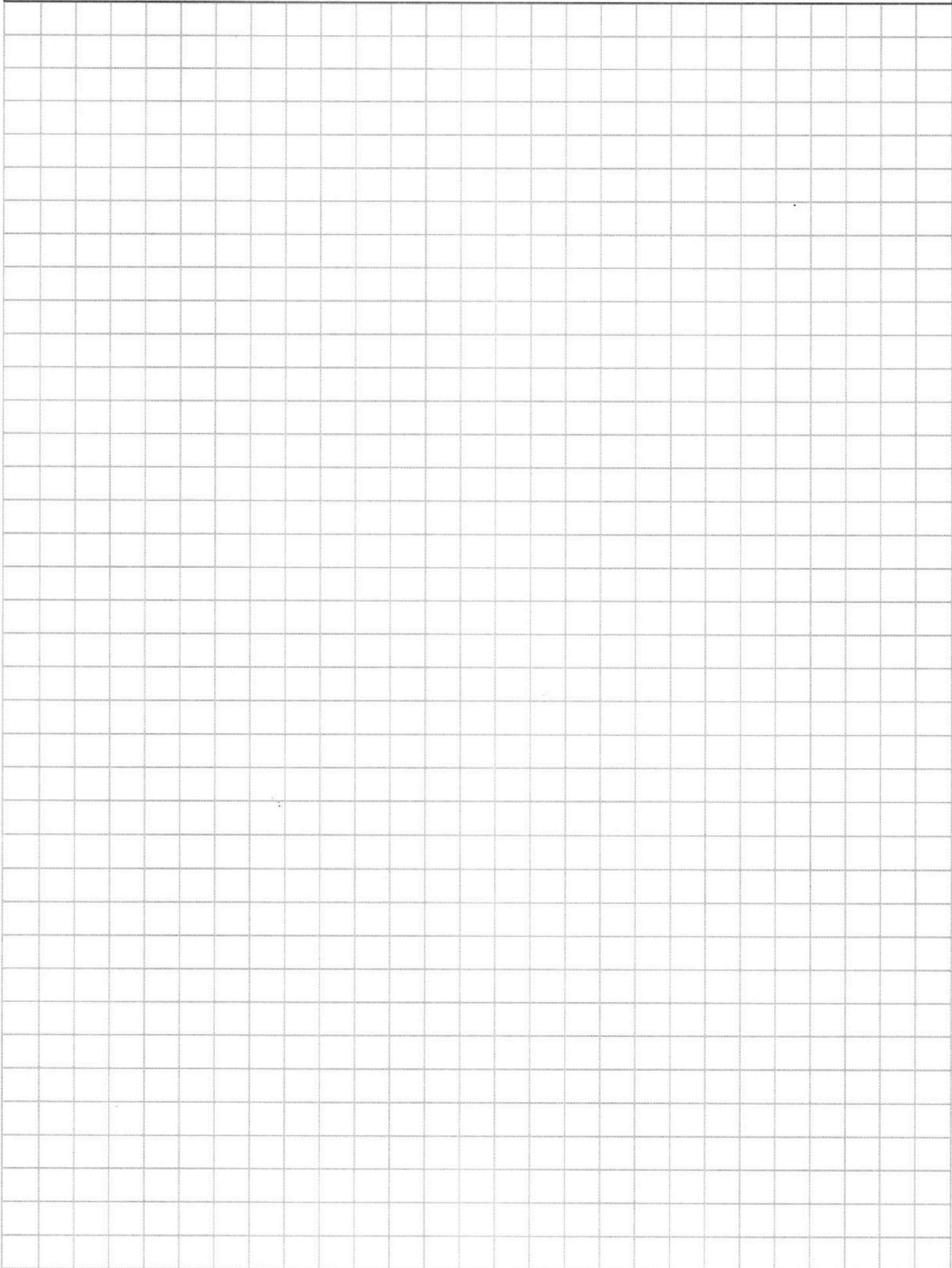
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

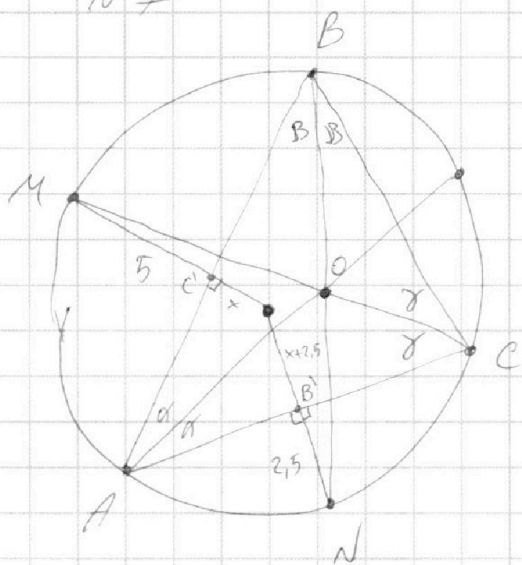
| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



O - центр вписанной окружности

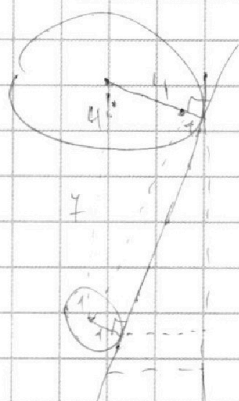
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$13^2 - 3^2 = \sqrt{160}^2 = (4\sqrt{10})^2$$

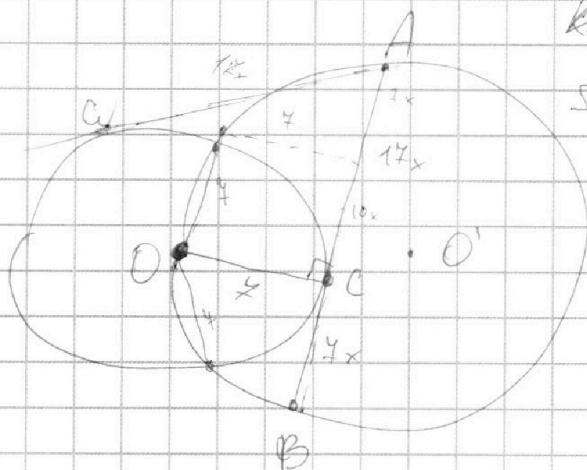
$$\operatorname{tg} = \pm \frac{4}{3}\sqrt{10}$$

$$y_2 = k_2 - 2x_2$$

$$k_2 - k_1 = 14$$

$$y_1 = k_1 - 2x_1$$

~~Крестиком~~



Ω

$$R_{\Omega} = 13$$

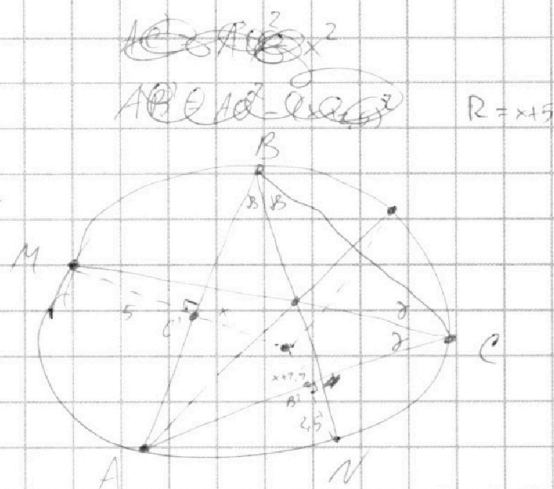
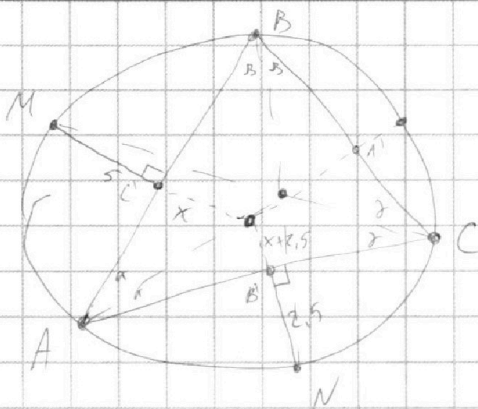
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2+4ab+b^2} : m$

$k_{max} ?$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$

$9ab : a+b$

$(\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})$

$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1}$

$-6x+2 = 3x+1$

$x = \frac{1}{9}$

$(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} - 1) = 0$

$\sqrt{3(x-1)^2-1} + \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} = 1$

$(x-1) \geq \frac{1}{3}$

$x-1 \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

$x \in (\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3})$

$-1 \leq x \leq 10$

$x \in [1-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1+\frac{\sqrt{2}}{3}]$

~~$(3a+\frac{1}{3})(3b+\frac{1}{3}) = 1$~~
 ~~$9ab + a + b + \frac{1}{9} = 1$~~
 ~~$9ab + a + b = \frac{8}{9}$~~

$\frac{3x}{2x}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

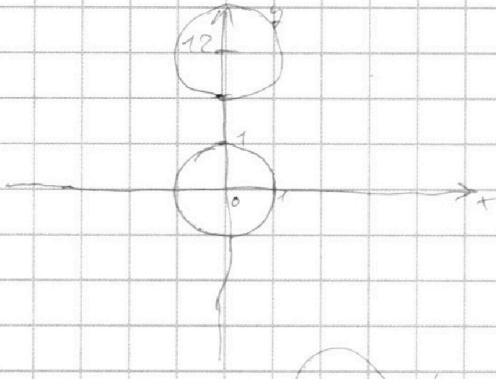
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

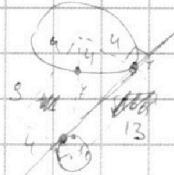


$$\begin{cases} x+y-86=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$



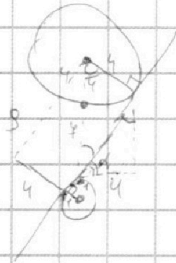
$$y = 86 - \alpha x$$

~~Решение~~
~~черновик~~



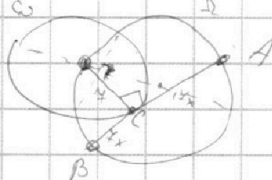
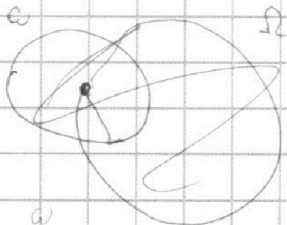
$$12-5 = \sqrt{16}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = 86 - \alpha x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (86 - \alpha x)^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - 12y + 144 = 16 \end{cases}$$



$$\tan \alpha = \frac{13}{5} \Rightarrow \alpha = 2,6 \text{ или } \alpha = -2,6$$

$$y = 86 + 2,6x$$

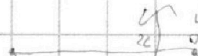
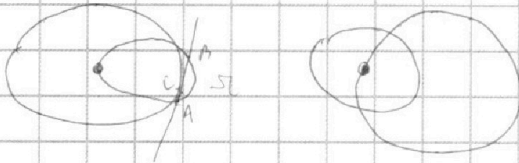


x-?

$$14y - 4x^2 = (4-x)(18+4y)$$

$$14y = -12y + 18 \cdot 4$$

$$y = \frac{18 \cdot 4}{26} = \frac{133}{13}$$



$$\tan \alpha = 2 \Rightarrow 3424$$

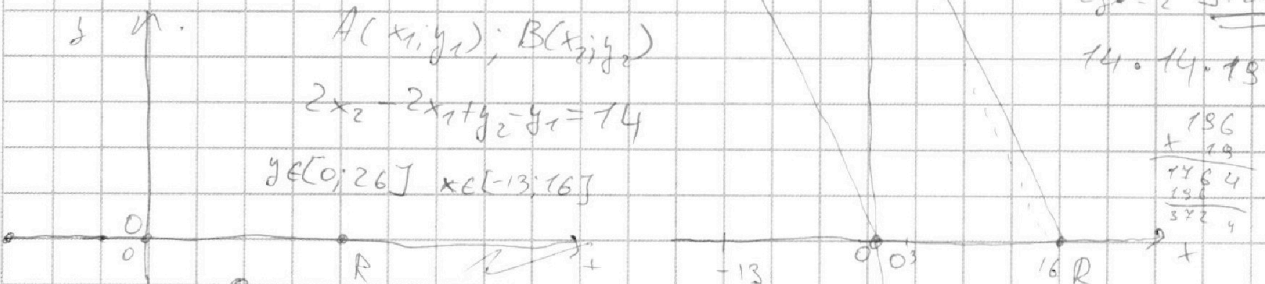
$$14 \cdot 14 \cdot 18$$

$$\begin{array}{r} 186 \\ + 18 \\ \hline 1464 \\ 133 \\ \hline 3424 \end{array}$$

$A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$y \in [0; 26] \quad x \in [-13; 16]$$



$$\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq 32 - 2x \\ y \in [0; 26] \end{cases}$$

$$2x_2 + y_2 \in [0; 32]$$

$$-2x_1 - y_1 \in [-32; 0]$$

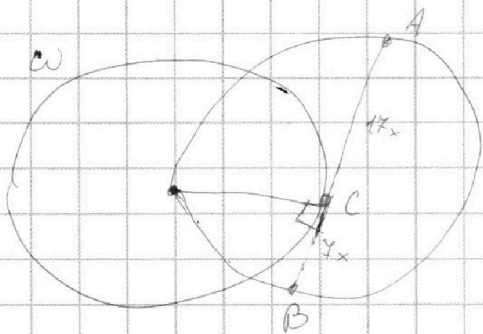
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab: 2^5 \cdot 4^1 \\ bc: 2^4 \cdot 4^1 \\ ac: 2^3 \cdot 4^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 b^2 c^2: 2^{15} \cdot 4^6 \\ abc: 2^8 \cdot 4^2 \end{cases}$$

NB
см. 2 $\rightarrow c > a > b$

$$\begin{cases} a = 2^5 \cdot 4^1 \\ b = 2^4 \cdot 4^0 \\ c = 2^3 \cdot 4^3 \end{cases}$$

$\frac{a}{b}, (a, b) = 1, a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} \Rightarrow 8ab = a+b$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3(x-\frac{1}{2})^2 - 1} - \sqrt{3(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 3x + 1 = t \quad 1 - 9x = p$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + (1 - 9x) - (1 - 9x)$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1)$$

$$\sqrt{p} = \sqrt{t} \Rightarrow p = t$$

$$p - t = p^2 - t^2 \quad p^2 - 2pt + t^2 = p^2 + t^2 - 2pt$$

$$(p - t)(p + t - 1) = 0$$

$$(3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1)(3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 1) = 0$$

$$(1 - 9x)(6x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$9\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(6\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{5}{8}\right) = 0$$