МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 лист 2 реш.

3) Степень двойки:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 8 \\ \beta_1+\gamma_1 \geq 12 \\ \gamma_1+\alpha_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1 \geq 34 \\ \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 17 \end{matrix}$$

4) Аналогично для тройки:

$$\begin{cases} \beta_2+\alpha_2 \geq 14 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 20 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq \frac{55}{2}$$

учитывая ограничение

$$\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq 28$$

5) Аналогично для пятерки

$$\begin{cases} \alpha_3+\beta_3 \geq 12 \\ \cancel{\alpha_3+}\gamma_3+\beta_3 \geq 17 \\ \cancel{\beta_3+}\gamma_3+\alpha_3 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 34$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$$

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 лист 1 реш.

1) Если мы хотим минимизировать abc ⇒ по возможности нужно минимизировать каждое из чисел a, b, c ⇒ они не содержат простых делителей кроме 2, 3 и 5.

2) Пусть
$$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}$$
$$b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}$$
$$c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}\cdot 5^{\gamma_3}$$
($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}+\{0\}$ при $i=1,2,3$.) натуральные и ноль

$$\Rightarrow ab = 2^{\alpha_1+\beta_1}\cdot 3^{\alpha_2+\beta_2}\cdot 5^{\alpha_3+\beta_3} \vdots 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$$
и из условия следует, ~~что~~ система
$$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1 \geq 8\\ \alpha_2+\beta_2\geq 14\\ \alpha_3+\beta_3\geq 12\end{cases} \quad (1)$$
Аналогично получим системы на bc и ac
$$bc: \begin{cases}\beta_1+\gamma_1 \geq 12 \ (2)\\ \beta_2+\gamma_2\geq 20\\ \beta_3+\gamma_3\geq 17\end{cases} \quad ac\begin{cases}\alpha_1+\gamma_1 \geq 14 \ (3)\\ \alpha_2+\gamma_2\geq 21\\ \alpha_3+\gamma_3\geq 39\end{cases}$$
Произведение $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}$

Учитывая, что α_1 независимо от α_2 и α_3 (и наоборот) β_1 от β_2 и β_3 (и наоборот) и γ_1 незав. от γ_2 и γ_3 (и наоборот).

Запишем по отдельности условия из систем (1), (2) и (3) на степени двойки, пятерки и тройки.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 лист 2 решения

8) Пусть радиус окружн. равен r

$\Rightarrow$ в $\triangle EFM$ по Т. Пифагора:

$(2r)^2 = EF^2 + FM^2$

$EF = CF \cdot tg\angle ECF = CF \cdot \frac{5x}{\sqrt{10}x} = \frac{5}{\sqrt{10}} CF$

9) Система: $\begin{cases} 4r^2 = \frac{25}{10} CF^2 + FM^2 \\ CF^2 + CF \cdot FM = 14x^2 \end{cases}$

10) Соединим EB: $\angle EBC = \frac{1}{2} \smile EB$ (угол между кас. и хордой в т. касания)

$\angle MEB = \frac{1}{2} \smile BH$ (впис. угол).

$= \frac{1}{2}(180 - \smile EB)$

$= 90 - \frac{1}{2}EB = 90 - \angle EBC$

11) Продлим EF до пересеч. с CB в точке N.

Степень т. N $= NB^2 = (CB - NC)^2$

$= NF \cdot NE = \cancel{CN \cdot \sin FCN \cdot CN}$ cos

В пр/уг $\triangle CNE$: CF – выс к гип

$\Rightarrow CN^2 = NF \cdot NE$

$= (CB - NC)^2$

$\Rightarrow CN^2 = CB^2 - 2CB NC + NC^2$

$CB^2 - 2CB NC = 0$

$CB - 2NC = 0$

$NC = \frac{CB}{2} = \frac{\sqrt{14}x}{2}$

$\triangle ACB \sim \triangle ECN$ (отсекает прямой $\parallel$ гип) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CN}{CB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow CE = \frac{CN \cdot AC}{CB} = \frac{\frac{\sqrt{14}x}{2} \cdot \sqrt{35}x}{\sqrt{14}x} = \frac{\sqrt{35}x}{2}$

$\Rightarrow$ искомое отношение равно $\left(\frac{AB}{CE}\right)^2 = \frac{49x^2 \cdot 4}{35x^2}$

Ответ: $\frac{49 \cdot 4}{35}$

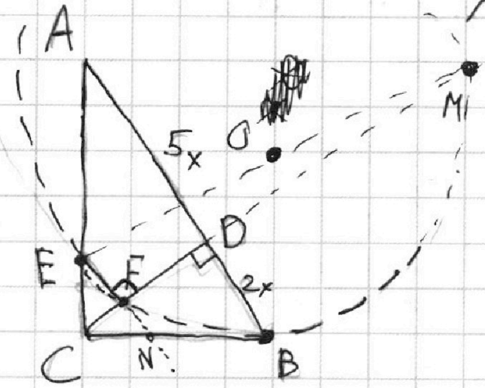
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 лист 1 решения



1) Пусть $AD = 5x$
$DB = 2x$
$\Rightarrow \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{10}\,x = CD.$

2) рассмотрим $\triangle CAD$ и $\triangle ABC$:
1) $\angle A$ - общ
2) $\angle CDA = \angle ACB = 90°$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle ABC$ по двум углам
$\Rightarrow \frac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = k_1^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$

3) По т. Пифагора в $\triangle CDB$: $CB = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}\,x$

По т. Пифагора в $\triangle CDA$: $AC = \sqrt{25x^2 + 10x^2} = \sqrt{35}\,x$

4) продлим CD до второго пересеч. с окруж. в точке M.

5) $EF \parallel AB$, $CD \perp AB$ $\Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow$
$\Rightarrow$ рассмотрим CEF и CAD:
1) $\angle C$ - общ
2) $\angle CFE = \angle CDA = 90°$ $\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$ по двум углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = k_2^2 = \left(\frac{CE}{AC}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} \cdot \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{1}{k_1^2 \cdot k_2^2} = \left(\frac{AB}{CE}\right)^2 = \left(\frac{CB}{CF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{EF}\right)^2$

6) $\angle EFM = 90°$
$\angle EFM$ - впис $\Rightarrow$ EM - диаметр.

7) Степень точки C относительно окружности равна $CB^2 = CF \cdot CM = (CF + MF) \cdot CF = 14x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

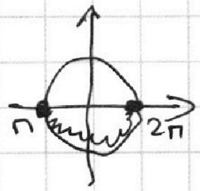
№3 лист 2 решения

5) При $x \in [0; \pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = x$

$2x - 10x = -4\pi$

$-8x = -4\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ – подходит

6) При $x \in (\pi; 2\pi] \Rightarrow$



$\Rightarrow \arccos(\cos x) = x - \pi$

$\Rightarrow$ уравнение:

$2x - 10(x - \pi) = -4\pi$

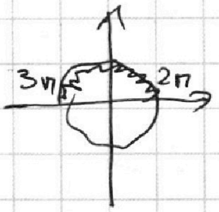
$-8x + 10\pi = -4\pi$

$-8x = -14\pi$

$x = \frac{14}{8}\pi$ – подходит.

$\frac{8}{8}\pi \le x \le \frac{16}{8}\pi$

7) При $x \in (2\pi; 3\pi]$:



$\arccos(\cos x) = x - 2\pi$

$2x - 10(x - 2\pi) = -4\pi$

$-8x + 20\pi = -4\pi$

$x = 3\pi$ – подходит.

Ответ: $x \in \{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{14}{8}\pi; 3\pi\}$

№3 лист 1 решения

1) $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$2x - 10\arccos(\cos x) = -4\pi$$

2) $0 \le \arccos(\cos x) \le \pi$

$$-10\pi \le -\arccos(\cos x) \le 0$$

$$-10\pi + 2x \le \underbrace{2x - \arccos(\cos x)}_{-4\pi} \le 2x$$

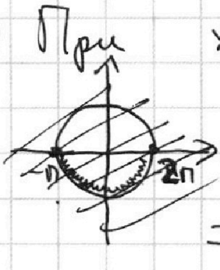
$$-10\pi + 2x \underset{(1)}{\le} -4\pi \underset{(2)}{\le} 2x$$

(1) $-10\pi + 2x \le -4\pi$
$-5\pi + x \le -2\pi$
$x \le 3\pi$

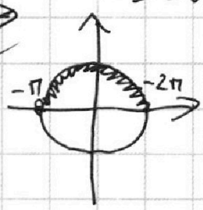
(2) $-4\pi \le 2x$
$x \ge -2\pi$

$\Rightarrow -2\pi \le x \le 3\pi$

3) При $x \in [-2\pi; -\pi]$



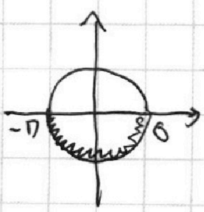
$\Rightarrow \arccos(\cos x) = x + 2\pi$



$\Rightarrow$ уравнение:

$2x - 10(x + 2\pi) = -4\pi$
$-8x - 20\pi = -4\pi$
$-8x = 16\pi$
$x = -2\pi \in [-2\pi; -\pi]$
корень подходит

4) При $x \in [-\pi; 0]$:



$\Rightarrow \arccos(\cos x) = -x$

$\Rightarrow 2x + 10x = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} \in [-\pi; 0]$

$\Rightarrow$ корень подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 лист 3 решения

$$= 16 \cdot \sqrt{\frac{100}{289} + \frac{289}{289}} = \frac{16}{17}\sqrt{389}$$

$$17 \cdot 17 = 289$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} K_2CC_1 = \operatorname{ctg} O_2CK_2 = \frac{K_2C}{K_2O_2} = \frac{\frac{16}{17}\sqrt{389}}{16} = \frac{\sqrt{389}}{17} = m_1$$

5) Рассмотрим ~~положительные~~ неотрицательные $A \Rightarrow A \in [0; +\infty)$

Если $A < m_1$, то нет таких b, чтобы прямая пересекала каждую из окруж в 2ух точках.

Если $A = m_1$, то максимум 2 решения (либо пересеч одной окруж в двух точках, либо касание обеих при $B = C$, $C = \frac{16}{17}$)

Если $A > m_1$, то найдется такое B, что будет 4 точки пересеч.

$\Rightarrow$ подходит $A \in (m_1; +\infty)$.

Аналогично для $A \in (-\infty; 0)$ получим $A \in (-\infty; -m_1)$ (вторая касательная имеет такой коэф)

$$\Rightarrow A = \frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{389}}{17}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{389}}{17}; +\infty\right).$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{389}}{17}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{389}}{17}; +\infty\right)$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{389}}{17}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{389}}{17}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 лист 1 решения

1) $\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64) = 0 \end{cases}$

2) Уравнения решений:

① $x^2+y^2-1=0$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow$ окружность ω_1 с центром в $O_1(0;0)$ и $r_1=\sqrt{1}=1$

② $x^2+y^2-20y+64=0$

$x^2+y^2-20y+100=36$

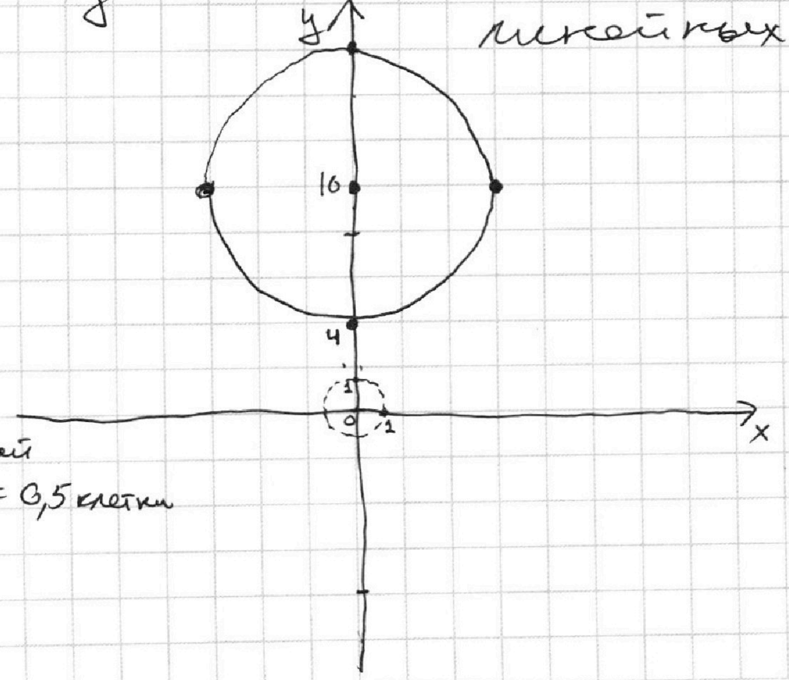
$x^2+(y-10)^2=6^2 \Rightarrow$ окружность ω_2 с центром в $O_2(0;10)$ и радиусом $r_2=\sqrt{6^2}=6$

③ $ax-3y+4b=0$

$y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$ Замена: $\frac{a}{3}=A$, $\frac{b}{3}=B$

$y=Ax+B$ – множество всех линейных функций.

3)



единичный отрезок = 0,5 клетки

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

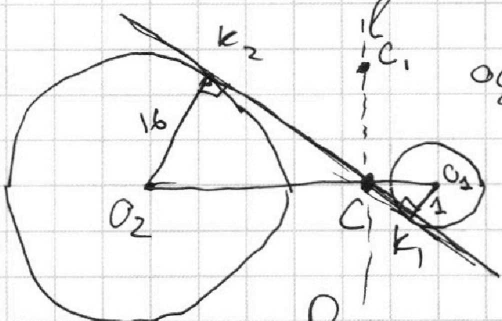
[ ] [ ] [ ] [X] [ ] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 лист 2 решения

4) Найдем уравнения касательных к обеим окружностям пересекающих отрезок соединяющий центры.

Заметим, что ~~коэф~~ это линейных функции, с одинаковым свободным членом и равными по модулю, но разными по знаку коэф. при x.



Рассмотрим одну такую касательную (см. чертеж). Назовем точки касания K_2 и K_1, и $O_1O_2 \cap K_1K_2 = C$

$\angle O_2CK_2 = \angle O_1CK_1$ (т.к. вертикальные)
$\angle O_2K_2C = \angle O_1K_1C = 90°$ (как угол между радиусом в точку кас. и касат) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle O_2K_2C \sim \triangle O_1K_1C$ (по двум углам)

$\Rightarrow$ коэф подобия $k = \dfrac{O_2K_2}{O_1K_1} = \dfrac{16}{1} = \dfrac{O_2C}{O_1C}$

Также $O_2C + O_1C = O_2O_1 = 10$

$\Rightarrow O_2C = \dfrac{16}{17} \cdot 10 \quad O_1C = \dfrac{10}{17}$

д.п. $l \perp O_2O_1$, $C \in l$ $\Rightarrow l \perp Oy \Rightarrow l \parallel Ox$

$\Rightarrow$ ~~угол равен~~ тангенс угла K_2CC_1 есть коэф наклона одной из касательных

$\Rightarrow$ он равен $ctg\angle O_2CK_2$ (т.к. эти углы в сумме дают $\frac{\pi}{2}$)

$\Rightarrow$ равен $\dfrac{K_2C}{K_2O_2}$. По т. Пифагора в $\triangle O_2CK_2$

$K_2C = \sqrt{\left(\dfrac{160}{17}\right)^2 + 16^2} = 16 \cdot \sqrt{\left(\dfrac{10}{17}\right)^2 + 1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5 лист 2 решения

$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{b} - 3 \quad \| b \neq 0, \cdot 3b$

$3b^5 + 12 = -1 - 9b$

$3b^5 + 9b = -13$ Аналогично пункту 1

$\Rightarrow$ 1 корень по b $\Rightarrow$ 1 по y

3) $a + b = \log_5 x + \log_5 y =$

$= \log_5 xy \Rightarrow xy = 5^{a+b}$

4) Заметим, что $f(a)$ — нечетная функция:

$f(-a) = -3a^5 - 9a = -f(a)$.

$\Rightarrow$ если при $a = A$ функция принимает значение 13, то значение -13 она принимает при $a = -A$

$\Rightarrow \begin{cases} a = A \\ b = -A \end{cases} \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow xy = 5^0 = 1$

учитывая единственность x и y других знач. нет.

Ответ: 1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5 лист 1 решения

1) $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x>0 \\ 2x\neq 1 \\ 2x>0 \\ 8x^3>0 \\ 8x^3\neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x\neq \frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases}$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\cdot\log_{2x}5 - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\log_5 2x} - 3$

Замена $\log_5 2x = a$

$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{a} - 3$ $\quad \| a=0$ не корень $\Rightarrow \cdot 3a$

$3a^5 - 9 = 4 - 9a$

$3a^5 + 9a = 13$ Введем $f(a) = 3a^5 + 9a$

$f'(a) = 15a^4 + 9$

$f'(a) > 0$ всегда

$\Rightarrow$ слева монотонная функция справа константа

$\Rightarrow$ 1 корень по a $\Rightarrow$ 1 корень по x (логарифм тоже монотонный)

2) $\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3$

ОДЗ: $\begin{cases} y>0 \\ y>0 \\ y\neq 1 \\ y^3>0 \\ y^3\neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y>0 \\ y\neq 1 \end{cases}$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_5 y} - 3$

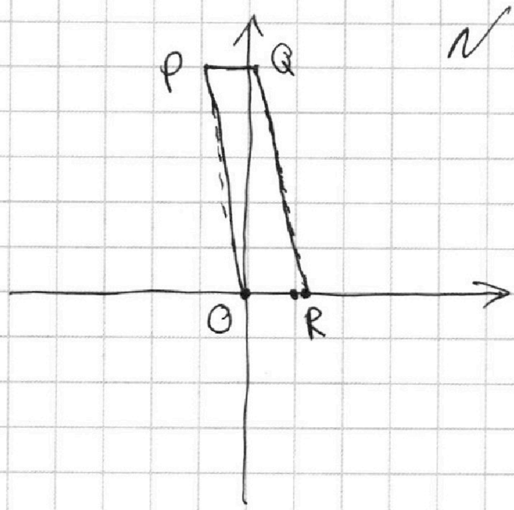
Замена $\log_5 y = b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

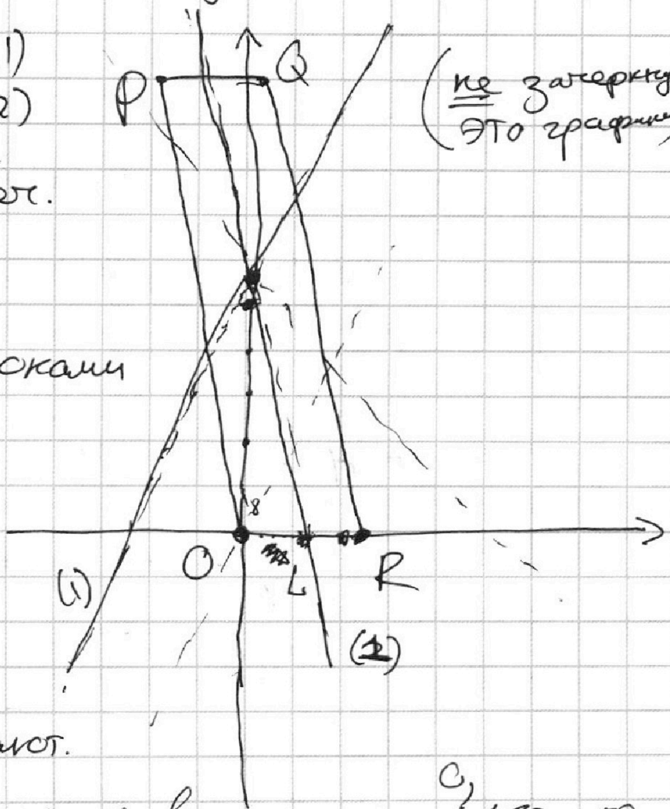
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 лист 1 реш



~~для~~ Если первую точку взять как O, то ГМТ точек удовлетворяющих условию задается прямыми
$-5x_1 - y_1 = 45$
и $5x_1 + y_1 = 45$

$\Rightarrow y_1 = -5x + 45$ (1)
$y_1 = 5x + 45$ (2)



(не зачеркнуто это графики)

найдем точки пересеч.

~~(1) и PO~~

не со всеми сторонами будут пересеч.

(1) || PO || QR

~~сразу~~

Все целые точки на (1) удовлетворяют.

$\Rightarrow$ точку O можно сдвинуть на 0, 1, 2, ... 9 шагов влево и вправо подходящих. Точек на этой прямой не изменится. Всего их на прямой ~~16~~ ~~10~~ 10 целых иксов на отрезке OL $\Rightarrow$ 10 целых точек.

$\Rightarrow$ 100 точек за счет этой прямой.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

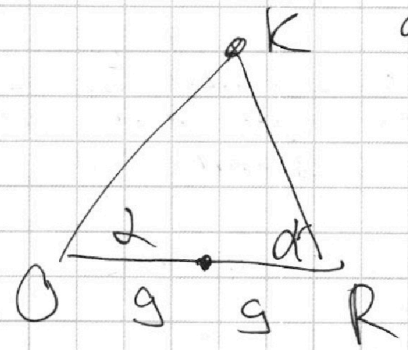
МФТИ

$\cancel{32 = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 2^5 \Rightarrow 32^2 = 1024}$

$\cancel{23 \cdot 73 =}$

№ 6

Вторая прямая даст
еще несколько
точек для каждого
положения O
(1 всегда совпадает
с уже посчитанным)



$tg\,\alpha = 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

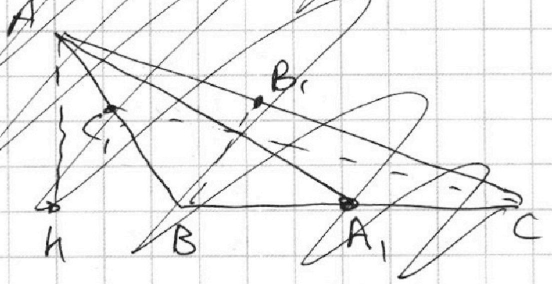
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7 лист 4 решения

$\cancel{\Rightarrow HA_1 > BA_1 \Rightarrow H \notin [BC]}$

~~⇒ новый чертеж~~



итак, по Т. Пифагора

$$AB = \sqrt{(A_1H - BA_1)^2 + AH^2}$$
$$AC = \sqrt{(A_1H + A_1C)^2 + AH^2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC = \sqrt{\left((A_1H - BA_1)^2 + AH^2\right)\left((A_1H + BA_1)^2 + AH^2\right)}$$

$$= \sqrt{(A_1H - BA_1)^2(A_1H + BA_1)^2 + (A_1H - BA_1)^2 AH^2 + (A_1H + BA_1)^2 AH^2 + AH^4} =$$

$$= \sqrt{(A_1H^2 - BA_1^2)^2 + AH^2(A_1H^2 - 2A_1H\cdot BA_1 + BA_1^2 + A_1H^2 + 2A_1H\cdot BA_1 + A_1B^2) + AH^4} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{23\cdot 73}{4} - 64\right)^2 + \frac{25^2}{4}\left(2\cdot(A_1H^2 + BA_1^2)\right) + \frac{25^4}{2^4}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1679 - 1024}{4}\right)^2 + \frac{625}{2}\cdot\left(\frac{1679}{4} + \frac{1024}{4}\right) + \frac{25^4}{2^4}} =$$

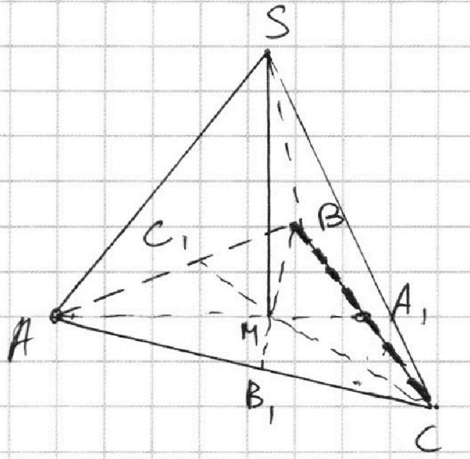
$$= \sqrt{\left(\frac{655}{4}\right)^2 + \frac{625}{8}(2703) + \frac{25^4}{2^4}}$$

Обозначим это число как m

$$S_{ABC} = AB\cdot BC\cdot \sin$$

не решил

№ 7 лист 1 реш

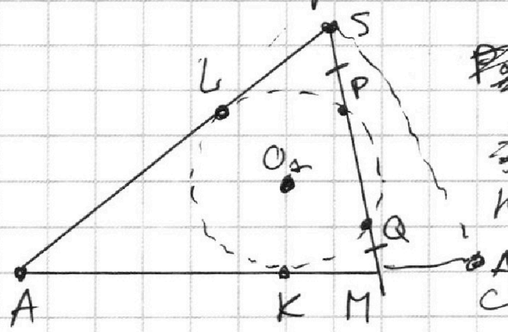


(~~Вершина~~ CM не обязательно перпендикулярна (ABC))

1) Назовем центр сферы O.

~~OL, OK – радиусы ⇒ (OLK) – осевое сеч. 1~~
~~OP, OQ – радиусы ⇒ (OPQ) – осевое сеч. 2~~
~~P, Q ∈ SM ⇒ ⇒ SM ⊂ (OPQ)~~

Рассмотрим сечение сферы плоскостью (SAM):



~~Радиус окружности в этом сечении равен O_1 ⇒ это осевое сечение сферы.~~

Назовем полученную окружн Ω_1 с центром O_1.

Степень M относительно Ω_1

$\deg(M) = MQ \cdot MP = KM^2$

$\deg(S) = SP \cdot SQ = SL^2$

$MQ = SP \Rightarrow \deg(M) = MQ \cdot (MQ + PQ) =$
$= SP(SP + PQ) = SP \cdot SQ = \deg(S)$

$\Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow SL = MK$

$AL = AK$ (как отрезки касательных из одной точки к одной окружн)

$\Rightarrow AM = AK + KM = AL + LS = AS = 16$

2) По св-ву медиан в треугольнике ABC:

$AM = 2MA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} h_A \cdot BC = 100$

где h_A – длина высоты из вершины A

$\Rightarrow h_A = \frac{200}{16} = \frac{8 \cdot 25}{16} = \frac{25}{2}$ (высота AH)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7 лист 3 решения

$$= \sqrt{24^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{48^2 - 25^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(48-25)(48+25)}}{2} = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{2} = A_1H$$

$\cancel{BH = \frac{BC}{2}}$ д.п. $MH_1 \perp BC$

$\cancel{MA}$ $\triangle MA_1H_1 \sim \triangle AHA_1$; $MA_1 = \frac{1}{3}AA_1$

$$\Rightarrow MH_1 = \frac{1}{3}AH = \cancel{\frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{6}}\ \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{6}$$

$$S_{BMC} = MH_1 \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{BM \cdot MC}{2} \cdot \sin\alpha$$

где $\alpha = BM^\wedge MC$

$$\Rightarrow MH_1 \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{3}BB_1 \cdot \frac{2}{3}CC_1}{2} \cdot \sin\alpha$$

~~Учитывая утверждение пункта 3 решения получаем систему (обозначим BB₁ за b, CC₁ за c.)~~

$$\cancel{\begin{cases} bc = \frac{3}{2} S_{ABC} \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \\ MH_1 \cdot BC = \frac{4}{9} bc \cdot \sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = \frac{3}{2} \cdot 100 \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \\ \frac{25}{6} \cdot 16 = \frac{4}{9} bc \cdot \sin\alpha \end{cases}}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \begin{cases} bc = \frac{150}{\sin\alpha} \\ bc = \frac{16 \cdot 25 \cdot 9}{6 \cdot 4 \sin\alpha} = \frac{25 \cdot 3 \cdot 2}{\sin\alpha} \end{cases}}$$ ...ой.

~~5) В пр/уг △BHA по Т. Пифагора:~~

$$\cancel{AB = \sqrt{BH^2 - HA^2} = \sqrt{(BA_1 - HA_1)^2 - HA^2} =}$$

$$\cancel{= \sqrt{\left(8 - \frac{23 \cdot 73}{4}\right)^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{(32^2 - 23 \cdot 73)^2 - 50^2}}{4} =}$$

~~Первое слагаемое под корнем — отрицательное в квадрате~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

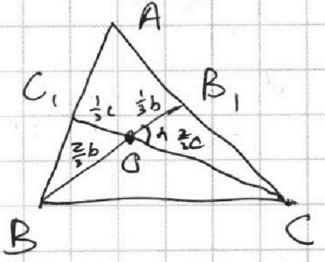
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 лист 2 решения

3) Рассмотрим некоторый ΔABC (обозначения в данном пункте решения не соотносятся с обознач. задачи) в котором нам известны медианы b, c и угол α между ними.



Учитывая основное св-во медиан обозначим на чертеже отрезки. Тогда C_1B_1 - средняя линия $\Rightarrow \Delta AC_1B_1 \sim \Delta ABC$ (как отсеченный прямой парал. ос.)

с коэф. подобия $\frac{1}{2}$

Тогда $S_{BCB_1C_1} = S_{ABC} - S_{AB_1C_1} = \frac{3}{4} S_{ABC}$

Также $S_{BCB_1C_1} = S_{C_1OB_1} + S_{C_1OB} + S_{BOC} + S_{COB_1}$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}bc + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot bc + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}bc + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}bc\right)$$

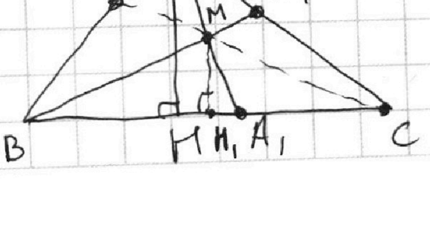
$$= \frac{1}{2}\sin\alpha\cdot bc\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2}\sin\alpha\cdot bc$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}S_{ABC} = \frac{1}{2}\sin\alpha\cdot bc$$

$$\Rightarrow bc = \frac{3}{2}S_{ABC}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}$$

$\Rightarrow$ Произведение двух медиан треугольника равно $\frac{3}{2}$ площади треугольника деленной на синус угла между этими медианами.

4)



← плоскость (ABC)

В ΔHAA_1 по Т. Пифагора:

$HA_1 = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} =$

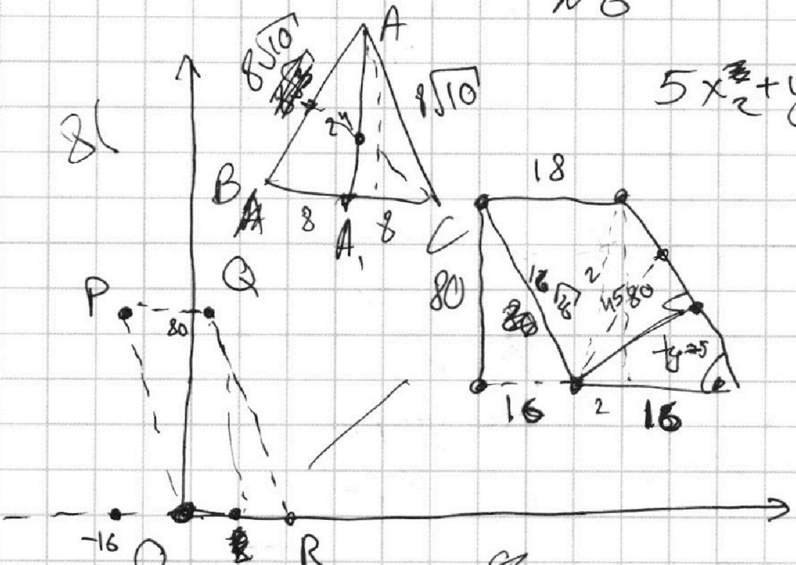
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6



$5x_2^2+y_2^2-5x_1^2-y_1^2=45$

$\sqrt{80^2+16^2}=16\cdot\sqrt{5^2+1^2}=16\sqrt{26}$

$16\sqrt{26}\cdot x=80\cdot 18$

$\sqrt{26}\,x=5\cdot 18$

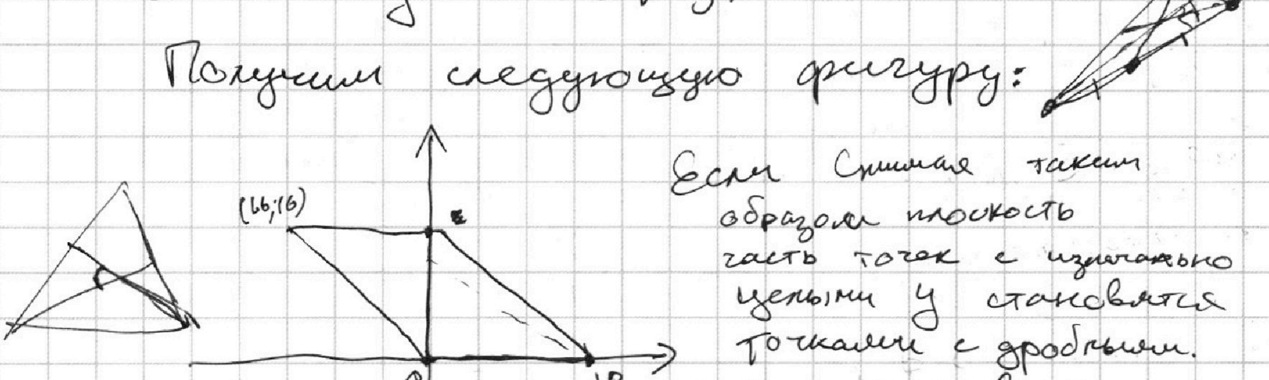
$x=\frac{90}{\sqrt{26}}$

~~Если~~

Нас устраивают пары точек $(5x_2;y_2)$ $(5x_1;y_1)$, манхэттенское расстояние между которыми ~~не превышает~~ 45. строго равно 45

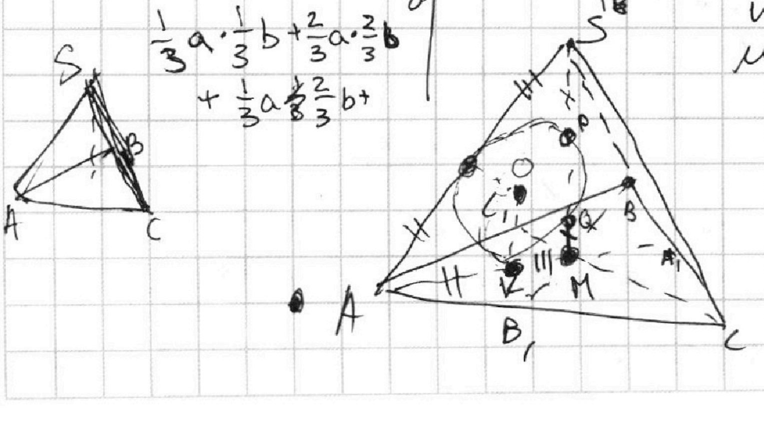
„Сожмем" всю плоскость вдоль оси Oy в 5 раз.

Получим следующую фигуру:



Если сжимая таким образом плоскость часть точек с изначально целыми y становятся точками с дробными. И рассматриваем мы пары точек.

$\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a\cdot\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}a\frac{2}{3}b+$



$BC\cdot AA_1\cdot\sin BA_1A=100$

$\Rightarrow$ выс к $BC=\frac{100}{16}=\frac{25}{4}$