



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть $ab = k \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, $bc = n \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$
 $ac = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, где $k, n, m \in \mathbb{N}$.

Перемножим: $a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$.

Извлекаем корень ($abc > 0$,
т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$): $abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \sqrt{kmn \cdot 3 \cdot 5}$

Поскольку $abc \in \mathbb{N}$, ~~$\sqrt{kmn \cdot 3 \cdot 5}$~~ тоже
 $\in \mathbb{N}$. Это в частности означает, что

$kmn : 3$, т.е. $kmn = 3t$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда

$abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \sqrt{3 \cdot t \cdot 3 \cdot 5} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{37} \sqrt{5t}$.

Из этого следует $abc : 2^{17} \cdot 3^{22}$.

Из условия $ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43} \Rightarrow$

т.к. 2, 3, 5 взаимно просты

$\Rightarrow abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$. Значит $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Значение $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ достигается при
 ~~$a = 2^4 \cdot 3^{12} \cdot 5^{20}$
 $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^{23}$
 $c = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^{23}$
 $4+3+10=17, 12+5+5=22, 20+23+23=43$~~
 Проверим начальное условие
 ~~$ab = 2^7 \cdot 3^{17} \cdot 5^{20} \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{18}$
 $bc = 2^{15}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Наименьшее возможное значение $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$
достигается при $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{20}$
 $b = 2^3 \cdot 3^5$
 $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{23}$

$$4+3+10=17, \quad 6+5+11=22, \quad 20+23=43.$$

степень для 2 для 3 для 5.

Проверим указанные условия:

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{23} : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

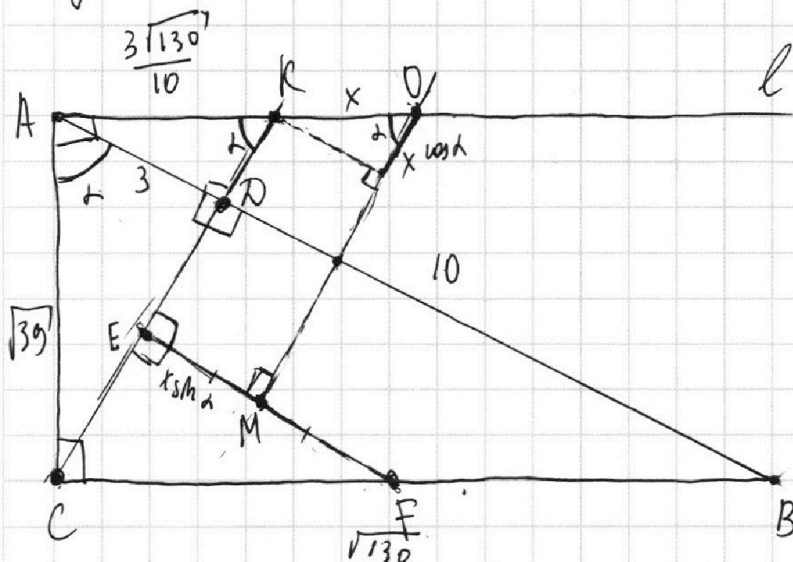
Выполнено.

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.



1. Поскольку CD - высота и гипотенуза, то AB - гипотенуза и $C \in [AB]$.

2. Поскольку нам известны лишь отрезки, и известно $AB : BD = \frac{13}{10}$, то пусть $AB = 13$, $BD = 10$. Тогда $AD = 3$.

3. Для высот CD и гипотенузы верно:
 $CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{3 \cdot 10} = \sqrt{30}$.

4. По теореме Пифагора в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{9 + 30} = \sqrt{39} \quad (\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ)$$

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{100 + 30} = \sqrt{130}$$

5. Через т. А проведем прямую $l \parallel BC$.

Получим $(BC) \perp (AC)$, то и $l \perp (AC)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $(AO) \perp l = k$.

6. ~~Пусть~~ $(AK) \parallel (BC)$ ^{по зн о проп. отрезков} $\Rightarrow \frac{AK}{BC} = \frac{AO}{BO} = \frac{3}{10} \Rightarrow AK = \frac{3}{10} BC =$
 $= \frac{3}{10} \sqrt{130}$

7. Пусть O - центр описанной в условии ок-ти.

Тогда $(AO) \perp (AC)$, как радиусе и касательная, значит $O \in l$.

8. Поскольку $(EF) \parallel (AB)$, (EF) , как и $(AB) \perp (AO)$.

Пусть M - середина EF . Тогда OM является средним перпендикуляром к EF (т.к.

O - центр, ок-ти), т.е. $(OM) \perp (EF)$, значит

$(OM) \parallel (EO) \Rightarrow \angle EOM = 90^\circ$, т.е. $(OM) \parallel (EK)$.

Получено, что $K \in [AO]$, а не как-то иначе.

9. Пусть $KO = x$. Тогда $AO = \frac{3\sqrt{130}}{10} + x$ - радиусе ок-ти.

10. Пусть $\angle CAB = \alpha$. Из $\triangle ABC$:
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{130}}{13}$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{13} = \frac{\sqrt{3 \cdot 10}}{13 \cdot 13} = \sqrt{\frac{3}{13}}$
 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{130}}{30} = \sqrt{\frac{10}{3}}$

$$\angle AKC = 90^\circ - \angle OAK = 90^\circ - (90^\circ - \angle CAB) = \alpha.$$

$$\angle AOM = \angle AKC = \alpha.$$

(при \parallel -ных прямых)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11. EM - высота прямоугольного треугольника MEK ,

$$\text{т.е. } EM = KO \cdot \sin \alpha = x \cdot \frac{\sqrt{130}}{13}$$

$$EF = 2EM = 2x \cdot \frac{\sqrt{130}}{13} = 2x \cdot \frac{\sqrt{10}}{13}$$

12. Поскольку $(EF) \parallel (BD)$: $\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CO} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2x \cdot \frac{\sqrt{10}}{13}}{10} = \frac{CE}{\sqrt{30}} \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{30} \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{10}}{13}}{10} =$$

$$= \frac{x \cdot \frac{\sqrt{30 \cdot 10}}{13}}{5} = \frac{x \cdot 10 \sqrt{3}}{5 \sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}}$$

13. Из $\triangle CAK$: $CK = \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{39}}{\frac{\sqrt{130}}{13}} = 13 \sqrt{\frac{3 \cdot 13}{13 \cdot 10}} = 13 \sqrt{\frac{3}{10}}$

$$EK = CK - CE = 13 \sqrt{\frac{3}{10}} - \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}}$$

14. Опустив высоту QU на (OM) видно,

$$\text{что } QU = EK + x \cdot \cos \alpha = 13 \sqrt{\frac{3}{10}} - \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}} + x \cdot \frac{\sqrt{3}}{13} =$$

↑ $\triangle KEM$ ↑ $\triangle KEM$

$$= 13 \sqrt{\frac{3}{10}} - x \sqrt{\frac{3}{13}}$$

15. По б.т. гипотенуза в $\triangle EOM$: $EO = \sqrt{EM^2 + OM^2}$

это равно радиусу OM , т.е. $AO = \frac{3\sqrt{130}}{10} + x = 3\sqrt{\frac{13}{10}} + x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

17. Угол $\angle ACD = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{30}}{2}$
↑
прямоуг.

$$CE = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{13 \cdot 10}}{4}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$EF = 2x \cdot \sqrt{\frac{10}{13}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{130}}{4} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 5$$

$$S_{ECF} = \frac{CE \cdot EF}{2} = \frac{5\sqrt{30}}{4}$$

$$S_{ACD} : S_{ECF} = \frac{3\sqrt{30}}{2} : \frac{5\sqrt{30}}{4} = \frac{3\sqrt{30} \cdot 4}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{30}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2}{5} = 6 : 5$$

Ответ: $6 : 5 = 1,2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$16. \quad EO^2 = AO^2 \Rightarrow EM^2 + OM^2 = AO^2 \Rightarrow x^2 \cdot \frac{130}{169} +$$

$$+ \left(13\sqrt{\frac{3}{10}} - x\sqrt{\frac{3}{13}} \right)^2 = \left(3\sqrt{\frac{13}{10}} + x \right)^2$$

$$\frac{10}{13}x^2 + 169 \cdot \frac{3}{10} + x^2 \cdot \frac{3}{13} - 2x \cdot 13 \cdot \frac{3}{\sqrt{130}} = 9 \cdot \frac{13}{10} + x^2 + 2 \cdot 3x \cdot \sqrt{\frac{13}{10}}$$

$$x^2 \left(\frac{10}{13} + \frac{3}{13} - 1 \right) + 2x \left(\frac{13 \cdot 3}{\sqrt{130}} - \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{10}} \right) + \frac{169 \cdot 3 - 9 \cdot 13}{10} = 0$$

$$\frac{120}{13}x^2 + 0 \cdot x + \frac{13 \cdot 3 \cdot 10}{10} = 0$$

$$x^2 \cdot \frac{10}{13} + \frac{13 \cdot 13 \cdot 3}{10} + x^2 \cdot \frac{3}{13} - 2 \cdot x \cdot 13 \cdot \frac{3}{\sqrt{130}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 13}{10} + x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \sqrt{\frac{13}{10}}$$

$$x^2 \left(\frac{10}{13} + \frac{3}{13} - 1 \right) - 2x \frac{3(13+13)}{\sqrt{130}} + \frac{13 \cdot 3(13-3)}{10} = 0$$

$$12x \cdot \frac{13}{\sqrt{130}} = 13 \cdot 3$$

$$x = \frac{13 \cdot 3 \cdot \sqrt{130}}{13 \cdot 12} = \frac{\sqrt{130}}{4} \dots \text{напопеч-то.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. $\arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

~~$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$~~

$$5 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

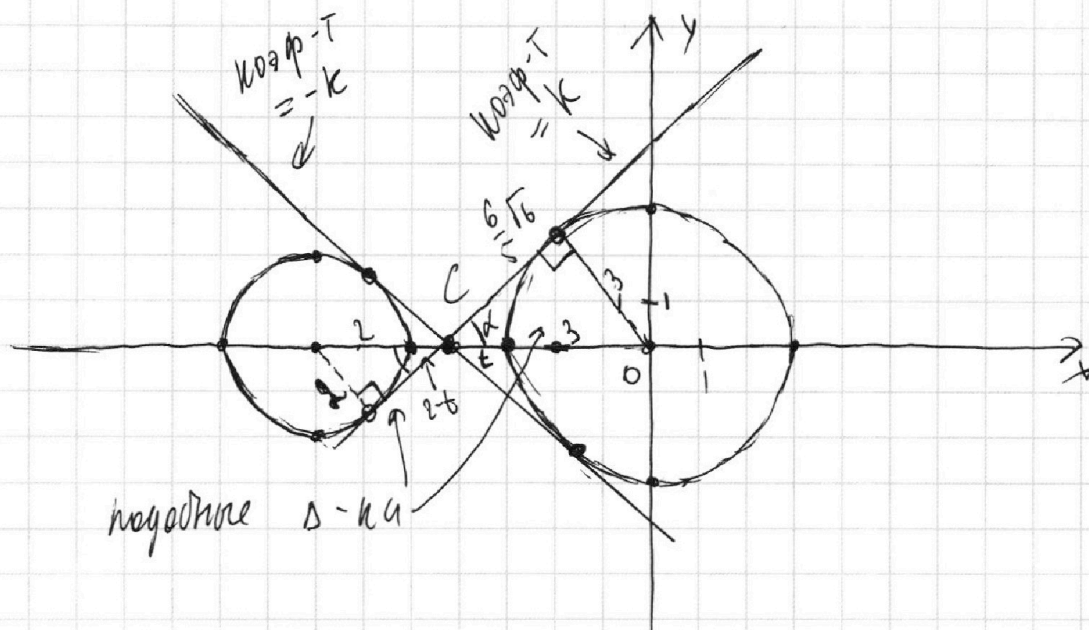
Задача 4.

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 = 3^2 & (1) \\ (x + 7)^2 + y^2 = 2^2 & (2) \end{cases}$$

Вывести на координатной плоскости изображения
объектов, задаваемых системой уравнений.

Сначала (1) - окружность с центром $(0; 0)$,
радиуса 3, (2) - окружность с центром $(-7; 0)$
радиуса 2. (3) - это какая-то прямая.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

точку между центрами. Пусть та, что с
положительным наклоном имеет коэффициент

k . Вторая, очевидно, ей симметрична
относительно Ox , так что имеет ^{угл.} коэф-т $-k$.

Понятно, что нам ^($k = -\frac{1}{3a}$ для какого-то a) подойдут все ~~значения~~
угловые коэффициенты $\in (-k; k)$, мы

сумеет найти a для всех значений,

кроме $k = 0$, так что на деле

нам будут промежутки $(-k; 0) \cup (0; k)$.

Удовольствие целовому пересечению с четвертым
точками \star для подобранных a будет прямые
через точку C_3 (например) с данной маллюшкой.
Видно, что прямые с другими маллюшками
(смилом вольным по подурю) могут пересекать
лишь одну ок-ть.

Найдем точку C .

см. рисунок

Рассмотрим подобные треугольники, образованные
центрами ок-тей, точкой C и точками

касания с ~~прямой~~ общей касательной с коэф-том

k . Пусть C делит отрезок между окружностями
на Ox (он дает $2 : [-5; -3]$) на

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мы хотим, чтобы каскама имела ~~два~~ ^{несколько} решений.

То есть, чтобы прямая пересекала ок-ги суммарно в 4х точках. То есть каскама - в 2 точки.

При $a=0$ ур-е прямой $x=7b$.

Ок-ги не имеют точек с одинаковым ординатой, так что решений существует не более 2.

Не подходит. Так что считаем, что $a \neq 0$.

Тогда $x + 3ay - 7b = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x}{3a} + \frac{7b}{3a}$

Итак, a задаст ~~уровень~~ ^{наклон} прямой.

Так что если при данном угле наклона

$-\frac{1}{3a}$ в принципе дает 3 пересечения,

то мы хотим подобрать свободный

член $\frac{7b}{3a}$ так, чтобы они были,

т.к. при фиксированном $a \neq 0$ $\frac{7b}{3a}$ принимает

все значения на $(-\infty; +\infty)$ изменением b .

Осталось только найти подходящие координаты.

Поскольку ось Ox - линия уровней этих ок-гей,
то есть две окружности касаются через какую-то
внутреннюю!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из условия $2-t$ и t . тогда отношение катетов гипотенузы и катетов подобной Δ -ков:

$$\frac{2+2-t}{3+t} = \frac{2}{3} \Rightarrow 12-3t = 6+2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 = 5t \Rightarrow t = \frac{6}{5} \text{ значит координата}$$

$$C - \left(-4\frac{1}{5}; 0\right)$$

На самом деле k - тангенс угла α наклона касательной. Второй катет b и сумма Δ -ки равен по $6t$ гипотенуза

$$\begin{aligned} & \sqrt{(3+t)^2 - 3^2} = \sqrt{9+t^2+6t-9} = \\ & = \sqrt{t^2+6t} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{6 \cdot 6}{5}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 6}{5}} = \frac{6}{5} \sqrt{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак } k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{6}{5} \sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{3}{6\sqrt{6}} =$$

$$-\frac{1}{3\alpha} \in (-k; 0) \cup (0; k) = \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{2\sqrt{6}}\right) = \left[\frac{5}{2\sqrt{6}}\right]$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right).$$

$$\text{ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right).$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5. Решим (предложу) ур-е из условия.

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$\uparrow x > 0$

ОДЗ: $x > 0$
 $6x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{6}$
 $36x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm \frac{1}{6}$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$= \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{3}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

~~$\log_7^4(6x) - \frac{3}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$~~
 ~~$\log_7^5 6x + 4 \log_{6x} 7 - 7 = 0$~~

$$\log_7^4 6x - \frac{3}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

$$2 \log_7^5 6x + 8 \log_{6x} 7 - 7 = 0 \quad (1) \quad - \text{верно } > 0$$

Для второго ур-е аналогично получим:

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

ОДЗ:
 $y > 0$
 $y \neq 1$

$$\log_7^4 y + 6 \cdot \frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \log_7 y - 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4 y + \frac{3,5}{\log_7 y} + 4 = 0$$

- корень $\neq 0$

$$2 \log_7^5 y + 8 \log_7 y + 7 = 0 \quad (2)$$

Система из условий $\Rightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ + \text{OДЗ} \end{cases}$

~~(1) + (2)~~
~~(2) - (1)~~
Сложим (1) и (2):

$$2(\log_7^5 6x + \log_7^5 y) + 8(\log_7 6x + \log_7 y) = 0$$

$$2(\log_7 6x + \log_7 y)(\log_7^4 6x - \log_7^3 6x \log_7 y + \dots + \log_7^4 y)$$

$$+ 8(\log_7 6x + \log_7 y) = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \log_7 6xy}$

$$\log_7 6xy (2(\dots) + 8) = 0$$

$$\log_7 6xy = 0 \quad (3)$$

$$\log_7^4 6x - \log_7^3 6x \log_7 y + \dots + \log_7^4 y = -4 \quad (4)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(3) $\log_7 6xy = 0 \Leftrightarrow 6xy = 1 \Leftrightarrow$
 $\Rightarrow xy = \frac{1}{6}$. ~~$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ удовлетворяет~~
~~QR-код~~ запомним это.

Рассмотрим ~~(1) - (2)~~ (1) - (2):

$$2(\log_7^5 6x - \log_7^5 y) + 8(\log_7 6x - \log_7^5 y) = 14$$

$$\log_7^5 \frac{6x}{y} (2(\log_7^4 6x + \dots + \log_7^4 y) + 8) = 14$$

Ответ: $\frac{1}{6}$ - наверняка
возможно.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

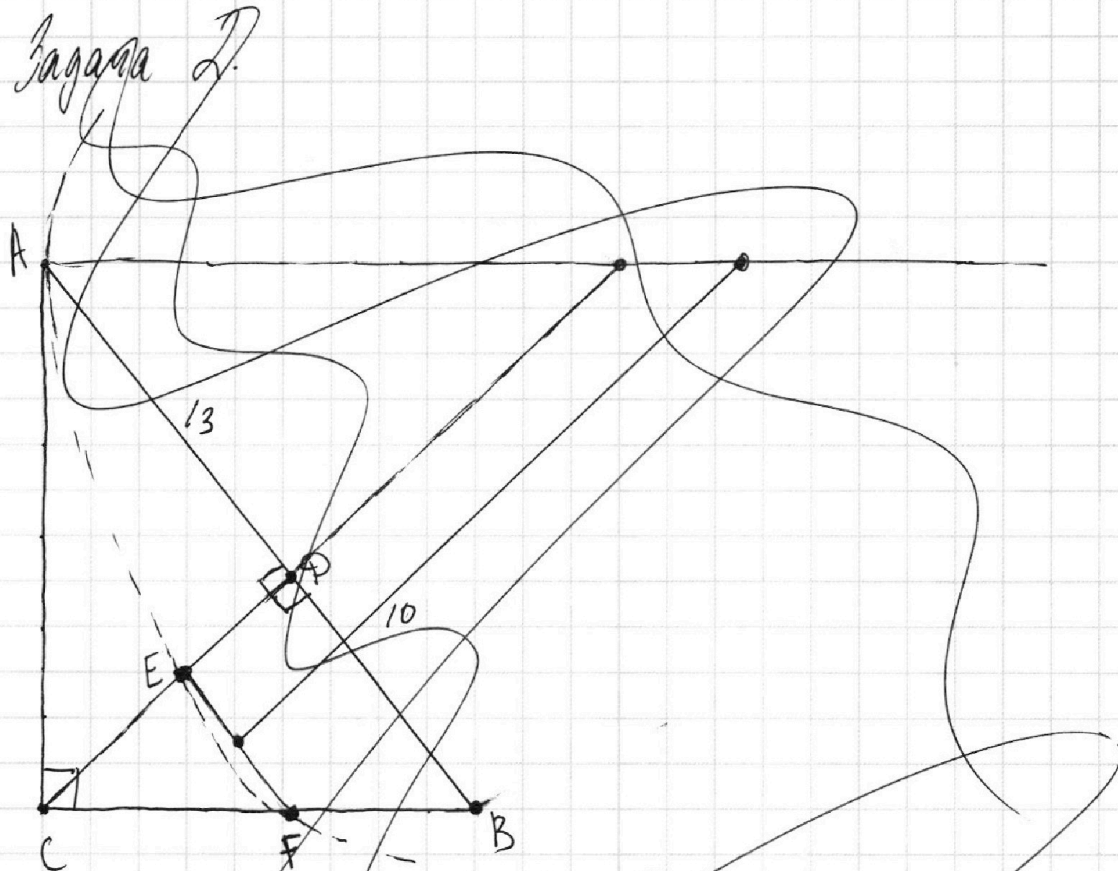
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.



1. Раз высота CD к гипотенузе, значит AB — гипотенуза и $D \in AB$.

2. Прямую в задаче нам даны рисунки отношения и известно $AB \cdot BD = 1, 5 = \frac{13}{10}$,
то будем считать $AB = 13$, $BD = \frac{13}{10}$.

3. Раз высота перпенд. к-ка CD верно
 $CD^2 = A$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The central part features a geometric diagram with a horizontal axis and several points labeled 1 through 10. A vertical line passes through the axis, and a circle is drawn with its center on the axis. A point 'g' is marked on the axis, and a point 'x' is marked on the circle. Various lines and arcs connect these points, forming a complex geometric construction. To the left of the diagram, there are several calculations involving square roots and fractions:

$$\frac{\sqrt{130}}{10} = \sqrt{\frac{13 \cdot 10}{10 \cdot 10}} = \sqrt{\frac{13}{10}}$$

$$\frac{10}{3} + \frac{3}{13}$$

$$\frac{\sqrt{130}}{169} = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$\frac{23^2}{8^2} - 9$$

$$\frac{23^2 - 9 \cdot 8^2}{5} = \frac{529 - 576}{5} = \frac{-47}{5}$$

Other calculations include:

$$g + \frac{3}{13} = \frac{3(3 \cdot 13 + 1)}{13} = 120$$

$$\frac{130}{16} \approx 8.125$$

$$\frac{10}{13} + \frac{3}{13}$$

$$\frac{13 \cdot 13 \cdot 3}{10}$$

$$\frac{9 \cdot 81 \cdot 4}{529}$$

$$\frac{23}{8}$$

Trigonometric expressions are written on the right side:

$$\arccos x \text{ (sin } \theta)$$

$$\arccos \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)$$

$$\sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

The diagram includes labels like 'g', 'x', '8', '9', '10', '13', '16', '130', and '169'. There are also some scribbles and corrections throughout the work.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

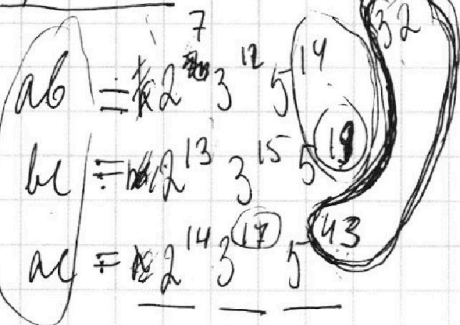
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик



$$33 + 43 = 76 \rightarrow 38$$

$$a^2 b^2 c^2 = kmn \quad 2 \quad 3 \quad 5$$

$$25^3 = 5$$

$$2 \quad 4$$

$$75$$

$$abc = 2^{17} 3^{21} 5^{37}$$

$$\sqrt{15 kmn} = 16 \times 5 = 80$$

$$\text{хотя } 15 \text{ делит } 23$$

$$abc = 2^{17} 3^{22} 5^{38}$$

$$k = 3$$

$$m = 5$$

$$2/6 = 36.6$$

$$a + b = 43 \quad 2/5 = 5/4$$

$$b + c = 19 \quad 43$$

$$a + b = 14$$

$$d(a + b + c) = \dots$$

$$a + b + c = 43$$

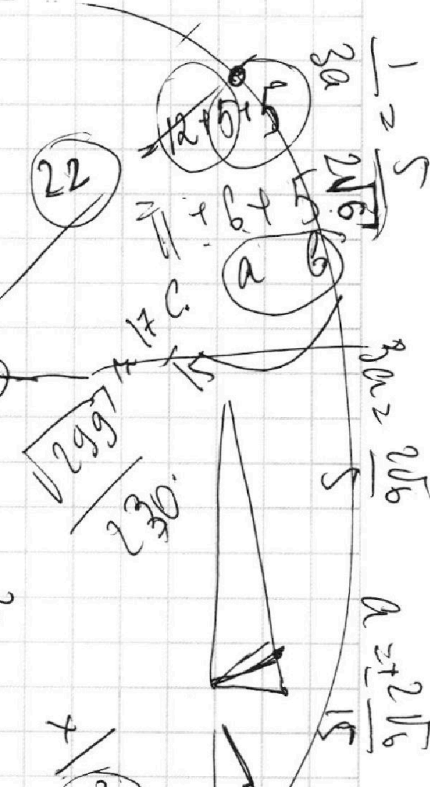
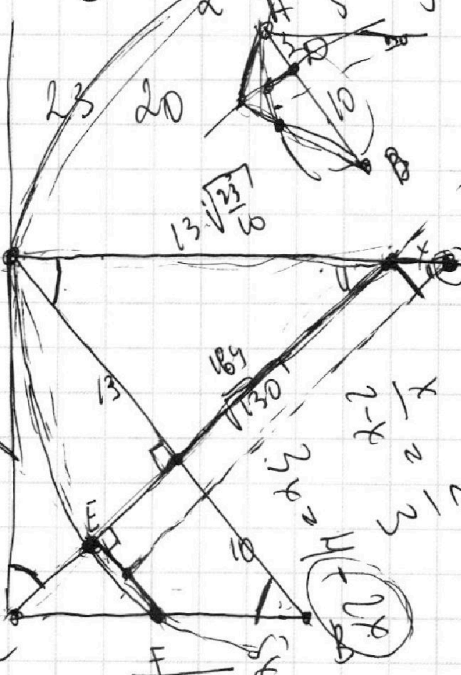
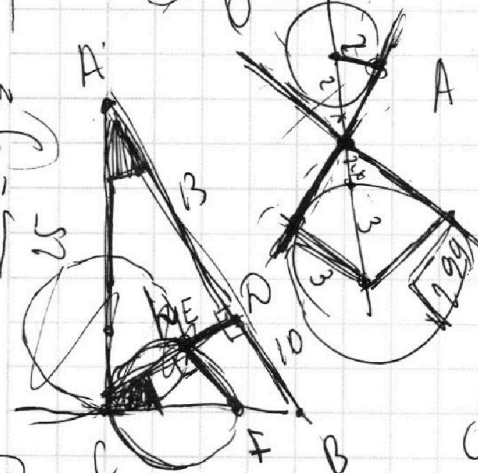
$$a = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5$$

$$(21/5)^2 - 3^2 = 441 - 225 = 216$$

$$\sqrt{216} = 6\sqrt{6}$$



$$420$$

$$21$$

$$h^2 = 10 \cdot 13$$

$$h = \sqrt{130}$$

$$\sqrt{169 + 130} = \sqrt{299}$$

$$13$$

$$\sqrt{169 + \frac{189}{130}}$$

$$x = \frac{169}{\sqrt{230}}$$

$$= 13 \sqrt{1 + \frac{169}{20}}$$

$$= 13 \sqrt{\frac{23}{10}}$$