



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1. $ab: 2^7 3^4 5^{14}$, $bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18}$, $ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

Решение:

Пусть $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ - степени входящие 2 в числа a, b, c
 $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ - " " " 3 " " "
 $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ - " " " 5 " " "

$$\begin{aligned} \text{Т.к. } ab: 2^7 3^4 5^{14} &\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \geq 7 & \alpha_2 + \beta_2 \geq 4 & \alpha_3 + \beta_3 \geq 14 \\ bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18} & \beta_1 + \gamma_1 \geq 13 & \beta_2 + \gamma_2 \geq 15 & \beta_3 + \gamma_3 \geq 18 \\ ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43} & \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 & \alpha_2 + \gamma_2 \geq 17 & \alpha_3 + \gamma_3 \geq 43 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 &\geq 17 & \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 &\geq 22 \end{aligned}$$

$\Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43}$, т.к. степень входя 2 в проуз $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$,
а 3: $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$, причем, : 5^{43} , т.к. степень входя 5 = $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq \beta_3 + \gamma_3 \geq 43$.

Пример:

$$\begin{aligned} a &= 2^4 3^7 5^{20} \\ b &= 2^3 3^4 5^0 \\ c &= 2^{10} 3^1 5^{23} \end{aligned}$$

Ответ: $2^{17} 3^{22} 5^{43}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

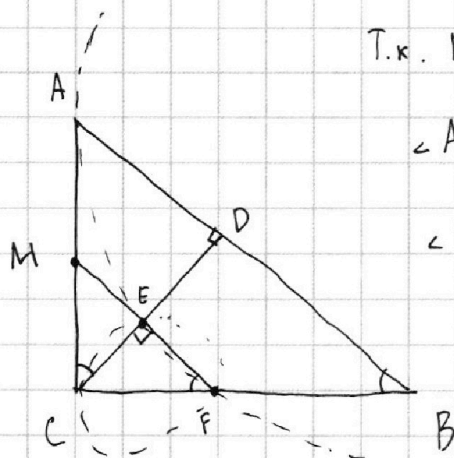
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.



Т.к. $EF \parallel DB \Rightarrow \angle B = \angle EFC = \beta$

$\angle ACD = \beta$, т.к. также как и

$\angle B$ дополняет $\angle A$ до 90°

Т.к. $\angle ACE = \angle CFE \Rightarrow$
AC - кас к окр CEF

EF - рад ось окр CEF и AEF

$M = AC \cap EF$, т.к. $M \in$ рад осей окр AEF и CEF ($\in EF$) и лежит на пр AC явл кас к этим окр \Rightarrow

$$\text{deg } M(AEF) = MA^2 = \text{deg } M(EFC) = MC^2$$

$$\Rightarrow MA = MC$$

Т.к. $EF \parallel AB \Rightarrow \frac{EF}{DB} = \frac{CE}{CD} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EF}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow CE = \frac{1}{2} CD$

Т.к. $\frac{AB}{DB} = 1,3 \Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{10}{3}$, пусть $DB = 10x$, $AD = 3x$

Т.к. ACB - прямоугол треугол и CD - его высота $\Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB = 30x^2$

$\triangle CEF \sim \triangle ADC$ ($\angle CDA = \angle CEF$, $\angle ACD = \angle CFE$)

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AD}{CE}\right)^2 = \left(\frac{3x}{\frac{1}{2}\sqrt{30}x}\right)^2 = \frac{36}{\frac{30}{4}} = \frac{6}{5}$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

Пусть: $d = \arccos(\sin x) \quad d \in [0; \pi]$

$$\cos d = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

1 вар: $d = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \pi + 10\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \Rightarrow d = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi k = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k \in [0; \pi]$$

$$\Rightarrow k \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

2 вар: $d = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$

$$5\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi(-1) = -\frac{9}{6}\pi \quad x_4 = \frac{21}{6}\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} \quad x_3 = \frac{11}{6}\pi$$

~~$$4x = 4\pi$$~~
~~$$x = \pi \Rightarrow d = \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$x = \frac{\pi}{6}$$~~
~~$$x = \frac{11}{6}\pi$$~~

$$4x = 4\pi - 10\pi t$$

$$x = \pi - \frac{5}{2}\pi t$$

$$d = \pi - \frac{5}{2}\pi t - \frac{\pi}{2} + 2\pi t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t \in [0; \pi]$$

$$x_5 = -\frac{3}{2}\pi \quad x_6 = \pi \quad x_7 = \frac{7}{2}\pi \Rightarrow t \in \{1, 0, -1\}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}; -\frac{3}{2}\pi; \pi.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

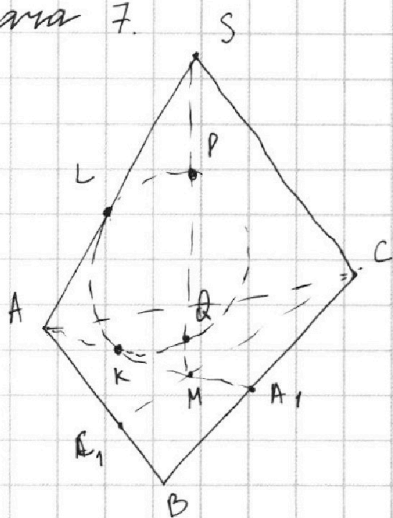
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.

a)



Так как $SP = MQ \Rightarrow$ не у.о. P
лежит между S и Q.

Т.к. Ω касается AB и $AM \Rightarrow$

$AL = AK$, как отрезки касательных
к сфере

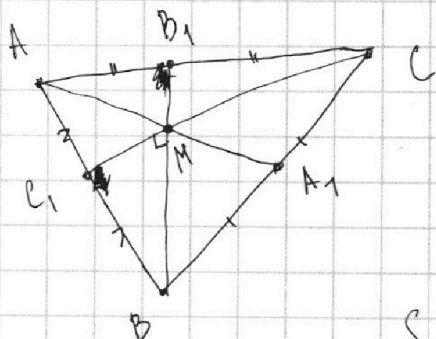
$SL^2 = SP \cdot SQ$ (степень точки S от Ω)

$MQ \cdot MP = SP \cdot SQ = MK^2$ (степень точки M
от Ω)

\Downarrow

$$SL = MK$$

$$AM = AK + KM = AL + SL = AS = 10 = BC. \Rightarrow AA_1 = 15$$



Т.к. M - центр $\triangle ABC \Rightarrow$
 $MA_1 = \frac{AM}{2} = 5 = \frac{BC}{2}$

Т.к. $MA_1 = BA_1 = A_1C \Rightarrow \triangle BMC$ - прямоугол.

$S_{\triangle ACC_1} = S_{\triangle CC_1B} = 30$ (т.к. $\frac{S_{\triangle ACC_1}}{S_{\triangle CC_1B}} = \frac{AC_1}{C_1B} = 1$).

$$S_{\triangle CC_1B} = \frac{BM \cdot CC_1}{2} = 30$$

$$\Rightarrow BM \cdot CC_1 = 60 \quad \text{т.к. } BB_1 = \frac{3}{2} BM \Rightarrow$$

$$BB_1 \cdot CC_1 = 90$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 90 = 1350.$$



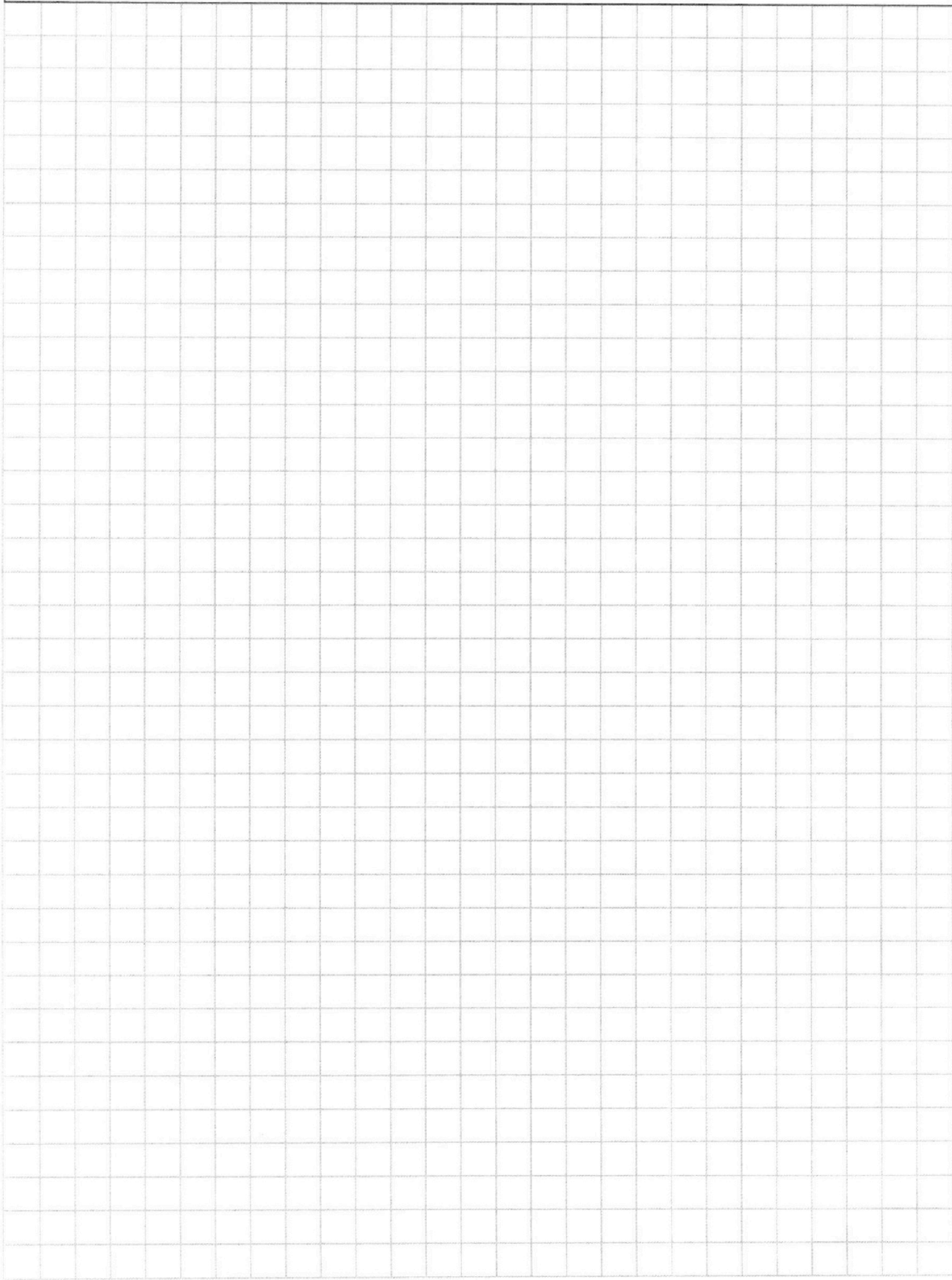
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





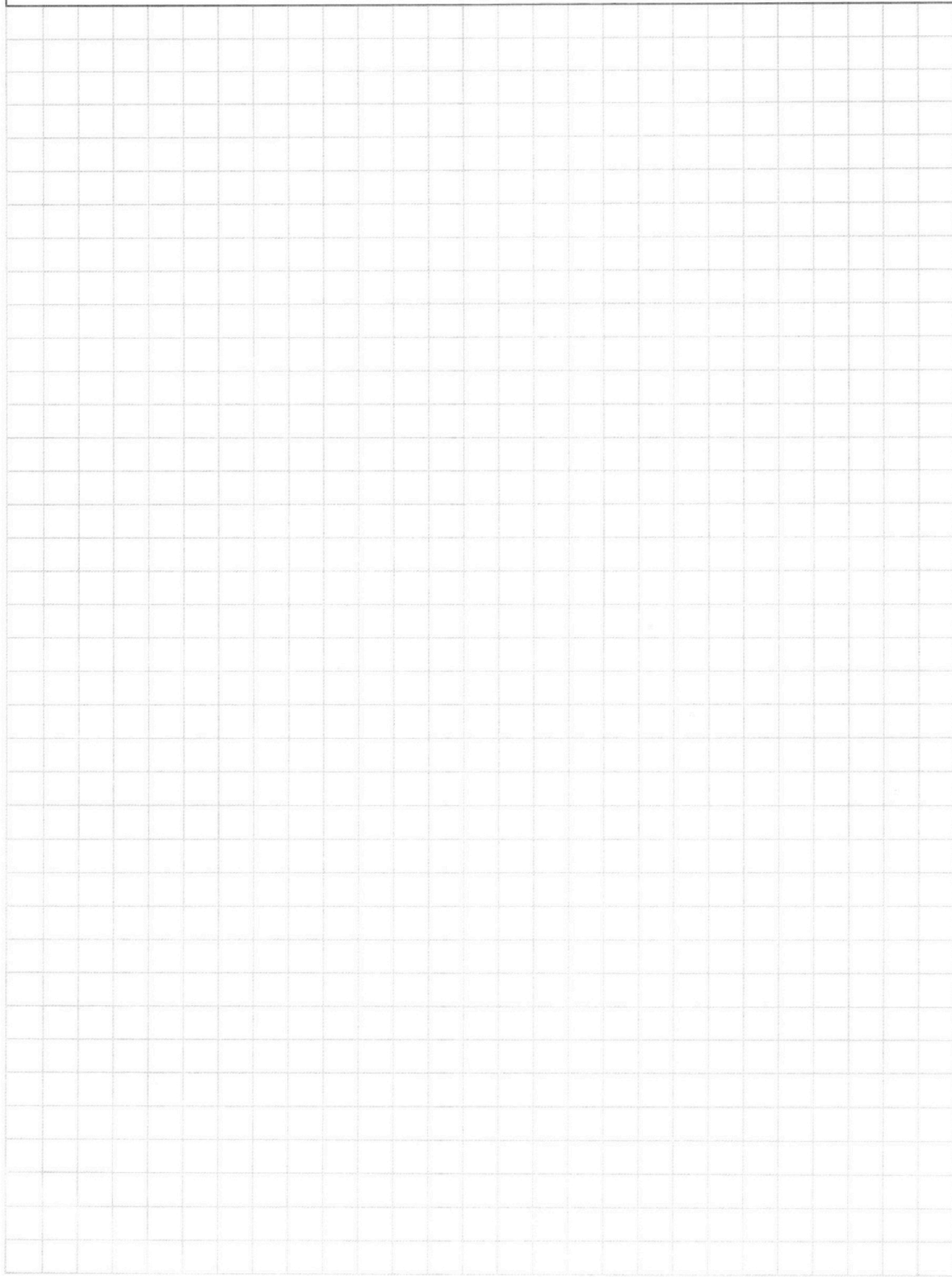
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

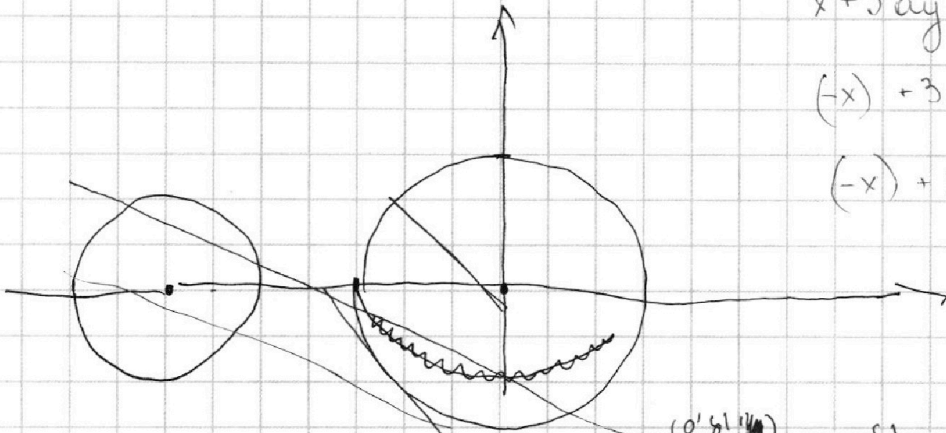


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$(x+7)^2 + y^2 - 4 \quad (x^2 + y^2 - 9) = 0.$$



$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$(-x) + 3a(-y) = -7b$$

$$(-x) + 3a(-y) - 7(-b) = 0$$

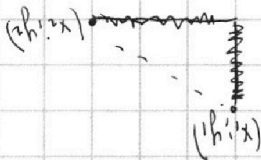
x, y
 $-x, -y$

$$x + 3ay$$

$$|hl| = |9a + 8a| = |10a + 8a| = |18a|$$

$$= 9a + 0a + 8a = 61 \cdot a + 8a$$

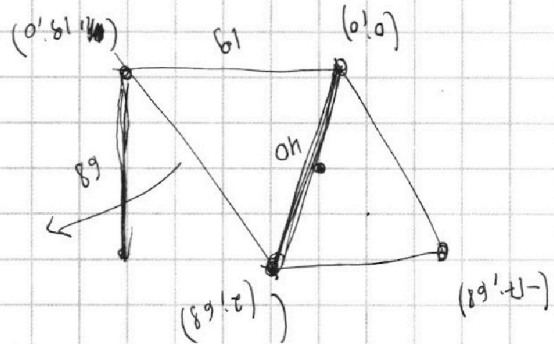
$$|8a + 4a|$$



$$|h - h'| + |l - l'|$$

$$a = h + s \frac{a}{E} + h_s$$

$$a = h + 7 \frac{a}{E} - h$$



$$\log_2(x + 3ay - 7b)$$

$$\log_2(x + 3ay - 7b) = \log_2(x + 3ay) + \log_2(-7b)$$

$$xy = k$$

$$0 = (\log_2(x + 3ay) + \log_2(-7b)) \frac{a}{E} + (\log_2(x + 3ay)) - (\log_2(-7b))$$

$$0 = h + \log_2(-7b) \frac{a}{E} + (\log_2(x + 3ay)) \quad 0 = h + \log_2(x + 3ay) \frac{a}{E} - (\log_2(-7b))$$

$$h - \log_2(x + 3ay) \frac{a}{E} = \log_2(-7b) \frac{a}{E} - (\log_2(x + 3ay))$$

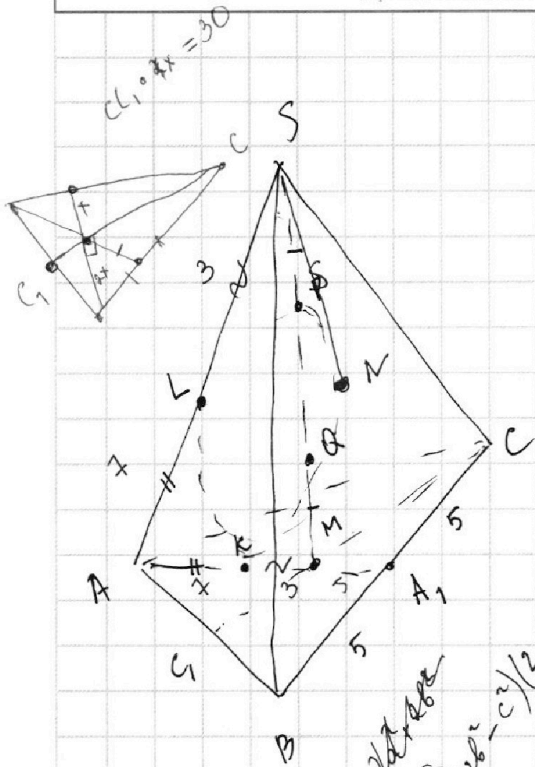
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



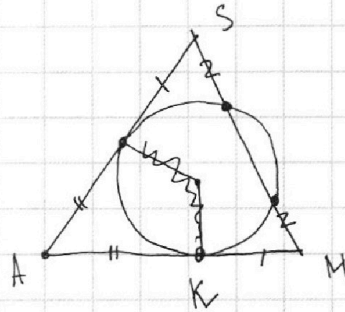
$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$MK^2 = MQ \cdot MP$$

$$S_{ABC} = 60 \quad \text{так}$$

$$SA = BC = 10$$

$$SA = AM = 10$$



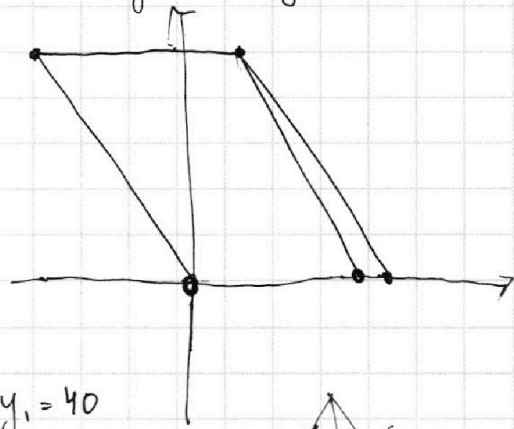
0;0 (19;0)

A(x₁; y₁) B(x₂; y₂)

$$\left(\frac{1}{\log_6 7}\right)^4 - 2 \log_6 7 = \frac{3}{2} \log_6 7 - 4$$

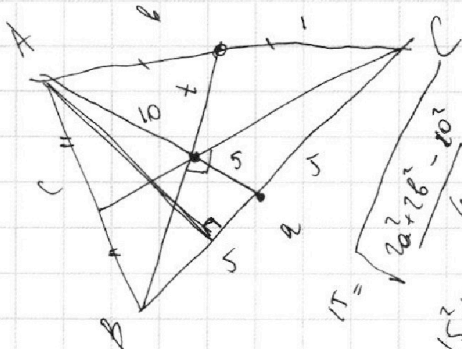
$$\left(\frac{1}{\log_y 7}\right)^4 + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4$$

$$t = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2 - a^2}{4}}$$



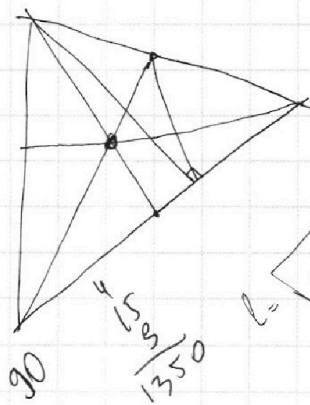
$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

$15^2 + 5^2 - 2 \cdot 15 \cdot 5 \cos \alpha = c^2$
 $15^2 + 5^2 + 2 \cdot 15 \cdot 5 \cos \alpha = b^2$
 $c^2 + b^2 = 15^2 + 2 \cdot$

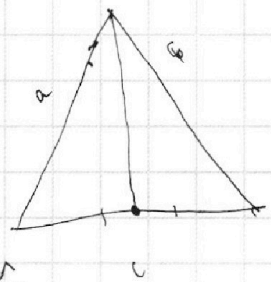


$$15 = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2 - a^2}{4}}$$

$$15^2 + 10^2 = 2a^2 + b^2$$



$$c = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2 - a^2}{4}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^7 3^1 5^{14}$
 $bc: 2^{13} 3^{15} 5^{10}$
 $ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$5^4 3^{17} 2^{14}$
 $a = 2$
 $b = 27$
 $c = 2$

$14 \ 4 \ 3 \ 18$
 $82 \ 75$

$7 \ 13 \ 14 \ 11 + 15 + 17 = 43$

$17, 22, 43$

$= x \sin \gamma$
 $d = (x \sin \gamma) \sin \alpha \sin \beta$
 $x \sin \gamma = 4800$
 $\varphi = (x \sin \gamma) \sin \alpha \sin \beta$

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$
 $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$
 $c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 7 \quad 11 \quad 14$
 $\beta_1 + \gamma_1 \geq 13 \quad 15 \quad 11 \alpha_1 = 4 \quad \beta_1 = 3$
 $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 \quad 17 \quad 13 \quad \gamma_1 = 10$

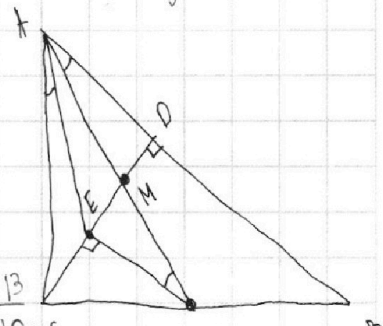
$\alpha_2 = 7 \quad \alpha_3 = 20$
 $\beta_2 = 4 \quad \beta_3 =$
 $\gamma_2 = 1 \quad \gamma_3 = 28$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17$

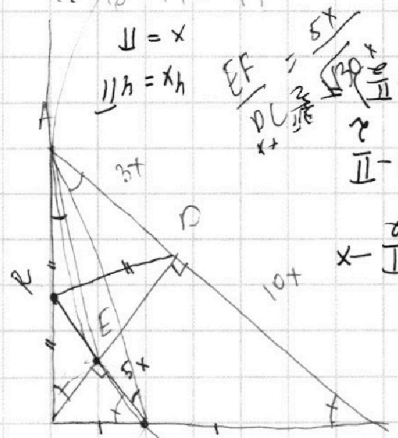
130

$d_2 + \beta_2 \geq 14$
 $\beta_2 + \gamma_2 \geq 18$
 $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 43$

$43 + 18 - 14 = 47$
 $\frac{25}{130} = \frac{5}{26}$



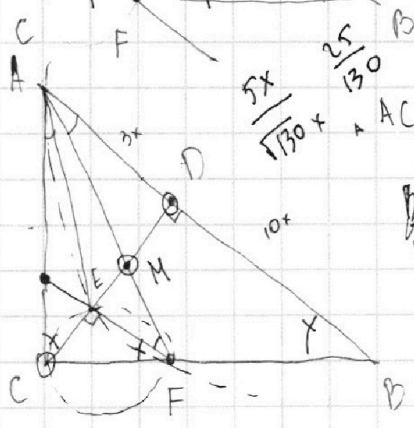
$3x \cdot 5x = \frac{DC^2}{2} = \frac{130x}{2}$



$BD + AD = 13$
 $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$
 $\frac{10}{10} = \frac{3}{10}$
 $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AC}$
 $\frac{10}{10} = \frac{3}{10}$

$\frac{10}{10} = \frac{3}{10}$
 $\frac{11}{10} = xg$
 $x + \frac{e}{11} = (x - \frac{2}{11})g$
 $x - \frac{e}{11} = y$
 $[\frac{11}{10} : \frac{e}{11}] \Rightarrow \gamma$
 $x - \frac{e}{11} \sin \alpha = x \sin \gamma = p \sin \alpha$
 $\Delta MEF \sim \Delta [\frac{11}{10} : \frac{e}{11}] \Rightarrow \gamma = (x \sin \gamma) \sin \alpha \sin \beta$

$\frac{CM \cdot AD}{CE \cdot EF} = \frac{DC}{EF}$
 $\frac{AD}{CE} = \frac{DC}{EF}$
 $\frac{5x}{130x} = \frac{25}{130}$



$ACE \sim \Delta ABF$
 $\frac{BF}{FC} = \frac{CM}{MD} = \frac{3}{10} = 1$
 $\frac{BF}{FC} = \frac{10}{5} = \frac{CM}{MD} = \frac{3}{10}$

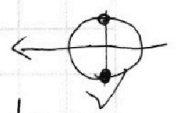
$\frac{BF}{FC} = \frac{CM}{MD} = \frac{3}{10} = 1$

$x \sin \alpha = d \sin \beta$
 $\frac{CE}{ED} \sin \alpha = \frac{MD}{MC} \sin \beta$
 $\frac{e}{11} \sin \alpha = \frac{3}{10} \sin \beta$
 $x + \frac{e}{11} = (x \sin \gamma) \sin \alpha \sin \beta$

$\Delta CEF \sim \Delta ADC$

$\frac{9}{11} + \frac{e}{11} = \frac{9}{11}g$
 $= x \sin \gamma = 4800$

$\frac{e}{11} \sin \alpha = \frac{3}{10} \sin \beta$
 $x + \frac{e}{11} = (x \sin \gamma) \sin \alpha \sin \beta$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x}(7) = \log_{36x^2} 343 - 4$$

xy

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

$6x > 0$ $36x^2 \neq 1$
 $6x \neq 1$
 $y > 0$
 $y \neq 1$
 $y \neq -1$

$$\left(\log_7 6x \right)^4 - 2 \frac{1}{\log_7 6x} = \log_{\frac{6}{49}} \frac{7^3}{343} = 1$$

$$\left(\frac{1}{\log_{6x} 7} \right)^4 - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\left(\frac{1}{\log_y 7} \right)^4 + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4$$

$t^4 = \frac{7}{2} \frac{1}{t} - 4$

$$\left(\frac{1}{\log_{6x} 7} \right)^4 = \frac{7}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$\frac{1}{\log_{6x} 7} \quad s^4 = -\frac{7}{2s} - 4$

$$\left(\frac{1}{\log_y 7} \right)^4 = -\frac{7}{2} \log_y 7 - 4$$

$t^4 + 4 \geq 2t^2$
 $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$$f(x) = \left(\frac{1}{\log_x 7} \right)^4 + \frac{7}{2} \log_x 7 + 4$$

$0 = t - \frac{7}{2} + s \cdot \frac{7}{2}$
 $0 = \frac{7}{2} - 7h + s \cdot 7$

$$\frac{t^4}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} + 4 = 0$$

$$0 = h + \frac{7}{2} + s$$

$$0 = h + \frac{7}{2} - s$$

$$h - \frac{7}{2} = t \cdot \frac{7}{2} + (h + 7s)$$

$$h - t \cdot \frac{7}{2} = t \cdot \frac{7}{2} - (h + 7s)$$