



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1 | $ab \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, $bc \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, $ac \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$$\left\{ \begin{array}{l} ab \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \right\} \cdot$$

min(abc), которая отвечает группе простых мн-ли отличных от 2, 3, 5.

$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$, т.к. abc - натур., тогда

$$abc \geq \sqrt{2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}}$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot \sqrt{3^1} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{5^1}$$

$$abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

Пусть $a = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\delta$, $ab \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$
 $bc \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, $b \geq 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\delta}$
 $ac \geq 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$, $c \geq 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\delta}$

$$bc \geq 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\delta} \cdot 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\delta}$$

$$bc \geq 2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\delta}$$

abc - макс мин, bc - данность, тогда

т.е. $bc = 2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\delta}$ $\geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, т.е.

откуда $2^{28-2\alpha} \cdot 3^{28-2\beta} \cdot 5^{40-2\delta} \geq 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

т.к. α, β, δ - целые, то $\alpha = 7, \beta = 7, \delta = 13$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\begin{cases} a = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\delta \\ b = 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\delta} \\ c = 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\delta} \end{cases}$$

abc не может быть меньше (доказано мной выше) также abc существует, т.к. есть пример

ОТВЕТ $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

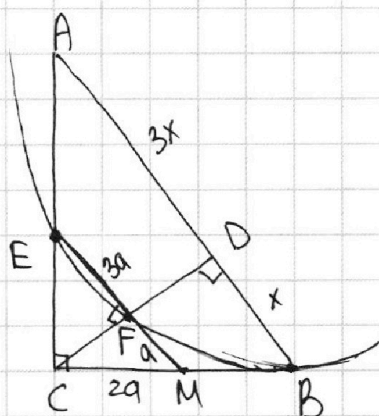
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 2

$AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = ?$



Решение 1

т.к. $AB \perp CD$, $AB \parallel EF$, то $EF \perp CD$. Пусть $AD = 3x$, $DB = x$,
тогда т.к. $\triangle ABC$ - прямоугольн.,
а CD - высота к гипотенузе,
то $CD^2 = AD \cdot DB = 3x \cdot x$, $CD = \sqrt{3}x$.

Прогоним EF по пересечению с BC . $EF \cap CB = T.M$
Тогда по T Фалеса: $\frac{EF}{AD} = \frac{FM}{DB}$, $\frac{FM}{EF} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{3}$,

если $FM = a$, то $EF = 3a$, аналогично т.к.
 $\triangle ECM$ - прямоугольн. а CF - высота, проведенная к гипот.,
то $CF^2 = EF \cdot FM = 3a \cdot a$, $CF = \sqrt{3}a$.

По T Пифагора для $\triangle CFM$: $CM = \sqrt{CF^2 + FM^2}$,
 $CM = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

EM - секущая к окр-сти, MB - касат., зч.
 $MB^2 = MF \cdot ME = a \cdot 4a$, $MB = 2a$.

Таким образом, ~~MB = CM~~ $MB = CM$, а зч
 EM - ср. линия, т.к. $CF = EA$ и

$$\frac{EM}{AB} = \frac{1}{2}; \quad \frac{4a}{4x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{a} = 2$$

$$S_{\triangle ABC} = CD \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = 4x \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}x^2$$

$$S_{\triangle CFE} = CF \cdot FE \cdot \frac{1}{2} = 3a \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3}$$

ОТВЕТ: ~~16:3~~ 16 : 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 3 (прообразметие)

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \leq 2\pi \quad | \cdot 3 \quad -3\pi \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi h \leq 2\pi \quad | \cdot 2$$

$$-9\pi \leq \pi + 5\pi k \leq 6\pi \quad | -\pi \quad -6\pi \leq -\pi + 5\pi h \leq 4\pi \quad | +\pi$$

$$-10\pi \leq 5\pi k \leq 5\pi \quad | : 5\pi \quad -5\pi \leq 5\pi h \leq 5\pi \quad | : 5\pi$$

$$-2 \leq k \leq 1 \quad -1 \leq h \leq 1$$

$$k = -2, k = -1, k = 0, k = 1$$

$$h = -1, h = 0, h = 1$$

Тогда имеем 7 корней: (некоторые совпадают)

$$k = -2: \quad x = \frac{\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi = -3\pi$$

$$k = -1: \quad x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi$$

$$k = 0: \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1: \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi$$

$$h = -1: \quad x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -3\pi$$

$$h = 0: \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$h = 1: \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 2\pi$$

совпадают

совпадают

ОТВЕТ: $-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2} \quad | \cdot 5$$

$$-\frac{5}{2}\pi \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5}{2}\pi$$

$$-\frac{5}{2}\pi \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{2}\pi \quad | -\frac{\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\left[\frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{2} - x = \pi - \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[\frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \frac{\pi}{2} - x + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[5\pi - 10x = 2x + \pi + 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. 5\pi - 10x + 2x + \pi = 10\pi + 20\pi n, n \in \mathbb{Z}, \right.$$

$$\left[12x = 4\pi - 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \right. \quad | : 12$$

$$\left. 8x = -4\pi - 20\pi n, n \in \mathbb{Z}, \right. \quad | : 8$$

$$\left[x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

or

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} b = 6a & (1) \\ b = \frac{6}{5}a & (2) \end{cases}$$

(1)

$$36a^2 - a^2 = 4$$

$$35a^2 = 4$$

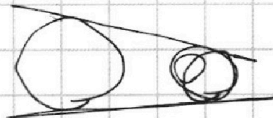
$$a = \pm \frac{2}{\sqrt{35}}$$

$$(2) \quad \frac{36}{25}a^2 - a^2 = 4$$

$$\frac{11}{25}a^2 = 4, \quad a^2 = \frac{4 \cdot 25}{11}$$

$$a = \pm \frac{10}{\sqrt{11}}$$

и есть нули
две группы общие как:



Таким образом, из выше сказанных
рассуждений, нам подходит a :

~~$\frac{2}{\sqrt{35}}$~~ $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

ОТВЕТ: $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение

~~Исследовать возможность существования~~

Исследуем общие касательные этих окружностей (находимая между их центрами, показана на рисунке).

Если крутить (1) касательную против часовой стрелки, то прямая пересекет ~~каждую~~ каждую окружность $\sqrt{2}$ раза, а зн. имеем 4 реш., т.е. также а подходит (крутим до совпадения с Ox). Если крутить (2) по часовой стрелке до пересечения с Ox , то также имеем 4 решения, а зн. также а подходит.

Если не крутить в противоположные стороны до ~~момента~~ момента, когда прямые станут $|| Oy$, не имеем пересечений с окружностями вообще, далее то, даже если двинуть также прямые вправо или влево, то имеем не более 2 реш., т.к. пересек. будет лишь с одной из окружностей, т.е. при любом b также прямые не подходят.

Найдем a и b при которых ~~нет~~ будет общей кас. отрезком $|| Oy$:

$$x^2 + \left(-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b\right)^2 - 9 = 0$$

Δ относ. x должен быть равен 0, тогда будет 1 реш., а т.е. касание

и одновременно с этим

$$(x-6)^2 + \left(-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b\right)^2 - 4 = 0$$

Аналогично Δ отнас. x должен быть равен 0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{3}{2}b \cdot \frac{a}{2}x \cdot z' + \frac{9}{4}b^2 - 9 = 0$$

$$x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - \frac{3ba}{2}x + \frac{9}{4}b^2 - 9 = 0$$

$$D = \frac{9b^2a^2}{4} - 4 \cdot (\frac{9}{4}b^2 - 9)(1 + \frac{a^2}{4}) = 0$$

$$\frac{9b^2a^2}{4} - 4 \left(\frac{9 \cdot b^2 \cdot a^2}{4 \cdot 4} + \frac{9}{4}b^2 - 9 - \frac{9a^2}{4} \right) = 0$$

$$-9b^2 + 36 + 9a^2 = 0, \quad a^2 - b^2 = -4, \quad b^2 - a^2 = 4$$

$$x^2 - 12x + 32 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{3}{2}b \cdot \frac{a}{2}x \cdot z' + \frac{9}{4}b^2 = 0$$

$$x^2(1 + \frac{a^2}{4}) - x \cdot (12 + \frac{3ba}{2}) + \frac{9}{4}b^2 + 32 = 0$$

$$D = (12 + \frac{3ba}{2})^2 - 4 \cdot (1 + \frac{a^2}{4}) \cdot (\frac{9}{4}b^2 + 32) =$$

$$= \frac{9b^2a^2}{4} + 12 \cdot \frac{3ba}{2} \cdot 2 + 144 - 4 \cdot (\frac{9}{4}b^2 + \frac{9 \cdot a^2 \cdot b^2}{4 \cdot 4} +$$

$$+ 32 + 8a^2) = \frac{9b^2a^2}{4} + 36ab + 144 - 9b^2 - \frac{9 \cdot a^2 \cdot b^2}{4}$$

$$- 128 - 32a^2 = -9b^2 + 36ab - 32a^2 + 16 = 0$$

$$\begin{cases} 9a^2 - 9b^2 + 36 = 0 \\ -32a^2 - 9b^2 + 36ab + 16 = 0 \end{cases} \cdot 9, \quad \begin{cases} 36a^2 - 36b^2 + 144 = 0 \\ -288a^2 - 81b^2 + 144 \cdot 9 - 324a = 0 \end{cases}$$

$$36a^2 + 288a^2 - 324ab - 36b^2 + 81b^2 = 0$$

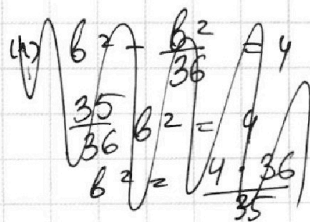
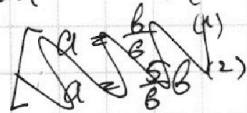
$$324a^2 - 324ab + 45b^2 = 0 \quad | :9$$

$$36a^2 - 36ab + 5b^2 = 0$$

$$36(a - \frac{5}{6}b)(a - \frac{1}{6}b) = 0$$

$$36(a - \frac{5}{6}b)(a - \frac{1}{6}b) = 0$$

$$(6a - 5b)(6a - b) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 4 a -? найдется b , что \forall система ур-я имеет 4 реш.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

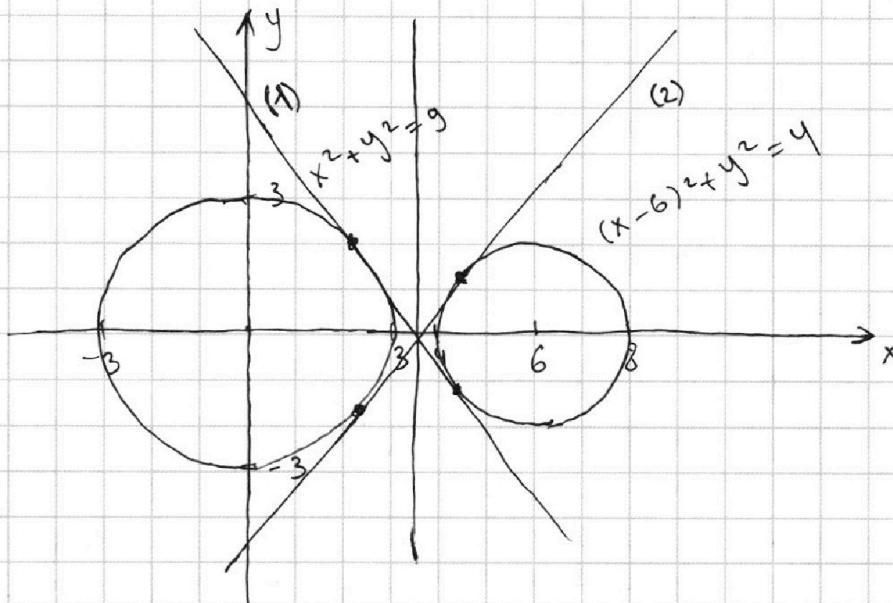
$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \quad (c) \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (a) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \quad (b) \end{cases}$$

$$(1) \quad x^2 - 12x + 36 + y^2 = 36 - 32 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4$$

(a) окружность с центром $(0;0)$ и радиусом **3**

(b) окружность с центром $(6;0)$ и радиусом **2**

Изобразим систему на к. п.:



(c) это прямая, придем ее наклон, а "b" отвечает за сдвиг прямой вправо и влево. "a" регулирует за сдвиг прямой

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

ОГРАНИЧЕНИЯ:

$$\begin{aligned}x &> 0 \\y &> 0 \\x &\neq 1 \\y &\neq \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

Пусть $\log_3 x = a$, тогда имеем:

$$a^4 + 6 \cdot \frac{1}{a} = 2,5 \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$a^4 + 3,5 \cdot \frac{1}{a} + 8 = 0 \quad | \cdot a \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$a^5 + 8a + 3,5 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \log_{5y} 3 - 8$$

Пусть $\log_3 5y = b$, тогда

$$b^4 + 2 \cdot \frac{1}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8$$

$$b^4 - 3,5 \cdot \frac{1}{b} + 8 = 0 \quad | \cdot b \neq 0, \text{ т.к. } y \neq \frac{1}{5}$$

$$b^5 + 8b - 3,5 = 0$$

$$\begin{cases} a^5 + 8a + 3,5 = 0 \\ b^5 + 8b - 3,5 = 0 \end{cases}$$

$$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 8(a+b) = 0$$

Откуда ~~имеем~~ ^{следует} ~~имеем~~ ^{следует} $a+b=0$ где a и b вернемся
к замене

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 5yx = \log_3 1$$

$$5yx = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 продолжение

сл.	O_x	O_y
1.	11	0
2.	10	3
3.	9	6
4.	8	9
5.	7	12
6.	6	15
7.	5	18
8.	4	21
9.	3	24
10.	2	27
11.	1	30
12.	0	33

исполняем для
каждого угла
вариантов:

или:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 / стороны параллелограмма
закрытые промежутки:

$$y=0, \quad y=42, \quad y=-\frac{x}{6}, \quad y=-\frac{x}{6}$$

$$y=-3x, \quad y=-3x+60,$$

знает \checkmark ^{пар} количество \checkmark целых координат в нем

$$(1+4+7+\dots+42) \cdot 2 + 42 + 42 =$$
$$= \frac{(1+42) \cdot 7}{2} \cdot 2 + 42 \cdot 2 =$$

$$= 7 \cdot 43 + 42 \cdot 2 = 42 \cdot 7 + 42 \cdot 2 + 7 =$$
$$= 42 \cdot 9 + 7 = 385$$

~~Знает~~ первую пару выбираем 385
~~способами~~, а ~~оставшиеся~~

Условие $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$
 $3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$

Можно интерпретировать, что координаты ~~пар~~ образуют отрезок, который как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами параллельными осям. Откуда угловый катет 11-ный $0x$ в сумме с катетом 11-ным $0y$ дают

33. Тогда катет 11-ный $0y$ должен ≈ 3 (также его длина)

либо ~~так~~ такой отрезок лежит на одной из осей

Тогда имеем варианты сторон

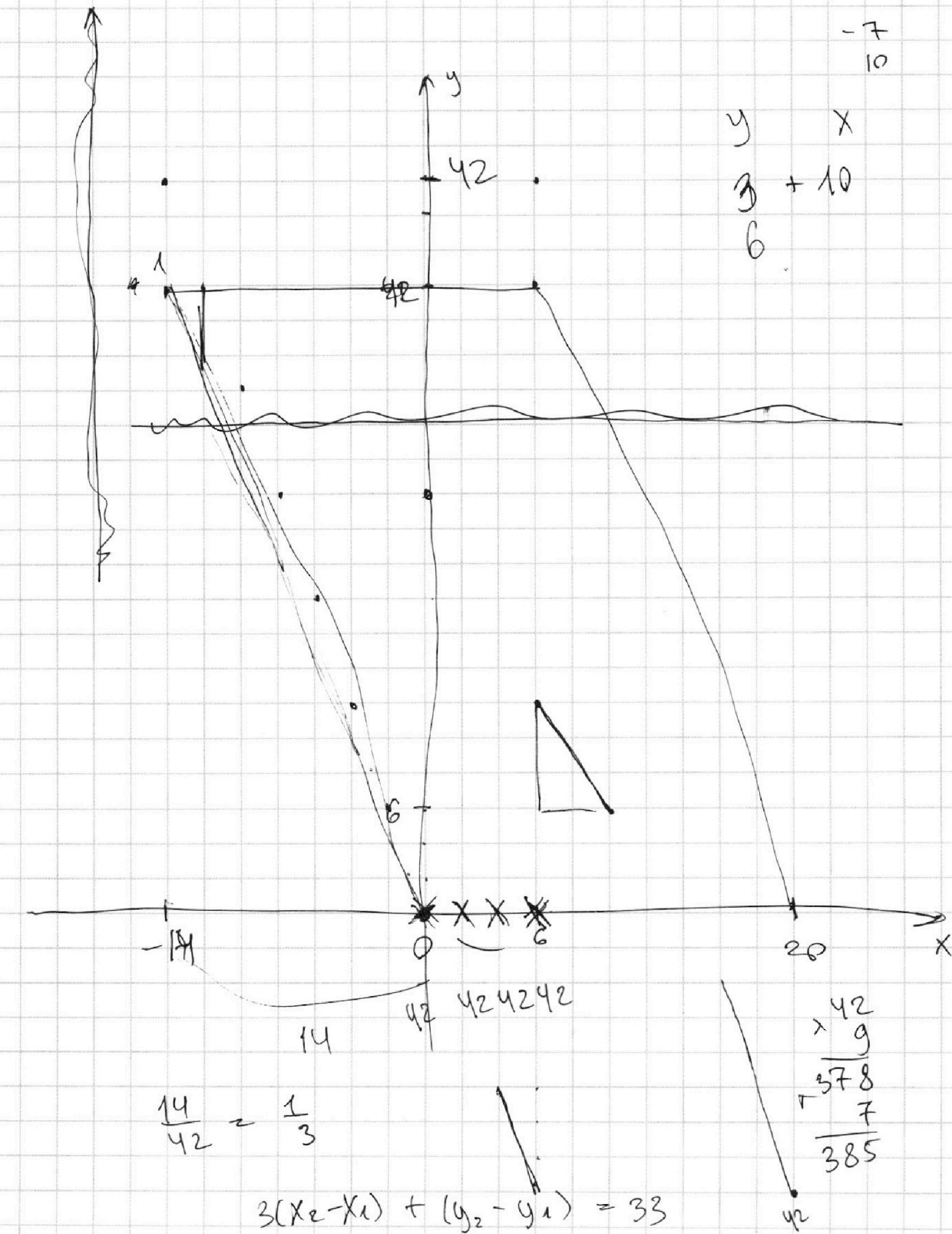
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$$

$$abc : \underbrace{5^{30} \cdot 3^{18} \cdot 2^{19}}_{ac} \cdot b$$

$a^1 - ? - b^2$

$$a^2 b^2 c^2 :$$

$$\frac{19 + 9 + 14}{28} = \boxed{42}$$

$$\frac{19 + 9 - 7}{21}$$

21

$$36a^2 - 6ab - 2ab + 5b^2$$

~~$$a^5 + b^5$$~~

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \\ - (a^5 + ba^4) \\ \hline b^5 - ba^4 \\ - +ab^5 \\ \hline b^5 + b^4a \\ - ba^4 - b^4a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline a^4 - \cancel{a^3b} \\ + b^4 \end{array}$$

$$(a+b)^5 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 5xy = 0$$

$\log_3 5xy \in \log_3 1$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$\begin{array}{l} (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\ a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 + ba^4 - a^3b^2 + a^2b^3 \\ - ab^4 + b^5 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5}{2}\pi \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$$

Через синус

$$\frac{36 \pm 2b}{b} = \frac{6b \pm 4b}{12} = \frac{9b \pm 4b}{12}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

Пусть $\arcsin(\cos x) = \alpha$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

тогда $5\alpha = x + \frac{\pi}{2}$

$$\alpha = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$b = 36b^2 - 36 \cdot 4 \cdot 5b^2 = 16$
 $36b^2(36 - 20) = 16$

$$\sin(\alpha) = \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$(16b^2) = \frac{9b \pm b}{18}$
 $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
 $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$
 $2^2 \cdot 5^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 0$
 $9 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = 9 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5$
 $\frac{324}{24} = \frac{36}{3}$

4)

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - (2x + 32)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + (x-6)^2 = 4 \end{cases} \text{ где } \begin{cases} \text{окр-сти} \\ \text{радиусами} \end{cases}$$

или $y^2 + x^2 - 12x + 36 = 4$
 $y^2 + (x-6)^2 = 4$

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$2y = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$

где b наименьшее значение y

отвращает вверх

за единицу вниз

крутит

НАЙДЕТСЯ

ЗНАЧЕНИЕ b

$\frac{52}{9} = 5 \frac{7}{9}$
 $\frac{288}{36} = 8$
 $\frac{288}{36} = 8$

$$8 \cdot 4 = 32$$

$$\frac{156}{9} = \frac{52}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1

$$\begin{aligned} ab &:: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc &:: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac &:: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{aligned}$$

$mm(abc) - ?$

крестик a, c - крестик
крестик a, c - крестик
максимум
привести крестик
или нет?

$$\begin{aligned} a &= 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \\ b &= 2^{9-\alpha} \cdot 3^{10-\beta} \cdot 5^{10-\gamma} \\ c &= 2^{19-\alpha} \cdot 3^{18-\beta} \cdot 5^{30-\gamma} \end{aligned}$$

$$\beta = 7$$

$$28 - 2\alpha = 14 \Rightarrow \alpha = 7$$

$$\gamma = 5$$

$$(9 - \alpha + 19 - \alpha) = 14$$

$$(10 - \beta + 18 - \beta) = 13$$

$$(10 - \gamma + 30 - \gamma) = 19$$

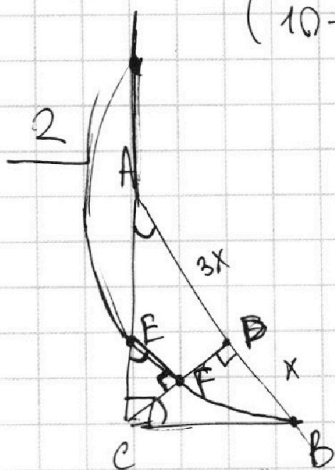
$$2\gamma = 27, \gamma = 13$$

крестик
Тройка



$$\begin{array}{r} 28 \\ -13 \\ \hline 15 \end{array}$$

2



$AB \parallel EF, AD:DB = 3:1$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = ?$$

$$S_{\triangle ABC} = AC \cdot CB \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{\triangle CEF} = CF \cdot EF \cdot \frac{1}{2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{EC}{AB} = \frac{CF}{CB}$$

$AC \cdot CB = CD \cdot AB$
 $AC \cdot CB = \sqrt{3}x \cdot 4x = 4\sqrt{3}x^2$

$$AC \cdot CB = \sqrt{3}x \cdot 4x = 4\sqrt{3}x^2$$

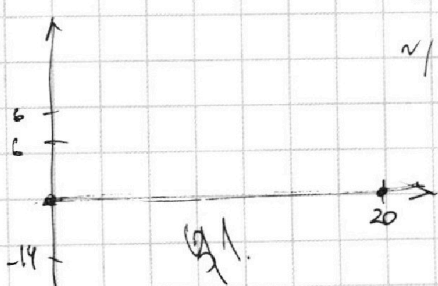
$$\approx \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3}$$

$arc \sin(\sin)$
 $3x$
 $arc \sin(\cos x)$
 α
 $\sin \alpha = \cos x$
 $\sin(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10})$

$$\frac{29}{12} = \frac{5}{3}$$

P/B - т. кас
стенеть точки?

1, 2, 3



21.

11

5/2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

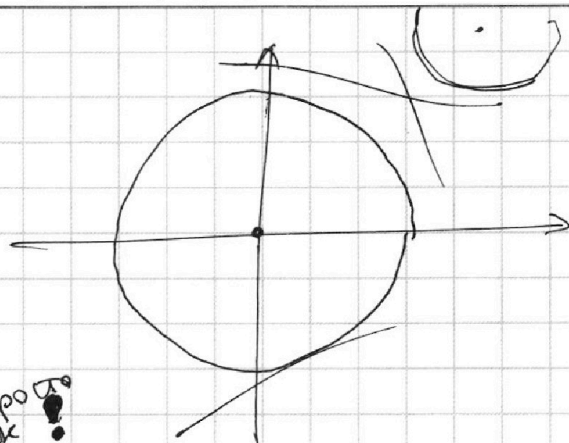
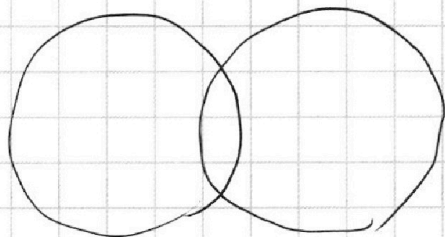
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чертежи



5

$xy - ?$ — не просто так!

ОГРАНИЧ.:
 $x > 0$
 $x \neq 1$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \underbrace{\log_x 3}_{\frac{1}{\log_3 x}} - 8$$

$$243 = 3 \cdot \frac{81}{3^4} = 3^5$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t} - 8$$

$$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy$$

$$t^4 + \frac{7}{2} \frac{1}{t} + 8 = 0$$

$$t^5 + 8t + 3,5 = 0$$

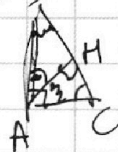
$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y} 2 (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \cdot \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \underbrace{\log_{5y} 3}_{\frac{1}{\log_3 5y}} - 8$$

$$m^4 + \frac{2}{m} = \frac{11}{2} \frac{1}{m} - 8$$

$$m^4 - 3,5 \frac{1}{m} + 8 = 0 \quad | \cdot m$$

$$m^5 + 8m - 3,5 = 0$$



$$\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH}$$

$$AH^2 = BH \cdot HC$$

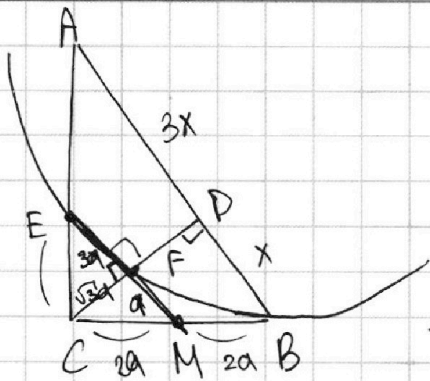
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel EF$

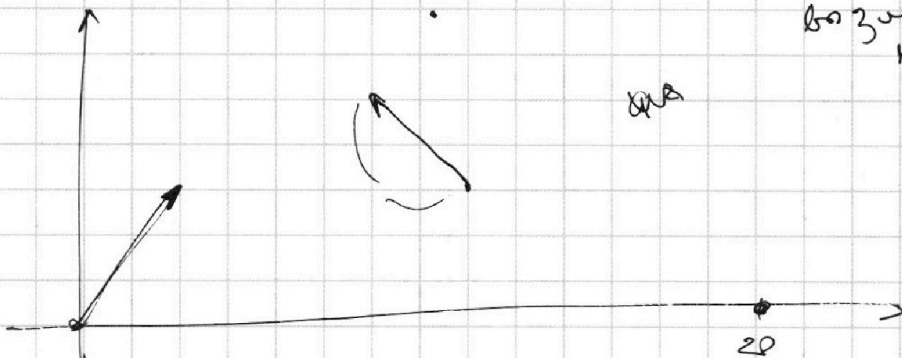
~~$MB^2 = MF \cdot ME$~~
 $MB^2 = MF \cdot ME$
 $MB^2 = a \cdot 4a$
 $MB = 2a$

$3a^2 + a^2 = 4a^2$

средний

2a!
 меньший!

возложим на границу



кол-во пар $\tau.A(x_1, y_1)$ и $\tau.B(x_2, y_2)$

x_1, x_2, y_1, y_2 — целые

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

так в сумме 33
 имеет вектор
 сумма координат вектора $\rightarrow 33$

1 и 32
 2 и
 выбираем точку \rightarrow к ней
 пары.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

