МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. (1) $ab \vdots 2^8\cdot 3^{14}\cdot 5^{12}$, (2) $bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$, (3) $ac \vdots 2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{39}$

наим abc

Пусть $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ – степени вхождения 2, 3 и 5 в каноническое разложение a;

Аналогично определим $\beta_2, \beta_3, \beta_5$ для b и $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ для c

Из (1): $\alpha_2+\beta_2 \geq 8$ $\qquad$ $\alpha_3+\beta_3 \geq 14$

(2): $\beta_2+\gamma_2 \geq 12$ $\qquad$ $\beta_3+\gamma_3 \geq 20$

(3): $\alpha_2+\gamma_2 \geq 14$ $\qquad$ $\gamma_3+\alpha_3 \geq 21$

$\alpha_2+\gamma_2+\beta_2 \geq \frac{34}{2}=17$ $\qquad$ $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq \frac{55}{2}$ (≥ 28, т.к. Σ – нат.)

напр.: $\beta_2=3$, $\alpha_2=5$, $\gamma_2=9$ $\qquad$ напр.: $\alpha_3=8$, $\beta_3=6$, $\gamma_3=14$

Из (1): $\alpha_5+\beta_5 \geq 12$

(2): $\beta_5+\gamma_5 \geq 17$ $\Rightarrow \alpha_5+\beta_5+\gamma_5 \geq 33$

(3): $\gamma_5+\alpha_5 \geq 39$

возьмем $\alpha_5=19$, $\gamma_5=20$, $\beta_5=0$ тогда $\alpha_5+\beta_5 \geq 19$ и $\beta_5+\gamma_5 \geq 20$ – Ok

$abc \geq 2^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot 3^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}\cdot 5^{\alpha_5+\beta_5+\gamma_5} \geq 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

Пример: $a = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^{\alpha_5} = 2^5\cdot 3^8\cdot 5^{19}$

$b = 2^{\beta_2}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\beta_5} = 2^3\cdot 3^6\cdot 5^0$

$c = 2^{\gamma_2}\cdot 3^{\gamma_3}\cdot 5^{\gamma_5} = 2^9\cdot 3^{14}\cdot 5^{20}$

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

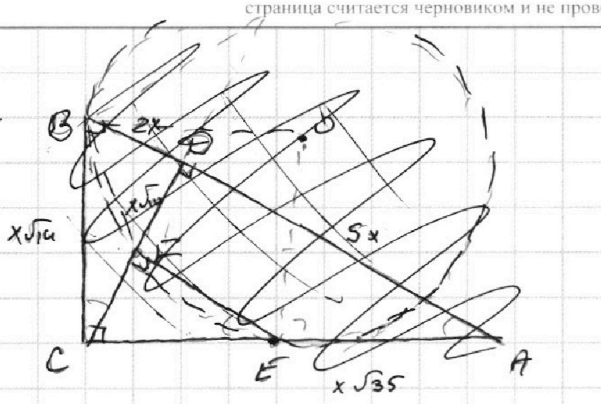
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2.



Пусть $AD = 5x$, тогда $BD = 2x$
CD по формуле высоты из прямого угла — $x\sqrt{10}$
т.к. $FE \parallel AD$ $\angle CFE = 90^\circ$
По th. Пифагора $BC = x\sqrt{14}$
$AC = x\sqrt{35}$

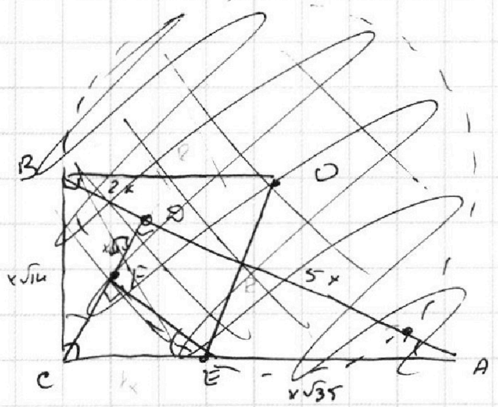
F лежит на окр-ти и $\angle EFD = 90^\circ \to \angle EFD$ опир. на диаметр

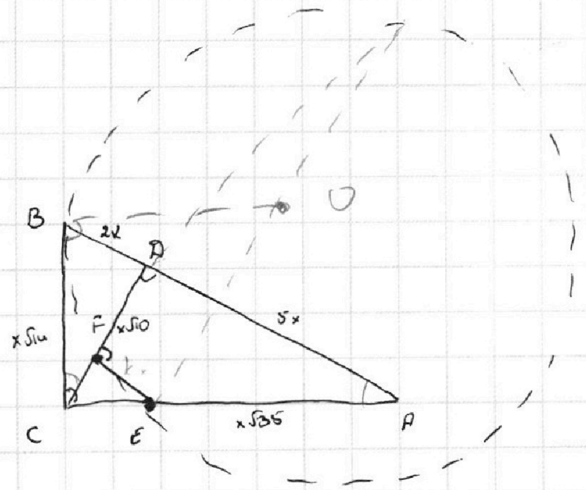
$S_{ABC} = \frac{7}{5} \cdot S_{ACD}$ по лемме об отн. площадей

$\frac{S_{CEF}}{S_{ACD}} = \left(\frac{FE}{5x}\right)^2 \to S_{ACD} = S_{CEF} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$

$S_{ABC} = \frac{7}{5} \cdot S_{CEF} \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3. $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

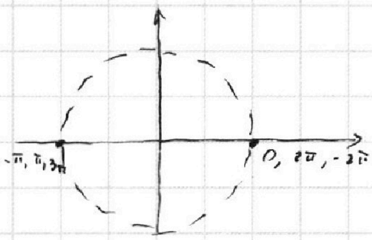
$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$

$4\pi + 2x = 10\arccos(\cos x)$

$\underset{0 \le \quad\quad \le 5\pi}{2\pi + x} = 5\underbrace{\arccos(\cos x)}_{0 \le \quad\quad \le \pi}$

$x \in [-2\pi; 3\pi]$



$x \in [0; \pi]$: $\arccos(\cos x) = x$

$2\pi + x = 5x$; $2\pi = 4x$; $x = \frac{\pi}{2}$ - ok

$x \in [\pi; 2\pi]$: $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$

$2\pi + x = 10\pi - 5x$

$8\pi = 6x$; $x = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ - ok

$x \in [2\pi; 3\pi]$: $\arccos(\cos(x)) = x - 2\pi$

$2\pi + x = 5x - 10\pi$;

$12\pi = 4x$; $x = 3\pi$ - ok

$x \in [-\pi; 0]$: $\arccos(\cos x) = -x$: $2\pi + x = -5x$; $2\pi = -6x$; $x = -\frac{\pi}{3}$ - ok

$x \in [-2\pi; -\pi]$: $\arccos(\cos x) = x + 2\pi$ $2\pi + x = 5(2\pi + x)$; $x = -2\pi$ - ok

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi; -\frac{\pi}{3}; -2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

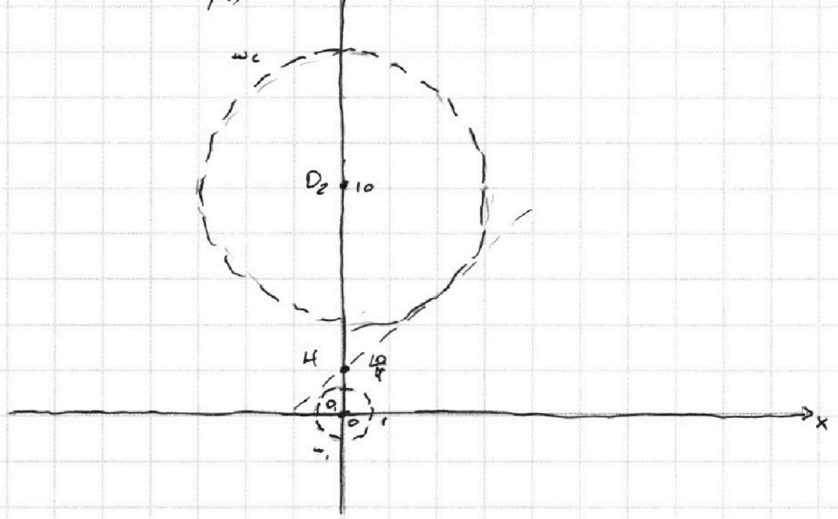
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (\underbrace{x^2+y^2-1}_{\omega_1})(\underbrace{x^2+y^2-20y+64}_{\omega_2}) = 0 & (2) \end{cases}$$

В системе координат xOy (1) задает прямую, (2) – две окружности (ω_1 и ω_2) ω_1 : $x^2+y^2=1$ – центр $(0;0)$ $R=1$
ω_2 : $x^2+(y-10)^2=36$ – центр $(0;10)$ $R=6$

система будет иметь 4 реш., если окружности ω_1 и ω_2 будут пересекаться с прямой ровно в 4 точках (у прямой ≤ 2 о.т. с окр.)



(1): $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$. Решим задачу для положительных a, подойдут также найденные a, но отрицательные (в силу симметрии картинки относ. Oy

Фактически, $\frac{4b}{3}$ отвечает за паралл. перенос прямой (1) вдоль Oy. Заметим, что при достаточно больших a у прямой точно будут 4 точки (общие) с окружностями. Найдем максимальное такое a, при котором будет не больше 3 о.т. с окружностями $\forall b$. Проведем H – центр гомотетии окр-тей и через него общую касательную к ним l_0. При $\frac{a}{3} > \operatorname{tg} l_0$ мы всегда сможем $\parallel$ перенести окружность в центр гомотетии и будет 4 точки (при $\leq \frac{a}{3}$ будет не более 2-х общих точек $\forall b$ – видно графически) $O_1H : O_2H = 1:6$; $O_1H = x$, $O_2H = 6x$ →
$O_1H + O_2H = 10$; $7x = 10$; $x = \frac{10}{7}$
→ y коорд т. H – $\frac{10}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 [X] 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

y коорд т. H – $\frac{10}{7}$ прямая, проход. через неё $y = kx + \frac{10}{7}$ – имеет 1 общую точку с ω_1 (с ω_2 соотв.)

$x^2 + y^2 = 1$
$y = kx + \frac{10}{7}$

$$x^2 + k^2x^2 + \frac{20k}{7}x + \frac{100}{49} = 1$$
$$x^2(1+k^2) + \frac{20k}{7}x + \frac{51}{49} = 0$$
$$D = \frac{400k^2}{49} - 4\left(\frac{51}{49}\right)\cdot(1+k^2) = 0$$
$$\frac{400k^2}{49} - \frac{204}{49}k^2 - \frac{204}{49} = 0,$$
$$196k^2 = 204; \quad k^2 = \frac{51}{49} \quad k = \pm\frac{\sqrt{51}}{7}$$

Так, при $\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\exists 4$ b, для кот. (1) имеет 4 общих точки
при $\frac{a}{3} \le \frac{\sqrt{51}}{7}$ (1) имеет ≤ 2 общих точек $\forall b$.
(строже это обосновать можно так: 11 переносом прямую (1) в центр гомотетии. При передвижении её вниз общие точки могут быть только с ω_1, выше – только с ω_2)

Дополн. a: $\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$; $a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$ (вкл. также симм. на отр. значения)

Итак, ответ: $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5. $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \overbrace{\log_{8x^3}625}^{\frac{4}{3}\log_{2x}5} - 3;$ ОДЗ: $x>0$; $x \ne \frac12$; $y>0$; $y \ne 1$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \underbrace{\log_{y^3}\frac15}_{-\frac13\log_y 5} - 3;$

$\underbrace{\log_5^4(2x)}_{\text{возр. на } D} = \frac{13}{3}\log_{2x}5 - 3 = \underbrace{\frac{13}{3\log_5(2x)} - 3}_{\text{убыв на } D}$

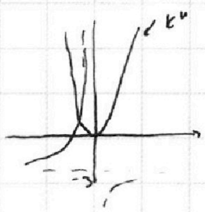
если решение и существует, то оно единственно.

Пусть $\log_5(2x) = t$; $3t^5 + 9t - 13 = 0$

графически видно, что k ∃!

$\log_5^4 y = -\frac{13}{3}\log_y 5 - 3 = -\frac{13}{3\log_5 y} - 3$, $k^4 = -\frac{13}{3k} - 3$

Пусть $\log_5 y = k$ $3k^5 + 9k + 13 = 0$



$+\begin{array}{l} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \\ 3k^5 + 9k + 13 = 0 \end{array}$

$t^5 + k^5 + 3(t+k) = 0$; $(t+k)(t^4 - t^3k + t^2k^2 - tk^3 + k^4 + 3) = 0$

$t + k = 0$ $t^4 - t^3k + t^2k^2 - tk^3 + k^4 + 3 = 0$

$\log_5 2xy = 0$

$xy = \frac12$

Относ. k и t, как доказано выше, могут иметь ровно 1 действительное решение, значит, в силу монотонного возрастания логарифма, существует только одно знач. xy.

Проверим, что $xy = \frac12$ — подх. $t = -k$; $\overbrace{3t^5 + 9t - 13}^{f(t)} = 0$

$-3t^5 - 9t + 13 = 0$

Если относ t ур-е решено, то относ. $k = -t$ тоже

$f(1) = -1$ $f(2) > 0$ → ноль функции лежит на $(1;2)$ — t_0

найдем x^* - корень

$\log_5 2x = x_0$ $x = \frac12$ - не корень, т.к. $x_0 > 1$

$\log_5 2x = -\log_5 y$ (подст. корень x^* сюда и найдем y^*)

подх. — $x^* \ne \frac12$, $y^* \ne 1$

Ответ: $\frac12$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

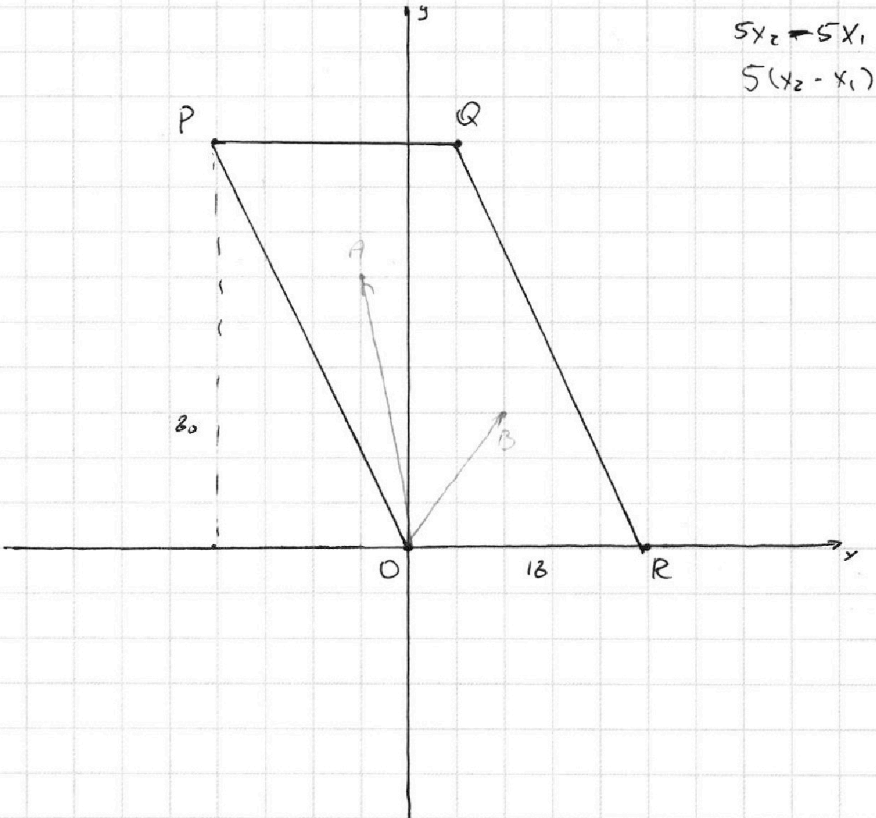
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6.

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$



$-80 \le \quad \le 60$

$y_2 - y_1 \; \vdots \; 5$

$x_2 - x_1 = \dfrac{45 - (y_2 - y_1)}{5}$

$-16 \le \quad \le 18$

$-90 \le 45 - (y_2 - y_1) \le 90$

$-135 \le y_1 - y_2 \le 45$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!