



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \Rightarrow ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot x \quad \text{где } x \in \mathbb{N}$$

Аналогично для bc и $ac \Rightarrow \min ab$ когда $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

Аналогично для bc и ac .

В любом случае, ~~если~~ если при $\min ab; bc; ac$ числа a, b, c нецелыми (что противоречит условию), то выбирая \min в x не может быть других простых множителей кроме $2; 3; 5$, иначе число abc не будет \min .

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \\ b = 2^l \cdot 3^m \cdot 5^k \\ c = 2^d \cdot 3^e \cdot 5^f \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+l=8 \\ l+d=12 \\ x+d=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=3; x=5; d=9 \\ l+x+d=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+m=14 \\ m+e=20 \\ y+e=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=6,5; y=7,5; e=13,5 \\ \text{значит, чтобы они } \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a; b; c \notin \mathbb{N}$$

$$ab \geq 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}; bc \geq 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{19}; ac \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+m \geq 14 \\ m+e \geq 20 \\ y+e \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min \text{ вариант:} \\ \text{т.к. } m \geq 6,5 \\ y \geq 7,5 \\ e \geq 13,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=7 \\ y=7 \\ e=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{В любом} \\ \text{случае} \\ m+y+e = \\ = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f+k=17 \\ k+z=12 \\ z+f=39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=5 \\ z=7 \\ f=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+z+f = \\ = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=6 \\ y=8 \\ e=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=7 \\ y=8 \\ e=13 \end{cases}$$

$$\text{То } abc = 2^{x+l+d} \cdot 3^{e+m+y} \cdot 5^{z+k+f} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{24}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{24}$$

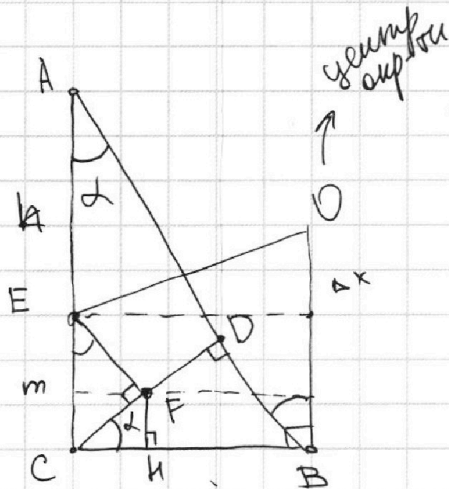
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD : DB = 5 : 2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{AB}{AD} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow S_{ADC} = \frac{5}{7} S_{ABC}$$

и.к. $EF \parallel AD$, то

$$\triangle CEF \sim \triangle CAD$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = k^2 \text{ где}$$

k - коэффициент подобия $\triangle CEF \sim \triangle CAD$

$$S_{CEF} = \frac{5}{7} S_{ABC} = k^2$$

Пусть $EC = m$, тогда $CB^2 + \Delta x^2 = (m + \Delta x)^2$

$$EA = kh$$

$$\frac{CF}{FD} = \frac{m}{kh}$$

$$((m - FH) + \Delta x)^2 + (CB - CH)^2 = (m + \Delta x)^2$$

при этом $\frac{m}{m+h} = k$

где $FH = k \cdot CD \cdot \sin \alpha$

$$\frac{m}{AC} = k \Rightarrow m = k \cdot AC$$

$$CB^2 + \Delta x^2 = (k \cdot AC + \Delta x)^2$$

$$(k \cdot AC - k \cdot CD \cdot \sin \alpha + \Delta x)^2 + (CB - k \cdot CD \cdot \cos \alpha)^2 = (k \cdot AC + \Delta x)^2$$

$$\begin{aligned} CB &= \sqrt{14}x & \sin \alpha &= \frac{\sqrt{14}}{7} \\ AC &= \sqrt{35}x & \cos \alpha &= \frac{\sqrt{35}}{7} \\ CD &= \sqrt{10}x \end{aligned}$$

при этом $AC; CD; \sin \alpha; \cos \alpha; CB$, - можем найти
из того, что $AD = 5x; DB = 2x$

\Rightarrow можем выразить Δx через x . $\Delta x, m, x$
сократится \Rightarrow найдем k .

$$\Delta x = \frac{14x - k^2 \cdot 35x}{2k \cdot \sqrt{35}} \quad \left(\frac{15k^2 + 14}{2k\sqrt{35}} \right)^2 + 14 + k^2 \cdot \frac{14 \cdot 25}{49} - 20k = \left(\frac{k^2 \cdot 70 + 14 - k^2 \cdot 35}{2k\sqrt{35}} \right)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

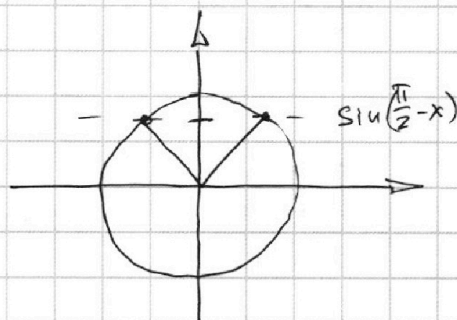
$$\arcsin \text{ определен на } \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi - 2x}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$5\pi \geq \pi - 2x \geq -5\pi$$

$$4\pi \geq -2x \geq -6\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$



$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi n \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k \quad (2)$$

$n, k \in \mathbb{Z}$

$$1) 5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi n$$

$$4\pi = 20\pi n = 8x$$

$$x = \frac{4\pi(1 - 5n)}{8}$$

$$2) 5\pi - \frac{10x}{2} = 10\pi - \pi + 2x + 20\pi k$$

$$-4\pi - 20\pi k = 12x$$

$$-\frac{4\pi(1 + 5k)}{12} = x$$

$$x = \frac{\pi}{2}(1 - 5n)$$

↳ монотонно убыв. функция

$$n = +2 \quad x = -4,5\pi$$

⇒ $n \geq 2$ x не подходит $\leftarrow -2\pi$

$$n = 1 \quad x = -2\pi$$

$$n = 0 \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$n = -1 \quad x = 3\pi$$

$$n < -1 \quad x > 3\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3}(1 + 5k)$$

$$k = 1 \quad x = -2\pi$$

$$k > 1 \quad x < -2\pi \quad \checkmark$$

$$k = 0 \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

$$k = -1 \quad x = \frac{4}{3}\pi$$

$$k = -2 \quad x = 3\pi$$

$$k < -2 \quad x > 3\pi \quad \checkmark$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; 3\pi; \frac{4\pi}{3}\right\}$$

\leftarrow не подходит

функция монотонно убывает

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

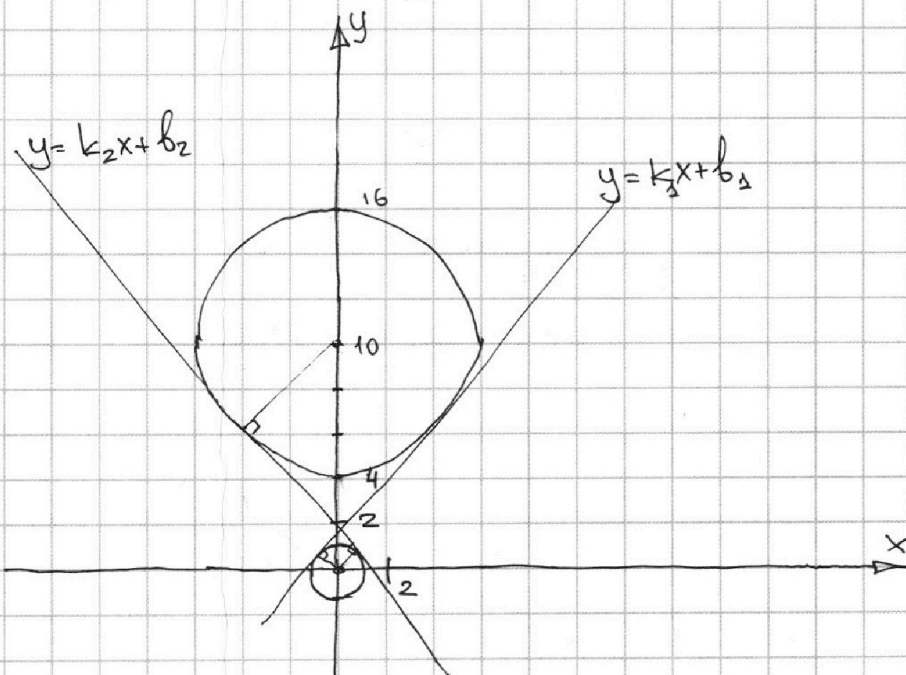
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

Для начала рассмотрим
второе уравнение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{— окружность с центром } (0; 0) \text{ и } R = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 & \text{— окружность с центром } (0; 10) \text{ и } R = 6 \end{cases}$$

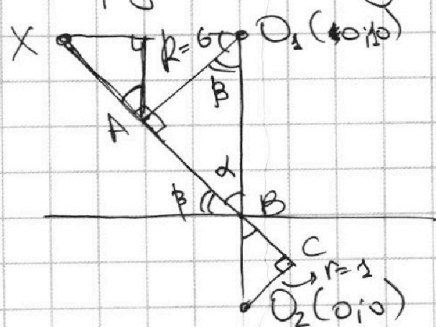


Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ — общие касательные
окружностей. При этом $k_1 > 0$; $k_2 < 0$.

\Rightarrow если $a \geq k_1$ или $a \geq k_2$ с учетом знака k_2
то подобрать b чтобы было 4 решения — невозможно

\Rightarrow достаточно найти k_1 и k_2

Предпочтительнее сделать это из геометрии соображений:



$$\Delta O_1AB \sim \Delta O_2CB$$

$$\Rightarrow \frac{O_1B}{O_2B} = \frac{R}{r} = 6$$

$$O_1B + O_2B = 10$$

$$O_2B = \frac{10}{7}$$

$$O_1B = \frac{60}{7}$$

$$k_2 = -\frac{1}{\tan \beta}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{R}{O_1B} = \frac{6 \cdot 7}{60} = \frac{7}{10} \Rightarrow \cos \beta; \sin \beta = \frac{\sqrt{51}}{10} \Rightarrow \tan \beta = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично выясняем, что $k_1 = \frac{\sqrt{51}}{7}$; $k_2 = -\frac{\sqrt{51}}{7}$
 $\Rightarrow a > k_1$ т.е. $a > \frac{\sqrt{51}}{7}$ или $a < k_2$ т.е. $a < -\frac{\sqrt{51}}{7}$
Ответ: ~~а~~ $a > \frac{\sqrt{51}}{7}$ или $a < -\frac{\sqrt{51}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$xy = n$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3} \log_{2x} 5 + 3 = 0$$

$$\log_5(2x) = m$$

$$l+m = \log_5(2xy) =$$

$$= \log_5(2n)$$

$$m^4 - \frac{13}{3m} + 3 = 0$$

$$3m^5 - 13 + 9m = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + \frac{13}{3} \log_y 5 + 3 = 0$$

$$\log_5 y = l$$

$$3l^5 + 13 + 9l = 0$$

$$3(l^5 + m^5) + 9(m+l) = 0 \text{ - сложим}$$

$$3(m+l)(m^4 + l^4 + \dots) + 9(m+l) = 0$$

$$(m+l)(3(m^4 + l^4 + \dots) + 9) = 0$$

$$m+l = 0$$

$$\log_5(2xy) = 0$$

$$2xy = 1$$

$$xy = 0,5$$

Ответ: 0,5.

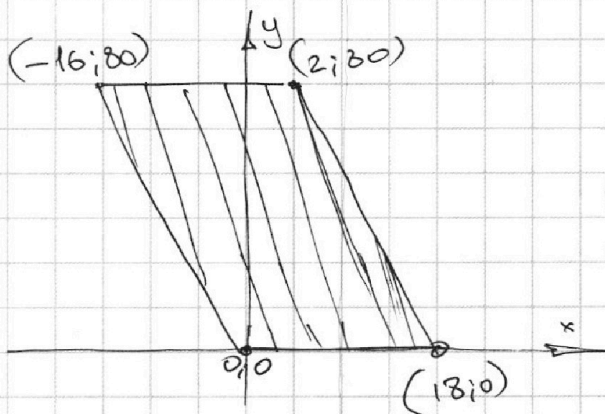
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$
~~Если~~ Если точка $(x; y) \in$
данному параллелю, то
 $0 \leq y \leq 80$
 $y \geq -5x$
 $y \leq -5x + 90$
Условие: $5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$

~~коэф.~~ коэф. наклона боковой (не \parallel осей) ~~стор.~~
сторона параллеля $= -5$.

Возьмем точку A $(x_1; y_1)$. Тогда пусть τ B координаты под данное условие $(5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45)$
тогда рассмотрим какие еще точки удовлетворяют
~~условию~~ условию под это условие.

Пусть рассмотрим τ C. У нее $y_3 = y_2 + \Delta y$
тогда $5(x_3 - x_1) + y_2 + \Delta y - y_1 = 45$
 $\Delta y + 5(x_3 - x_1) + 45 - 5x_2 + 5x_1 = 45$
 $5(x_3 - x_2) = -\Delta y$

$5\Delta x = -\Delta y \Rightarrow \Delta y = -5\Delta x$

\Rightarrow все точки удовлетворяющие под условие
лежат на одной прямой с коэф. наклона -5 , то
есть \parallel боковой стороне параллеля.

Возьмем τ A $(x_1; y_1)$ и м. B $(x_1 + 9; y_1)$

Она удовлетворяет под условие \otimes .

\Rightarrow Возьмем прямую с коэф. $k = -5$ и проходящую через
м. B. Все точки на ней ~~удовлетворяют~~ и только на ней
удовлетворяют под условие \otimes

Тогда получается, что точки $(x; y)$ лежащие
на прямой $y = -5x + 45$ удовлетворяют под \otimes , а все
точки "правее" (для которых $x > \frac{45 - y}{5}$) не
удовлетворяют. (т.к. для них $x_1 + 9$ меньше 5 за
границей параллеля)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

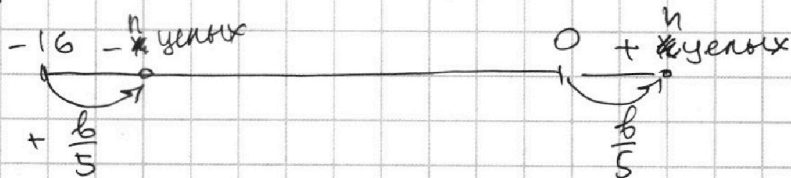
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Можно заметить, что $(x; y)$ -целые координаты только на прямой где $b \in \mathbb{Z}$ т.к. $y = -5x + b$
целое целое

можных прямых от $y = -5x$ до $y = -5x + 45$ всего 10.

Далее можно сказать, что на любой прямой вида $y = -5x + b$ где $y \in [0; 80]$ всего 17 точек т.к. $0 \leq y \leq 80$
 $0 \leq -5x + b \leq 80$
 $-\frac{b}{5} \leq x \leq -16 + \frac{b}{5}$
целых точек $b \div 5$

у прямой $b = 0$ 17 целых точек. Тогда



т.к. $\frac{b}{5}$ сдвигаем границу диапазона на равные части придем т.к. $b \div 5$, то кол-во целых не меняется.

Если $b \not\div 5$, то кол-во целых = 16. из логики аналогичных рассуждений.

тогда для каждого значения прямой $y = -5x + b$ (в диапазоне от $y = -5x$ до $y = -5x + 45$) перейдут все значения прямой $y = -5x + b + 45$.

Итого: $b \in [0; 45] \rightarrow 46$ прямых

Для $b \in \mathbb{Z} \cap \{0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45\}$ 17 значений и 17 точек на прямой с целыми b .

Для остальных 16 значений для прямой точек А и В.

\Rightarrow Всего: $10 \cdot 17^2 + 36 \cdot 16^2 = 12106$

Ответ: 12106.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

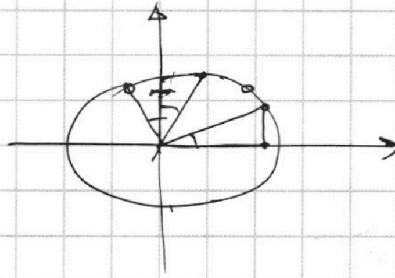
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x$$



$$\frac{\pi - 2x}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\pi - 2x \in [-\pi \cdot 5; \pi \cdot 5]$$

$$5\pi \geq \pi - 2x \geq -5\pi$$

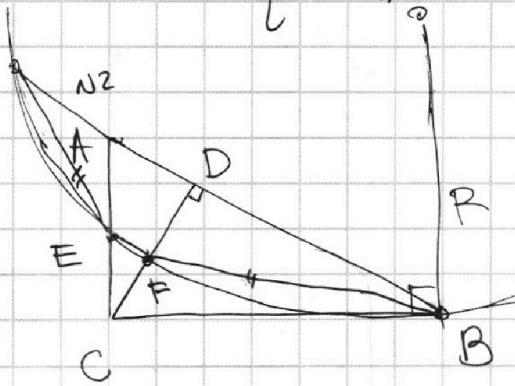
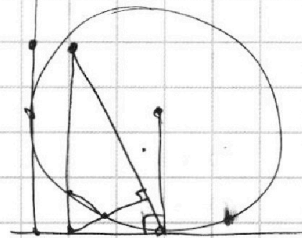
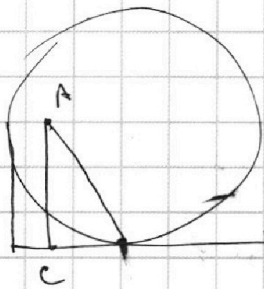
$$4\pi \geq -2x$$

$$-2x \geq -6\pi$$

$$-2\pi \leq x$$

$$+3\pi \geq x$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi n \\ \frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k \end{cases}$$

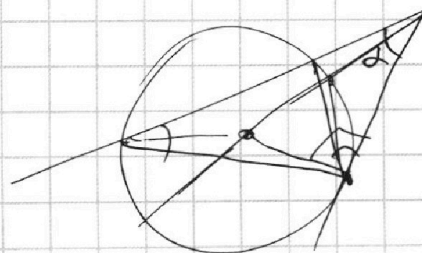
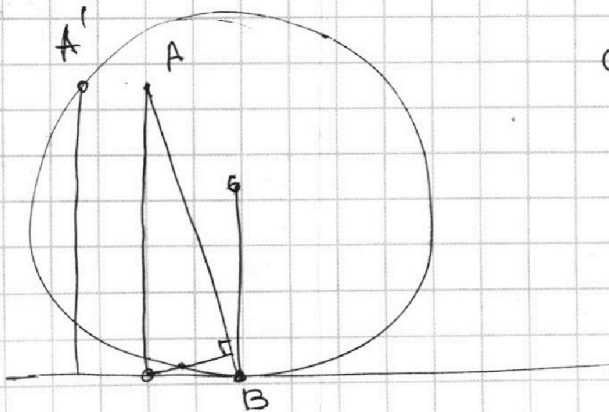
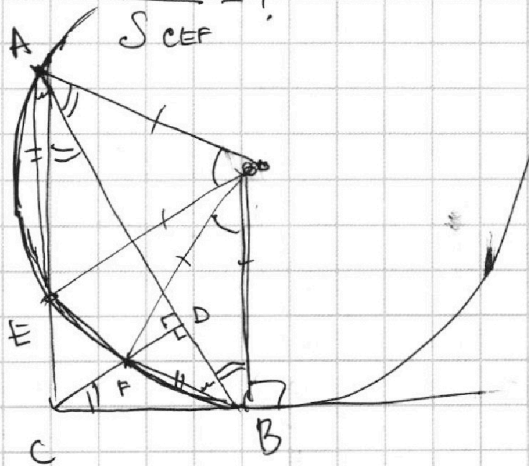


$AB \parallel EF$
 $AD : DB = 5 : 2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

S_{ABC}

$$S_{ADC} = \frac{4}{7} S_{ABC}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac : 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$a = 2^x 3^y 5^z$$

$$b = 2^l 3^m 5^k$$

$$c = 2^d 3^e 5^f$$

min abc - ?

$$ab = 2^{x+l} = 2^8$$

$$x+l = 8$$

$$y+m = 14$$

$$z+k = 12$$

$$x+d = 14$$

$$y+e = 21$$

$$z+f = 39$$

$$\left. \begin{aligned} y+m+2+e &= 34 \\ y+e &= 21 \end{aligned} \right\} zm = 13$$

$$m = 6,5$$

$$\left. \begin{aligned} y &= 7,5 \\ e &= 13,5 \end{aligned} \right\}$$

$$l+d = 12$$

$$m+e = 20$$

$$k+f = 17$$

$$\left. \begin{aligned} x+2l+d &= 20 \\ x+d &= 14 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2l &= 6 \\ l &= 3 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 5 \\ d &= 9 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} z+2k+f &= 29 \\ z+f &= 39 \end{aligned} \right\} k = 5$$

$$z = 7$$

$$f = 12$$

$$m = 7$$

$$y = 8$$

$$e = 14$$

$$e = 13$$

$$m = 6$$

$$y = 7$$

$$e = 14$$

$$y+m \geq 14$$

$$m+e \geq 20$$

$$y+e \geq 21$$

$$m \geq 6,5$$

$$y \geq 7,5$$

$$m+y+z \geq 41$$

$$m+y \geq 14$$

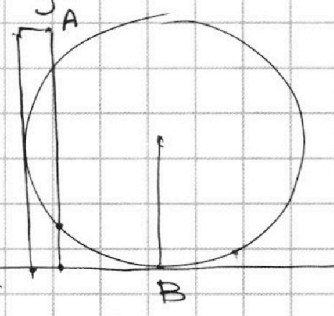
$$14+2e \geq 41$$

$$2e \geq 27$$

$$e \geq 13,5$$

$$\left. \begin{aligned} m &= 6 \\ y &= 8 \\ e &= 14 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} m &= 7 \\ y &= 7 \\ e &= 14 \end{aligned} \right\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

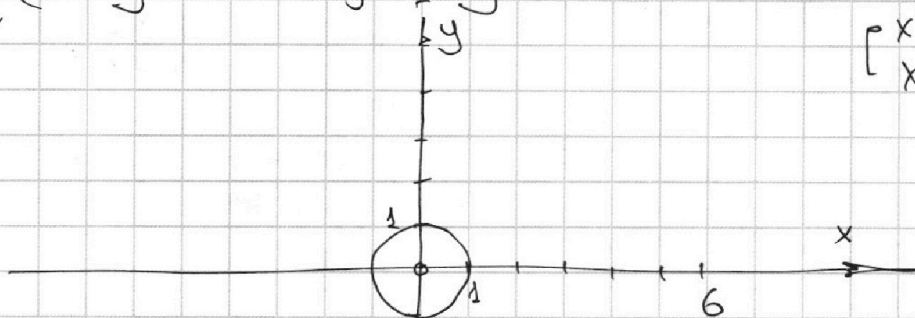


нч.

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

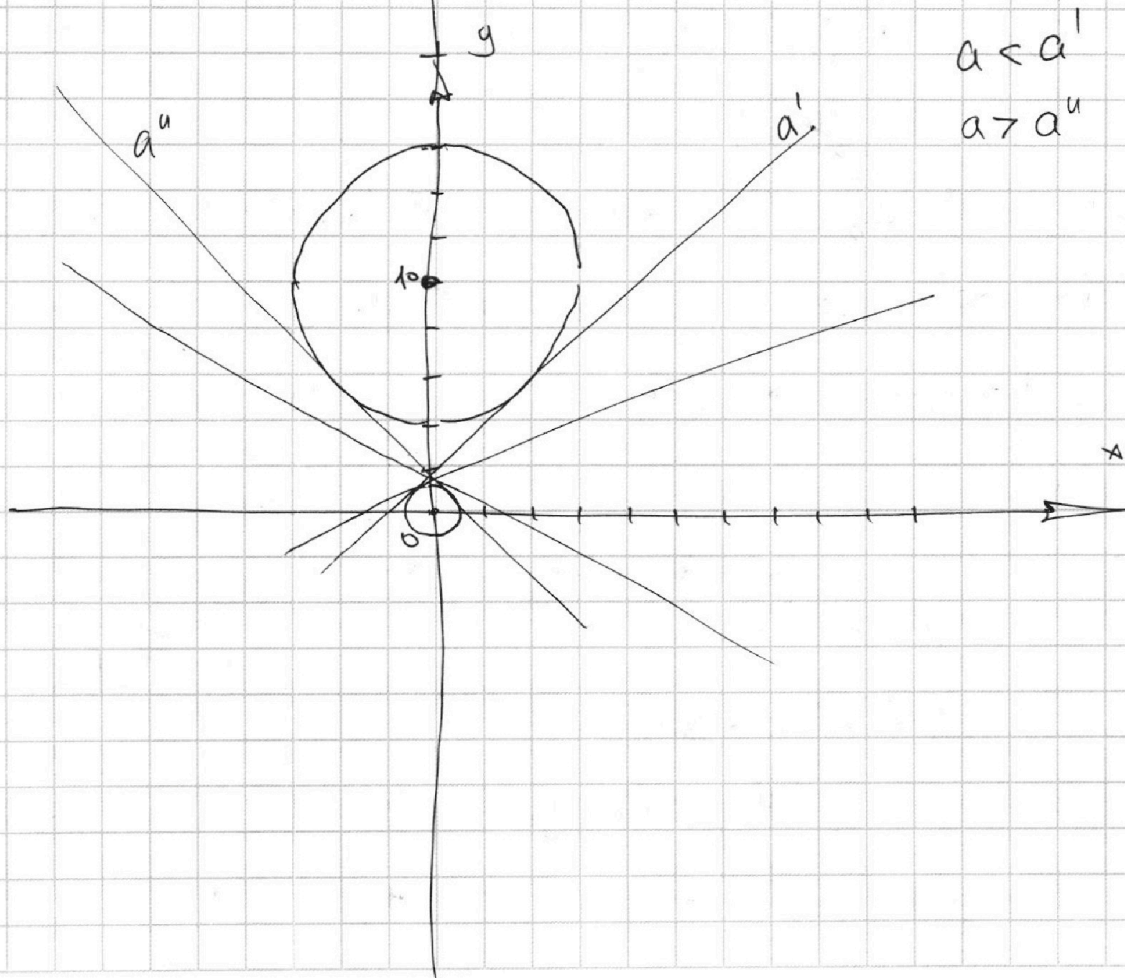
4 решения.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$



$$ax + 4b = 3y$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$



$$\begin{aligned} a < a' \\ a > a'' \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 0,2 - 3$$

$$xy = ?$$

$$625 = 25 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5(2x) = m$$

$$m^4 - 3 \cdot \frac{1}{m} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{m} - 3$$

$$m^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3m$$

$$\begin{cases} y = -5x + b_1 \\ y = -5x + b_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \end{cases} \text{ O.D.}$$

$$-5x + b_1 = -5x + b_2 + 45 \Rightarrow b_1 - b_2 = 45$$

$$m \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq y \leq 80$$

$$-5x = y$$

$$x=0 \quad y=0$$

$$x=-1 \quad y=5$$

$$x=-2 \quad y=10$$

$$x=-3 \quad y=15$$

$$m(m^4 + 3) = \frac{4+9}{3}$$

$$3m^5 + 9m - 13 = 0$$

$$y = -5x + b$$

$$0 \leq -5x + b \leq 80$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 0,2 - 3$$

x_1, y_1 - первое
 x_2, y_2 - второе

$$\log_5^4(2x) + \log_5^4 y + 4 \log_y 5$$

$$-b \leq -5x \leq 80 - b$$

$$O(0;0)$$

$$\frac{17}{17}$$

$$2890$$

$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$x \geq -16 + \frac{b}{5}$$

$$P(-16; 80)$$

$$\frac{11}{17}$$

$$90 - 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$b \in [0; 90]$$

$$Q(2; 80)$$

$$-16; 80$$

$$x_1; y_1 \quad x_2; y_2$$

$$R(18; 0)$$

$$0 \leq y \leq 80$$

$$y \geq -\frac{80}{16}x = -5x$$

$$y \leq -\frac{80}{16}x + 90 = -5x + 90$$

$$y=0$$

$$x=18$$

$$-18 \cdot \frac{80}{16} + b = 0$$

$$b = +5 \cdot 18 = 90$$

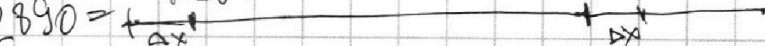
$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$= 90$$

$$-16 \quad 17$$

$$0$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 96 \\ + 16 \\ \hline \times 256 \\ 36 \\ \hline 1536 \\ + 368 \\ \hline 9216 + 2890 = 12106 \end{array}$$



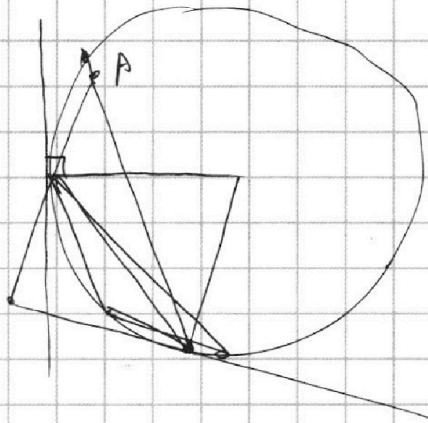
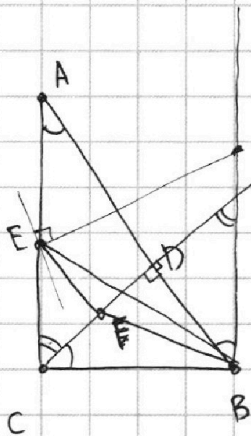
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2 \geq -y_2$$

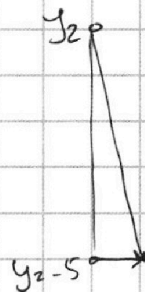
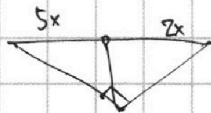
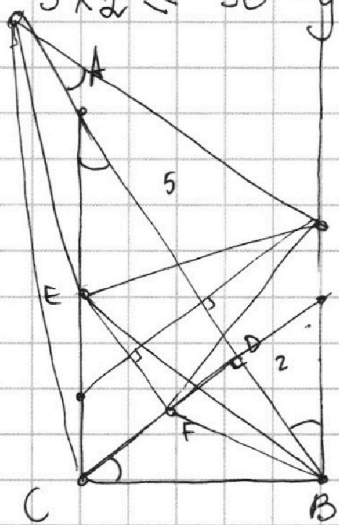
$$5x_2 \leq 90 - y_2$$

$$(x_1; y_1) \quad x_2; y_2.$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$5 \left(x_2 + \frac{1}{5} - x_1 \right) + y_2 - y_1 - 1 = 45$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{DF}{FC}$$



$$\frac{y}{2x} = \frac{5x}{y}$$

$$y^2 = 10x^2$$

$$y = \sqrt{10}x$$

$$QB = \sqrt{10+4} = \sqrt{14}x$$

$$AQ =$$

$$10+25 = \sqrt{35}x$$

$$2x$$

$$\frac{\sqrt{14}x}{e} = \frac{\sqrt{10}}{2x}x$$

$$e =$$

$$\frac{10 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot x}{\sqrt{7} \cdot 2 \cdot 2x}$$

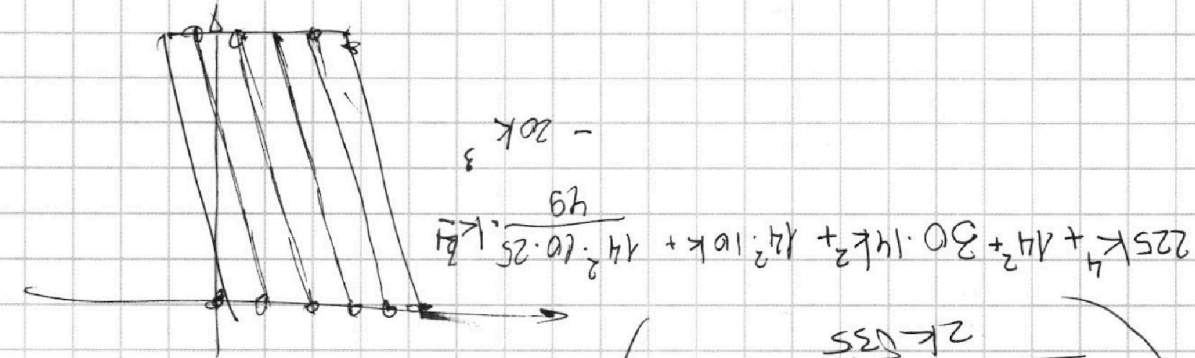
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$m^5 + l^5 = m^4 + l^4 + m^3 + l^3 +$$

$$2 \left(k^2 \cdot 35 \cdot 2x + 14x - k^2 \cdot 35x \right)$$

$$= 14x^2 + k^2 x^2 - \frac{14 \cdot 25}{49} - 2 \cdot \frac{14}{49} \cdot 5 k x^2$$

$$\left(\sqrt{14x - kx} - \sqrt{5 \cdot \frac{14}{49}} \right)^2 =$$

$$7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5$$

$$2 \left(\frac{15 k^2 \cdot x + 14x}{2k \sqrt{35}} \right)$$

$$= \frac{2k \sqrt{35}}{k^2 \cdot 35 \cdot 2x - k^2 \cdot x \cdot 10 \cdot 2 + 14x - k^2 \cdot 35x}$$

$$\Delta x = \frac{2k \sqrt{35} \cdot x}{14x^2 - k^2 \cdot 35x^2} = \frac{2k \cdot \sqrt{35}}{14x - k^2 \cdot 35x}$$

$$14x^2 + \Delta x^2 = k^2 \cdot 35x^2 + 2k \Delta x \sqrt{35} x$$

$$= (k \cdot (\sqrt{35}x + \Delta x))^2$$

$$\left(k \cdot \sqrt{35}x - k \cdot \sqrt{10}x - k \cdot \sqrt{14}x + \Delta x \right)^2 + \left(\sqrt{14}x - k \cdot \sqrt{10}x - k \cdot \sqrt{35}x \right)^2 =$$

$$14x^2 + \Delta x^2 = k^2 \cdot 35x^2 + \Delta x^2 + 2k \cdot \Delta x \cdot \sqrt{35} x$$