



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5-x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x-35)(x+1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть max произведем $+ q \Rightarrow$

$$5 - x = \sqrt{\frac{13x - 35}{(x+1)^3}} \cdot q^6 \quad \text{и} \quad (5 - x)q^2 = \sqrt{(13x - 35)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{13x - 35}{(x+1)^2}} \cdot q^6 = \frac{\sqrt{(13x - 35)(x+1)}}{q^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{13x - 35}{(x+1)^2}} \cdot q^8 = \sqrt{(13x - 35)(x+1)}$$

$$= \sqrt{(13x - 35)(x+1)} \quad \text{ООЗ: } \sqrt{\frac{13x - 35}{(x+1)^2}} \geq 0 \quad \boxed{x \neq -1}$$

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 13x - 35 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \geq \frac{35}{13} \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{35}{13}$$

$$\begin{cases} 13x - 35 \leq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{35}{13} \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$$

Возведем в квадрат: $\frac{13x - 35}{(x+1)^2} \cdot q^{16} = (13x - 35)(x+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x - 35 = 0 \\ q^{16} = (x+1)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{13} \\ q^4 = |x+1| \end{cases} \quad \text{заметьте, что}$$

если $x = \frac{35}{13} = (5-x)q^2 = 0 \Leftrightarrow q = 0$ - неверно

произведем с знаменателем 0, но тогда $5-x=0$

$$\Rightarrow q^4 = |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 & q^4 = -x-1 \Leftrightarrow x = -q^4 - 1 \\ x > -1 & q^4 = x+1 \Leftrightarrow x = q^4 - 1 = (q^2-1)(q^2+1) \end{cases}$$

$$(5-x)q^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \Rightarrow (5-x)q^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \leq 5}$$

$$(5-x)^2 q^4 = (13x-35)(x+1) \Leftrightarrow (25-10x+x^2)q^4 = (13x^2+13x-$$

$$-35x-35) \Leftrightarrow x^2 q^4 - 13x^2 - 10x q^4 - 13x + 35x + 25q^4 + 35$$

$$= 0 \Leftrightarrow x^2(q^4-13) - x(10q^4-22) + (25q^4+35) = 0$$

$$\frac{35}{13} \quad \frac{22}{22} \quad \Delta = (10q^4-22)^2 - 4(x^2+35)(q^4-13)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 100t^2 - 640t + 400 \Leftrightarrow 9^4(x^2 - 10x + 25) = 13x^2 - 22x + 35$$

$$\Leftrightarrow 9^4 = \frac{13x^2 - 22x + 35}{(x-5)^2} \quad x \neq 5$$

$$\Rightarrow \frac{13x^2 - 22x + 35}{(x-5)^2} = x+1 \Leftrightarrow 13x^2 - 22x + 35 = (x+1)(x-5)^2$$

$x > -1$

$$10x = 25 \Rightarrow 22x = 25 \Rightarrow x^3 - 10x^2 + 25x + x^2 - 10x - 25 = x^3 - 9x^2 + 15x - 25 \Leftrightarrow x^3 - 22x^2 + 37x - 10 = 0$$

$$8 - 22 \cdot 4 + 37 \cdot 2 - 10 = 8 - 88 + 74 - 10$$

$$27 - 22 \cdot 9 + 37 \cdot 3 - 10 = 27 - 198 + 111$$

$$\frac{13x^2 - 22x + 35}{(x-5)^2} = -x-1 \Leftrightarrow 13x^2 - 22x + 35 = (-x-1)(x-5)^2$$

$x < -1$

$$= -1(x+1)(x-5)^2 = -x^3 + 10x^2 - 25x - x^2 + 10x$$

$$-25 \Leftrightarrow x^3 + 9x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$27 + 30 - 21 - 60 = 60 + 60 - 228 + 60$$

$$(5-x)^4 \cdot 9^4 = (13x-35)(x+1) \Leftrightarrow 9^4 = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = x+1$$

при $x > -1 \Leftrightarrow 13x-35 = 25-10x+x^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 23x + 60 = 0 \quad D = 23^2 - 4(60) =$$

$$529 - 240 = 289 = 17^2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{23 \pm 17}{2} = 20$$

$$\Leftrightarrow x = 3, x = 20 \quad \text{Но т.к. } x \leq 5 \Rightarrow x = 3$$

Случай 2:

$$\frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2} = -x-1 \quad \text{при } x < -1$$

$$\Leftrightarrow 13x-35 = -(5-x)^2 = -25+10x+x^2$$

Handwritten notes and calculations on the right margin, including a vertical division: $\frac{13x^2 - 22x + 35}{x-5}$ resulting in $x+1$ with a remainder of 35 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$13x - 35 = -25 + 10x - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \quad D = 9 + 40 = 49$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = 2 \quad \text{или } x = -5$$

Ответ: при $x = 3$ и $x = -5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2} \\ |y+11+3|y-12| = \sqrt{169-2^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ 2 \leq 13 \\ 2 \geq -13 \end{cases}$$

$$\cancel{4-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4}$$

$$y+x-x^2+2 \geq 0 \Leftrightarrow y+2 \geq x(x-1) \text{ - мин. значение}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y+2 \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}-2 \Rightarrow y \geq -18,5$$

$$|y+11+3|y-12| = \sqrt{169-2^2}$$

$$\begin{cases} y \geq -1 \\ y \geq 12 \\ y+1+3y-36 = \sqrt{169-2^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y \geq 12 \\ 4y-35 = \sqrt{169-2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -1 \\ y < 12 \\ y+1-3y+36 = \sqrt{169-2^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y \in [-1; 12) \\ 37-2y = \sqrt{169-2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -1 \\ -1-y-3y+36 = \sqrt{169-2^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y < -1 \\ -4y+35 = \sqrt{169-2^2} \end{cases}$$

$$1. (4y-35)^2 = 169-2^2 \Leftrightarrow 16y^2 - 8 \cdot 35 + 35^2 = 169-2^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos x \cdot \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$$

$$-\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \text{Кубическая уравнение тригонометрическое}$$

$$\text{Возьмем: } 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x - p = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = t \Rightarrow 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0 \quad \text{Возьмем производную}$$

$$12t^2 + 12t + 3 = 0 \quad D = 144 - 144 = 0 \quad t = -\frac{1}{2}$$

\Rightarrow функция монотонно возрастает \Rightarrow при $t = -\frac{1}{2}$

$$f(-\frac{1}{2}) < 0, \text{ а } f(1) > 0 \Rightarrow \exists \text{ решение уравн. услов. } (t \in [-\frac{1}{2}; 1])$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p < 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot (-\frac{1}{2})^3 + 6 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) - 3 - p < 0 \Leftrightarrow -4 + 6 - 3 - 3 - p < 0$$

$$\Leftrightarrow p > -4$$

$$\Rightarrow p \in [-4; 10]$$

$$4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 3 - p > 0 \Leftrightarrow p < 10$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x - p = 0$$

Уравнение имеет решение при $p \in [-4; 10]$

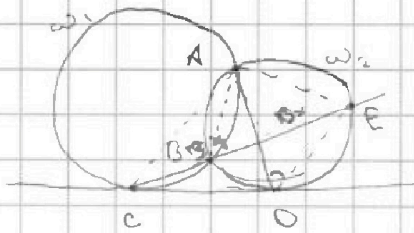


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

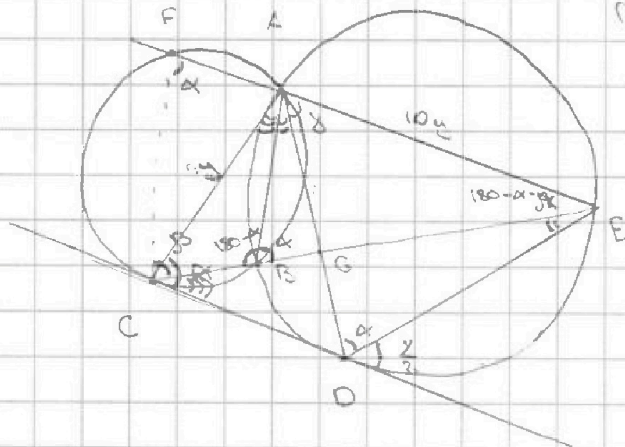
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle ADE = \alpha$, $\triangle BDC$ - бисек. \Rightarrow
 $\angle ADE = \angle ABE = \alpha$, $\Rightarrow \angle ABC = 180 - \alpha$
 Грассман BA до пересечения с ω'
 $EO \sim \omega' = F$.
 $\triangle FAB$ - бисек. $\Rightarrow \angle AFC = 180 - \angle ABC$
 $= \alpha$

$$\angle BFC = \angle BAC = \alpha$$

$$\angle B = \gamma$$



По т. об угле между хордой и касательной
 $\angle ACD = \angle AFC = \alpha$

$$\angle AGE = 180 - (180 - \alpha - \gamma)$$

$$= \alpha + \gamma$$

По т. об угле между хорд. и кас. $\angle ADC$
 $= \angle AED$

$\Rightarrow \triangle COO \sim \triangle AOE$ при этом $\angle CAD = \angle OAE \Rightarrow AB$ - бисек. са

$$\angle CAE \Rightarrow \text{по св. и бисек.} \frac{CA}{AE} = \frac{3}{10}$$

$$\text{по подобиям} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AO}{AB} = \frac{CO}{DE}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AO}{AB} = \frac{3AD}{10AC} \Rightarrow 10AC^2 = 3AD^2 \Rightarrow AD = AC \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AC \sqrt{\frac{10}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{10}} \Rightarrow \frac{ED}{DE} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{10}{3}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Центр симметрии квадрата задает 1 квадрат
 в во второй половине пр.на для каждого
 центр квадрата в первой половине \Rightarrow чис-во
 раскрасок - ч.с = C_{25000}^4
 число обещая тем же способом: $3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 = \frac{3 \cdot 25000!}{(24996)! \cdot 4!} - \frac{2 \cdot 12500!}{(12498)! \cdot 2!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + \cos 2x \quad \cos 3x + 3\cos x + 2\cos 2x + 2\cos x$$

$$\cos 3x + \cos x + 3\cos 2x + 3\cos x + 2\cos x$$

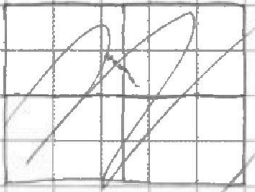


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что одна средняя линия проходит горизонтально по границе квадрата, а вторая пересекает один из его углов по центру.

Для начала посчитаем две линии относительно центра, причем стороны по центру. Пусть на одна из произвольных точек на линии l этом стороне \Rightarrow задача эквивалентна выбору $4 \times$ точек из пары

$$\begin{array}{r} 2502 \\ 2 \quad \underline{1125} \\ 5 \\ 4 \\ \hline 10 \end{array}$$

Заметим, что линия l из

симметрична отн. центра не совп. на l начал из симметрично отн. центра.

Рассчитаем $4 \times$ способов удов. симметрично отн. вертикальной линии. Выбор квадрата с одной стороны линии однозначно задает выбор квадрата по другую сторону \Rightarrow задача эквивалентна выбору $4 \times$ квадратов с одной из сторон.

$= C_{2500}$ аналогично для второй ~~третей~~

Теперь средняя линия. Однако нам дважды посчитали случаи, которые являются симметрично отн. обеих средних линий. Каждые их $4 \times$ точек будет $4 \times$ для тех случаев расположения квадрата в одной из четвертей квадрата, на которые делит $2 \times$ средние линии и однозначно задает положение $3 \times$ квадратов в ост. четвертях. \Rightarrow количество равно C_{1250}^2

Заметим, что каждая точка является расположением еще и центральной симметрично. \Rightarrow будет учет еще 1 раз в дальнейшем.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$b^2 = 560 - a$	всеми квадратами $< 560 - 23$:	1	36	721	225	441
\Rightarrow для $b=1$ $a=559$		4	49	144	289	484
$b=2$ $a=556$		9	81	169	324	529
$b=3$ $a=551$		16	81	196	361	
$b=4$ $a=544$		25	100	256	400	
$b=5$ $a=535$	При этом $a-b$ не крат- но 3-м. \Rightarrow не подходит					
$a-b=518$ $b=6$ $a=524$	$b=2$ $a=556$					
$a-b=504$ $b=7$ $a=511$	$b=3$ $a=551$					
$a-b=488$ $b=8$ $a=496$	$b=5$ $a=535$					
$b=9$ $a=479$	$b=6$ $a=524$					
$b=10$ $a=460$	$b=8$ $a=486$					
$b=11$ $a=439$	$b=9$ $a=479$					
$b=12$ $a=416$	$b=11$ $a=439$					
$b=13$ $a=381$	$b=12$ $a=416$					
$b=14$ $a=354$	$b=13$ $a=381$					
$b=15$ $a=335$	$b=14$ $a=354$					
$b=16$ $a=304$	$b=15$ $a=335$					
$b=17$ $a=271$	$b=17$ $a=271$					
$b=18$ $a=236$	$b=18$ $a=236$					
$b=19$ $a=199$	$b=20$ $a=160$					
$b=20$ $a=160$	$b=21$ $a=119$					
$b=21$ $a=119$	$b=22$ $a=86$					
$b=22$ $a=86$	$b=23$ $a=31$					
$b=23$ $a=31$						

$(a-c)(b-c)$ - квадраты простых $\Rightarrow a-c = b-c =$
простые или $b-c = 1$ и $a-c$ - прост. квадрат.

Т.е. все случаи $a=b \Rightarrow b-c = 1$ и $a-c$
- простое, проб.

555 - не прост, 549 - не прост, 531 - не прост, 519 - не прост
489 - не прост, 479, 429, 405, ~~381~~ 351, 321,
255, 219, 111, 99, 9 \Rightarrow только 9 - квадрат
простого \Rightarrow пара троица $(31, 23, 22)$
Ответ: $(31, 23, 22)$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

