



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 39 \\ \hline 117 \\ 752 \\ \hline 152 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{r} 441 \\ 162 \\ \hline 603 \end{array} \quad \begin{array}{r} 593 \overline{) 22} \\ \underline{44} \\ 44 \\ \hline 22 \end{array} \quad \begin{array}{r} 29 \\ - 29 \\ \hline 361 \\ \hline 841 \end{array}$$

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)} \cdot q^2 = 2 - x$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 6} - \sqrt{3 - x - 2z} + 7 = 2\sqrt{y - 3x - x^2 + z}, \\ |y + 2| + 2|y - 18| = \sqrt{400 - z^2}. \end{cases} \quad y \leq -2$$

$$\sqrt{\frac{25+34}{(3+2)^3}} = q^8$$

$$-3y = 27 \cdot 4 = 2 \cdot (6+6+6)$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p + 4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

$$\cos 3x = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$$

$$p \cos x + \dots = \frac{25}{3} c$$

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

$$(a - c)(b - c) = c^4$$

$$2 C_{2000}^4 - C_{1500}^4$$



$$80 \cdot 600 \cdot 80 \cdot 300 = 1$$



$$2^2 = 8 \cdot \frac{2}{3}$$

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

$$ab + (a+b)c + c^2$$

$$a \cdot c = b - c$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ \hline 93 \end{array}$$

$$361 \quad 31 \text{ и } 39$$

$$a^2 + a < 1000 \quad e^2 = \frac{16}{3}$$

$$a^2 + a - 1000 < 0 \quad e = \frac{4}{3}$$

$$e \cdot x = 5 \quad \frac{-1 \pm \sqrt{1000}}{2}$$

$$\frac{+2^6 - 1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5 \cdot 3}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^2 = 2-x$$

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot q^2 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$3x+2 \neq 0 \quad 2-x \geq 0 \quad x \leq 2, \quad x \neq -\frac{2}{3}$$

$$(25x+34)(3x+2) \geq 0$$

$$x \leq 2, \quad x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

2) Если $x = -\frac{34}{25}$, то

$$0 \cdot q^2 = 2 + \frac{34}{25} \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq -\frac{34}{25}, \text{ так как } x \neq 2 \text{ иначе } q=0$$

$$q^2 = \frac{1}{(3x+2)^2} \Rightarrow \frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)(3x+2)^2}$$

$$q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} \quad 3x+2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$(25x+34)^2 = (2-x)^4 \Rightarrow$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; 2)$$

$$|25x+34| = 4+x^2-4x$$

21	5613
21	32187
21	26
42	24
42	20
	187

3) $x \in (-\infty; -\frac{34}{25})$: $-25x+34 = 4+x^2-4x$

$$x^2 + 21x + 38 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 152}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{-21 \pm \sqrt{593}}{2} \in \left(-\infty, -\frac{34}{25}\right) \quad x_1 = -2 \quad x_2 = -19$$

$$4) \quad x \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right): \quad 34 + 25x = 4 + x^2 - 4x$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0 \quad x = \frac{29 \pm \sqrt{841 + 120}}{2}$$

$$x = \frac{29 \pm 31}{2}; \quad \emptyset$$

$$5) \quad \text{Ответ: } \cancel{x \in} x \in \{-2; -19\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \quad \begin{cases} 6,25 = 18 - 3x - x^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 11,75 = 0 \\ 16 = 18 - 3x - x^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$4x^2 + 12x - 47 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm 4\sqrt{14}}{4} = -1,5 \pm \sqrt{14}$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = -1,5 \pm \sqrt{17}$$

$$x \in [-3; 3] \Rightarrow \sqrt{14} \text{ и } \sqrt{17} < 4,5$$
$$14 \text{ и } 17 < 20,25 \quad \checkmark$$

\Rightarrow

Ответ: $y = 18 \quad z = 0$

$$x \in \{-1,5 \pm \sqrt{14}; -1,5 \pm \sqrt{17}\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + \varepsilon = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

$$1) \quad |y+2| + 2|y-18| \leq 400 \quad 20$$

$$y > 18: \quad 3y - 36 + 2 = 2(y-18) + (y+2)$$

$y-18 > 0$ $y+2 > 0$

$$\rightarrow \emptyset$$

$$y = 18: \quad \Rightarrow z = 0$$

$$-2 < y < 18: \quad 38 - y \leq 20 \Rightarrow y = 18 \quad \times$$

\emptyset

$$y \leq -2: \quad -2 - y + 36 - 2y \leq 20 \Rightarrow$$

$$3y \geq 14 \quad \times \Rightarrow \emptyset$$

Итого $y = 18, z = 0$

$$2) \quad \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + \varepsilon = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

Положим $a = \sqrt{x+6}$; $b = \sqrt{3-x} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a - b + \varepsilon = 2ab \\ a^2 + b^2 = 9 \end{cases} \quad \begin{aligned} (a-b)^2 &= 4a^2b^2 + 49 - 28ab \\ &= a^2 + b^2 - 2ab = 9 - 2ab \end{aligned}$$

$$4a^2 - 28a + 49 = 0$$

$$a = ab, \quad a \neq 0$$

$$a = \frac{13 + \sqrt{169 - 160}}{4} = \frac{13 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{18-3x-x^2} = 2,5 \\ \sqrt{18-3x-x^2} = 4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) a = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{p-1}{1-p}} - 1 = 1; \quad p = -7$$

$$p = -7: \quad x = 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$5) \begin{cases} -1 < a < 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow -1 > a^{-1} \\ \rightarrow 1 < a^{-1} \end{matrix} \rightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{p-1}{1-p}} - 1 \right) \in \begin{matrix} (-\infty; -1) \cup \\ (1; +\infty) \end{matrix}$$

$$\sqrt[3]{\frac{p-1}{1-p}} \in ((-\infty; 0) \cup (2; +\infty))$$

$$1 - p \sqrt[3]{\frac{p-1}{1-p}} \in ((-\infty; 0) \cup (8; +\infty))$$

$$-p \in ((-\infty; -1) \cup (7; +\infty)); \quad p \in ((-\infty; -7) \cup (1; +\infty))$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}\right) + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$p \in (-7; 1): \quad x \in \emptyset$$

$$p = -7: \quad x = 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$p = 1: \quad x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$p \in ((-\infty; -7) \cup (1; +\infty)):$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}\right) + 2\pi t, \quad t \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \rho \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(\rho + 4) \cos x + 10 = 0$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1) \cos x$$

$$- 2 \sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x =$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x;$$

$$4\rho \cos^3 x - 3\rho \cos x + 12\cos^2 x - 6 + 3\rho \cos x + 12\cos x$$

$$+ 10 = 0$$

$$4\rho \cos^3 x + 12\cos^2 x + 12\cos x + 4 = 0 \quad / : 4$$

$$\rho \cos^3 x - \cos^2 x + (\cos^2 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1) = 0$$

$$\rightarrow (\cos x + 1)^3 = (1 - \rho) \cos^3 x$$

$$\cos x + 1 = \sqrt[3]{1 - \rho} \cos x$$

$$1 = (\sqrt[3]{1 - \rho} - 1) \cos x;$$

$$2) \sqrt[3]{1 - \rho} \neq 1 \Rightarrow \rho \neq 0$$

$$\sqrt[3]{1 - \rho} (\sqrt[3]{1 - \rho} - 1)^{-1} = a, \quad a \neq 0$$

$$1 = a^{-1} \cos x, \Rightarrow \cos x = a$$

$\bar{\exists}$ решения если $a \in [-1; 1] \setminus \{0\}$

$$\text{Если } a = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Если } a = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$a \in (-1; 0) \cup (0; 1):$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$3) a = -1 \Rightarrow \sqrt[3]{1 - \rho} - 1 = -1 \quad \rho = 1$$

$$\rho = 1: x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

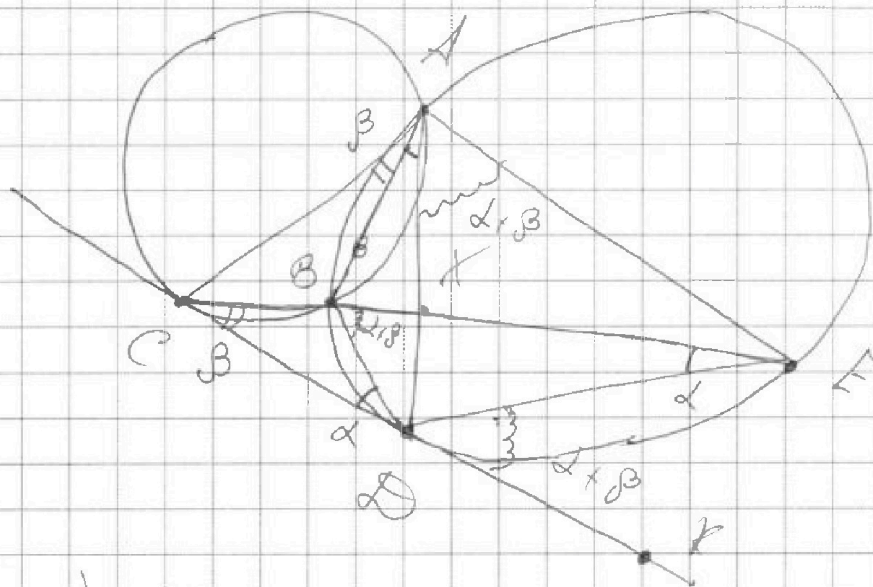


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \text{Так как } \angle CDB = \alpha \implies \angle CAB = \beta$$

$$\angle BCD = \beta \quad \angle BAD = \alpha$$

т.к. эти углы при касательной и опираются на соответ. хорду.

$\angle EBD$ - внешний для $\triangle CBD$

$$\angle EBD = \angle BCD + \angle CDB = \alpha + \beta$$

$\angle EBD$ опирается на ту же хорду что и $\angle DAE \implies \angle DAE = \alpha + \beta = \angle EBD$

$\angle BED$ опирается $BD \implies \angle DAE = \alpha$

$$\implies \angle CAD = \angle DAE$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) Пусть X - множество комбинаций
симв. АВ

Y - символ СД

~~Z~~ - символ (.) 0

$$n(X) = C_{30000}^4 = n(Y) = n(Z)$$

$$\text{Заметим, что } X \cap Y = \emptyset \cap X = \emptyset \cap Y \\ = X \cap Y \cap \emptyset$$

$$n(X \cap X) = C_{15000}^2 \Rightarrow$$

$$n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(X \cap Z) \\ - n(Y \cap Z) + n(X \cap Y \cap Z);$$

$$= 3 \cdot n(X) - 3 \cdot n(X \cap X) + n(X \cap Y)$$

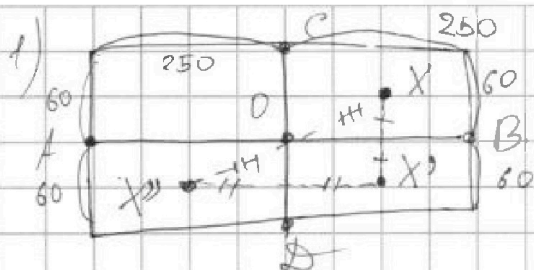
$$= 3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Найдём сколькими способами можно выбрать симметричную комбинацию отн. AB

Для этого выберем из верхней части (прямоуг. сверху $(\bullet) C$) 4 точки. Оставшиеся 4 из 8 можно одинаково расставить симм. первым 4-ём \Rightarrow
 Кол-во комбинаций: $C_{250 \cdot 60}^4$

2) Аналогично с CD: $C_{250 \cdot 120}^4$

3) Э случая посчитанные как в комб. AB так и в комб. CD;

Если комб симм. AB и CD одновременно, то ~~это~~ \rightarrow симметричны относительно $(\bullet) O$ (по одному - нет!)

4) Для симм. O достаточно взять 2 точки из середины прямоугольника (на равном расстоянии от центра симм. O относительно симм. AB и симм. CD)

Итого: $C_{250 \cdot 60}^2$

5) Общее число комб симм. относительно O_1 : для этого из половины прямоугольника выбираем 4 точки: C_{30000}^4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

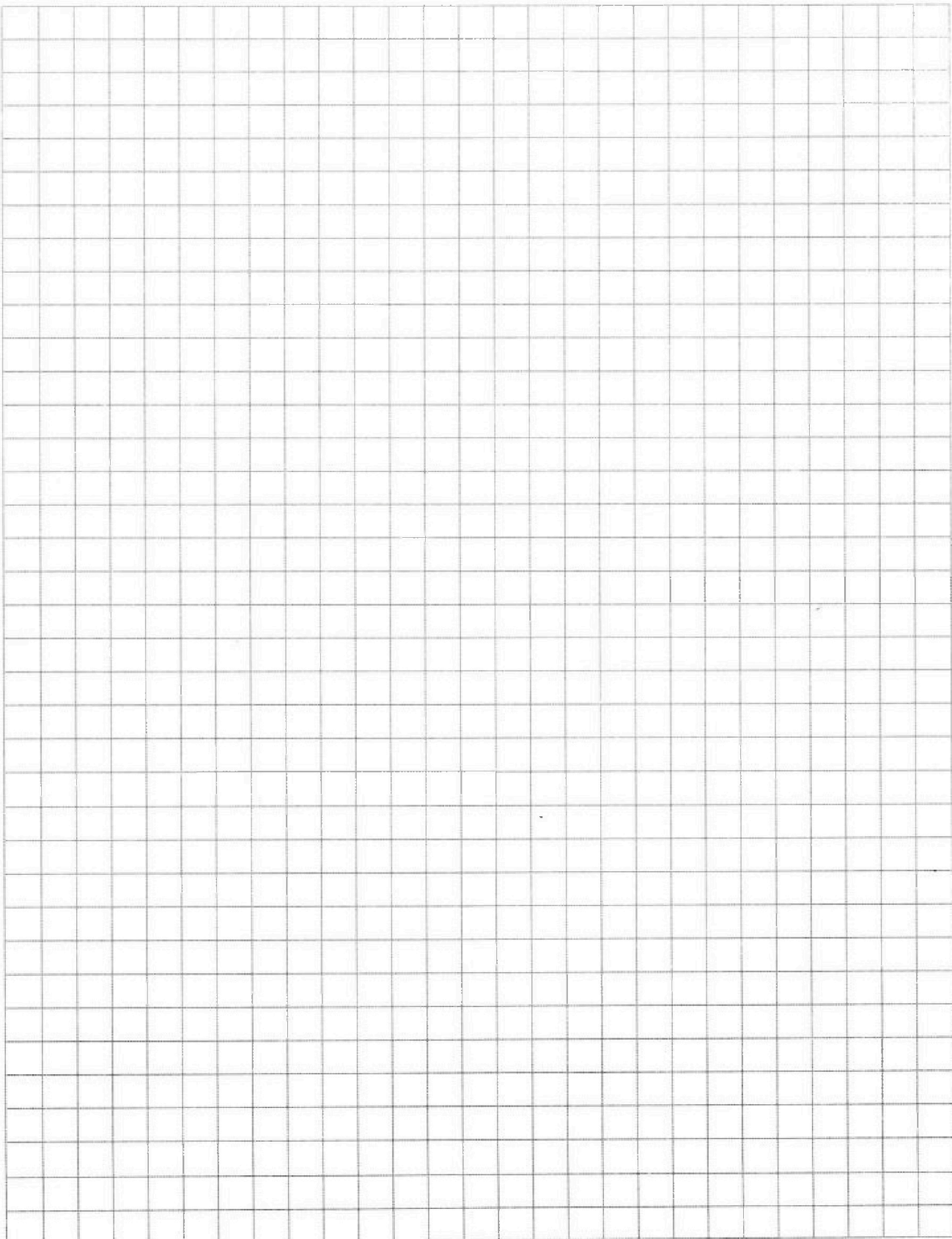
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) (a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow a=b \text{ и } b-a$$

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-c = -1 \\ a-c = -p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-c = p^2 \\ a-c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-c = -p^2 \\ a-c = -1 \end{cases} \Rightarrow a=b \text{ и}$$

$$b-a+1 = p^2$$

$$\overbrace{b-a-1 = -p^2}^{b-a+1 = p^2} \Rightarrow a-b-1 = -p^2$$

2) $b-a = p^2 - 1$; сравним $p^2 - 1$ по модулю

3: Варьируем остаток от p при делении

на 3: $\begin{cases} p \equiv 1 \\ p \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 1 \\ p^2 \equiv 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ то}$$

$$p^2 - 1 = b-a \Rightarrow \text{и}$$

ответ: \emptyset

