



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



✖ [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .

✖ [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

✖ [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.

✖ [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

✖ [4 балла] Решите систему уравнений

$$f(x) = f(y) \rightarrow x = y$$

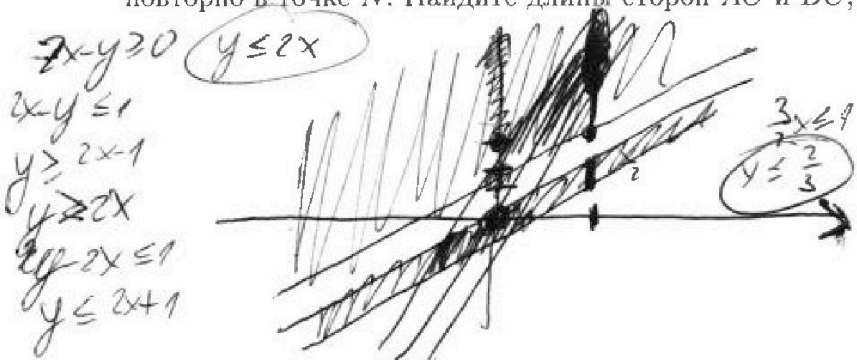


$$\begin{cases} x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y} \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

✖ [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

✖ [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



$$\begin{aligned} x - y >= 0 & \rightarrow y <= x \\ x - 2y >= 0 & \rightarrow y <= \frac{x}{2} \\ x - 2y <= 2 & \rightarrow y >= \frac{x-2}{2} \\ y >= 2x-1 & \rightarrow y >= 2x-1 \\ y <= 2x & \rightarrow y <= 2x \\ y <= 2x+1 & \rightarrow y <= 2x+1 \end{aligned}$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первый элемент прогрессии — a , а
разность прогрессии — b .

$$(1) a + b \cdot 3 = 6 - 9x$$

$$(2) a + b \cdot 5 = (x^2 - 2x)^2$$

$$(3) a + b \cdot 9 = 9x^2$$

n -ый элемент прогрессии —
 $a + b(n-1)$

Вычтем из (2) — (1):

$$2b = (x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x \Rightarrow 4b = 2(x^2 - 2x)^2 - 12 + 18x$$

Вычтем из (3) — (2):

$$4b = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$\Rightarrow 4b = 2(x^2 - 2x)^2 - 12 + 18x = 9x^2 - (x^2 - 2x)^2$$

$$3(x^2 - 2x)^2 = 3x^2 - 6x + 4$$

$$(x^2 - 2x)^2 = 3x^2 - 6x + 4$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-1)^2(x^2-2x-4)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\sqrt{5} \\ x=1+\sqrt{5} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$x^2-2x-4=0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{5} \quad x_2 = 1 + \sqrt{5} \quad \text{Все три корня} \\ \text{подходят}$$

Ответ: $1 - \sqrt{5}$; 1 ; $1 + \sqrt{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

1) $x \geq 0$

a) $y \in (-\infty, \frac{x}{2}]$

$x-2y \geq 0$, т.к. $y \leq \frac{x}{2}$

~~2x-y \geq 0~~ $2x-y \geq 0$, т.к. $y \leq \frac{x}{2} \leq 2x$

$$\begin{cases} x-2y \leq 2 \\ 2x-y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} - 1 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow y \geq 2x - 1$$

~~2x-1 \leq y \leq \frac{x}{2}~~

~~2x-1 \leq \frac{x}{2}~~

$$2x-1 \leq y \leq \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} \geq 2x-1 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

$$3y+6x \leq \frac{3x}{2} + 6x = \frac{15x}{2} \leq \underline{5}$$

a) $y \in (\frac{x}{2}; 2x)$

$x-2y < 0$, т.к. $y > \frac{x}{2}$

$2x-y > 0$, т.к. $y < 2x$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2y - x \leq 2 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases}$$

$$2x - 1 \leq y \leq \frac{x}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} 3y + 6x &\leq 3 \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) + 6x = \\ &= \frac{15x}{2} + 3 \leq 13 \end{aligned}$$

$$y \in [2x, \infty)$$

$$\begin{aligned} x - 2y &\leq 0 \\ 2x - y &\leq 0 \\ \Leftrightarrow y &\geq 2x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2y - x \leq 2 \\ y - 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y \leq \frac{x}{2} + 1$$

$$2x \leq y \leq \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \frac{3x}{2} \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3y + 6x \leq 3\left(\frac{x}{2} + 1\right) + 6x = \frac{15x}{2} + 3 \leq 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad x < 0$$

$$a) \quad y \in (-\infty; 2x]$$

~~Или~~ $x - 2y \geq 0$, т.к.

$$y \leq 2x \leq \frac{x}{2}$$

$$2x - y \geq 0 \text{ т.к. } y \leq 2x$$

$$\begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x}{2} - 1 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow y \geq \frac{x}{2} - 1$$

$$\frac{x}{2} - 1 \leq y \leq 2x \Rightarrow \frac{3}{2}x \geq -1$$

$$\Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

$$3y + 6x \leq 6x + 6x = 12x \leq 0$$

$$b) \quad y \in \left(2x; \frac{x}{2}\right)$$

$$3y + 6x < \frac{3x}{2} + 6x = \frac{15x}{2} < 0$$

$$b) \quad y \in \left[\frac{x}{2}; \infty\right)$$

$$x - 2y \leq 0, \text{ т.к. } y \geq \frac{x}{2}$$

$$2x - y \leq 0, \text{ т.к. } y \geq \frac{x}{2} \geq 2x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2y - x \leq 2 \\ y - 2x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x}{2} + 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y \leq 2x + 1$$

$$\begin{aligned} \cancel{3y} \cdot 3y + 6x &\leq 3(2x + 1) + 6x = \\ &= 12x + 3 \leq 3, \text{ т.к. } x \leq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3y + 6x \leq \boxed{13}$$

~~при~~

$$\text{при } y = \frac{5}{3}, x = \frac{4}{3}$$

$$3y + 6x = \underline{13}$$

$$|x - 2y| = \left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| = 2$$

$$\Rightarrow |x - 2y| \leq 2$$

$$|2x - y| = \left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| = 1$$

$$\Rightarrow |2x - y| \leq 1 \quad (\checkmark)$$

Ответ: 13.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = 11p^2 \quad B = 75q^2 \quad m, n \in \mathbb{N}$$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = 11p^2 \quad (1)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = 75q^2 \quad (2)$$

$$mn(m + 2n + 9) = 75q^2 = 3 \cdot 5^2 \cdot q^2$$

$$\begin{aligned} A &= m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = \\ &= m(m-7) + 2(2mn - 7n + 2n^2) \quad \div 2 \\ &\quad \div 2 \quad \quad \quad \div 2 \end{aligned}$$

(м.к. либо $m \div 2$,
либо $m-7 \div 2$)

$$A = 11p^2 \quad \div 2$$

$\Rightarrow p = 2$, ведь иначе

p -нечётное, тогда $A = 11p^2$
нечётно.

$$\begin{aligned} A &= (m+2n)^2 - 7(m+2n) = \\ &= (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 = 11 \cdot 4 = 44 \end{aligned}$$

$$m+2n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad m+2n-7 \in \mathbb{N}$$

$$t = m+2n \quad t^2 - 7t - 44 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 144}}{2} = \frac{7 \pm 15}{2} \quad t_1 = 11$$

$t_2 = -4$ — несл. корень
(м.к. $\notin \mathbb{N}$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow t = 11 = m + 2n$$

$$\Rightarrow B = 75q^2 = mn(11+q) = 20mn$$

$$\Rightarrow 15q^2 = 4mn$$

$$\Rightarrow q = 2, \text{ так как } q - \text{нечётное} \Rightarrow 15q^2 - \text{нечётное}$$

$$15 \cdot 4 = 4mn \Rightarrow mn = 15$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (m+2n)^2 - 8mn &= 11^2 - 8 \cdot 15 = \\ &= 121 - 120 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m+2n)^2 - 8mn &= m^2 + 4n^2 + 4mn - 8mn = \\ &= m^2 + 4n^2 - 4mn = (m-2n)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$1) \quad m - 2n = 1 \quad m + 2n = 11$$

$$\Rightarrow 2m = 12 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow n = 2,5 \quad (\otimes), \text{ т.к. } m, n \in \mathbb{N}$$

$$2) \quad m - 2n = -1 \quad m + 2n = 11$$

$$\Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow n = 3 \quad (\checkmark)$$

$$A = 44 = 11 \cdot 2^2 \quad B = 300 = 75 \cdot 2^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad A = 75q^2 \quad B = 11p^2$$

$$A = m(m-7) + 2(2mn - 7n + 2n^2) : 2$$

$$A = 75q^2 : 2 \Rightarrow q = 2, \text{ иначе } 75q^2 \text{ - нечётное}$$

$$\Rightarrow A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = 300$$

$$t = m+2n \quad t \in \mathbb{N}, \text{ т.к. } m, n \in \mathbb{N}$$

$$t^2 - 7t - 300 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 300}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1249}}{2}$$

$$35^2 < 1249 < 36^2$$

$$35^2 = (30+5)^2 = 900 + 25 + 300 = 1225$$

$$36^2 = (30+6)^2 = 900 + 36 + 360 = 1296$$

$$\Rightarrow \sqrt{1249} \notin \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow t \notin \mathbb{Z} \quad (\text{X}); \text{ т.к. } t \in \mathbb{N}.$$

Противоречие

Ответ: $m = 5; n = 3$.

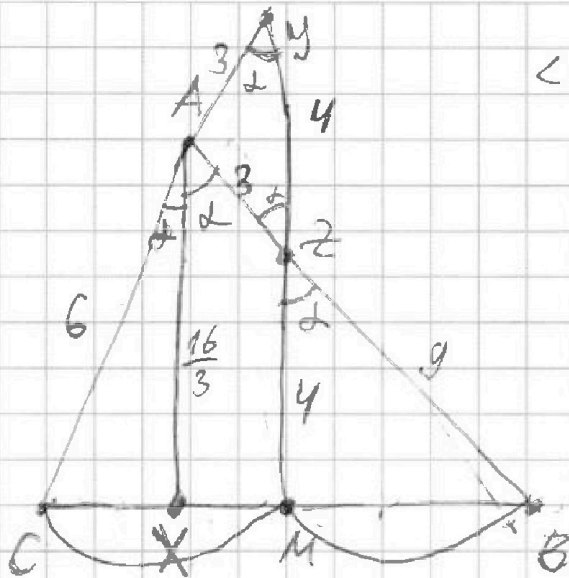


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle CAX = \angle BAX = \alpha$$

$$\angle AYM = \angle CAX, \text{ м.к.}$$

$$AX \parallel YM$$

$$\Rightarrow \angle AZY = \alpha$$

$$\angle AZY = \angle BAX, \text{ м.к.}$$

$$AX \parallel YM$$

$$\Rightarrow \angle AZY = \alpha$$

$$\Rightarrow \triangle AZY - \text{р/б, м.к. } \angle AZY = \angle AZY = \alpha$$

$$\Rightarrow AY = AZ = 3$$

По теореме Менелая для $\triangle ABC$

и прямой YM :

M - середина BC

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$$

$$\Rightarrow CM = MB$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{MB} = 1$$

$$1 \cdot \frac{BZ}{3} \cdot \frac{3}{9} = 1 \Rightarrow BZ = 9$$

По теореме Менелая для $\triangle CYM$ и

прямой AB :

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YM}{ZM} \cdot \frac{MB}{CB} = 1$$

$$(CB = 2MB \Rightarrow) \frac{MB}{CB} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = x = \frac{5 + \sqrt{56}}{2} - \text{подкорним.}$$

$$0 < \frac{5 + \sqrt{56}}{2} < 7$$

$$\text{и.к. } 5 + \sqrt{56} < 14 \Leftrightarrow \sqrt{56} < 9$$

$$\Leftrightarrow 56 < 81 \quad \textcircled{\checkmark}$$

2) $\sqrt{14 + 5x - x^2} = 4$ возведем обе
части в квадраты

$$14 + 5x - x^2 = 16$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

~~у = x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}~~ $y = x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$ - подкорним.

$$0 < \frac{5 - \sqrt{17}}{2} < 7$$

$$5 - \sqrt{17} > 0, \text{ и.к. } 25 > 17 \quad \textcircled{\checkmark}$$

$$5 - \sqrt{17} < 14, \text{ и.к. } \sqrt{17} > -9 \quad \textcircled{\checkmark}$$

$$y = x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} - \text{подкорним.}$$

$$0 < \frac{5 + \sqrt{17}}{2} < 7 \quad 5 + \sqrt{17} < 14, \text{ и.к. } 17 < 81.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$$

$$x, y \geq 0 \quad y \in [0, 7]$$

$$f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2x}$$

Заметим, что $f(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$, т.к. $f'(x) = 3x^2 + 3 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} =$

$$= 3x^2 + 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} > 0 \text{ при } x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y, \text{ т.к.}$$

$$f(x) \text{ - монотонно возрастает при } x > 0$$

$$y = x$$

~~Возведем обе части в квадрат~~

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{14+5x-x^2} - 7$$

Возведем обе части в квадрат

$$\textcircled{1} \quad (x^3 + 3x + \sqrt{2x} = x^3 + 3x + \sqrt{2x})$$

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 = (2\sqrt{14+5x-x^2} - 7)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\left(\frac{5 + \sqrt{56}}{2}, \frac{5 + \sqrt{56}}{2} \right);$
 $\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right), \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right).$

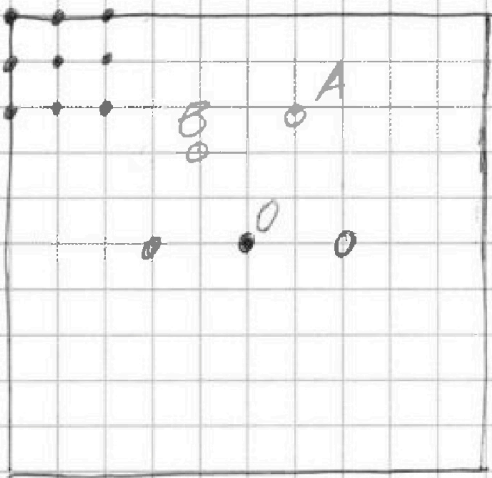


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



10

Ответ: 1830.
Назовем центр квадрата
точкой O . Точки
пересечения углов - это A и B .
10 Сделаем, что радиусы,
в которых A и B
симметричны относи-
тельно центра O при

поворотах на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

(по часовой) дают ровно 2 взаимно
различные раскраски (это раскраски
квадрата до его поворота), и если

A и B не симметричны относительно

O , то при повороте на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

дают ровно 4 взаимно различных
раскраски. \Rightarrow Общее кол-во различных

раскрасок равно: количество взаимно

различных раскрасок, где A и B

симметричны относительно O , деленное

(раскраски, где A и B симметричны относительно O - I тип,
а остальные раскраски - II тип)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

на 2 илюе как во углах ромба разности
раскрасок, где А и В не симметричны
относительно О, ^(здесь это у) укажите на 4.

Заметим, что для каждой точки
квадрата кроме О есть ровно
одна, симметричная ей относительно

О. $\Rightarrow X = \frac{120}{2} = 60$, т.к. каждая
точка раскрашена будет посчитана
дважды.

$$y = \binom{2}{121} - 60 = \frac{121 \cdot 120}{2} - 60 = 121 \cdot 60 - 60 = 120 \cdot 60$$

$$\Rightarrow S = \frac{X}{2} + \frac{y}{4} = \frac{60}{2} + \frac{120 \cdot 60}{4} = 30 + 1800 = \boxed{1830}$$

Итого как во разности раскрасок.

Заметим, что все попарившиеся раскраски
различны, т.к. раскраски I и II типа
различны, ведь в I типе А и В - симметричны
относительно О, а во II - нет, поэтому I и II
типа точки различны, так как не попариваются.
Друга из друга попарной \Rightarrow все раскраски различны.

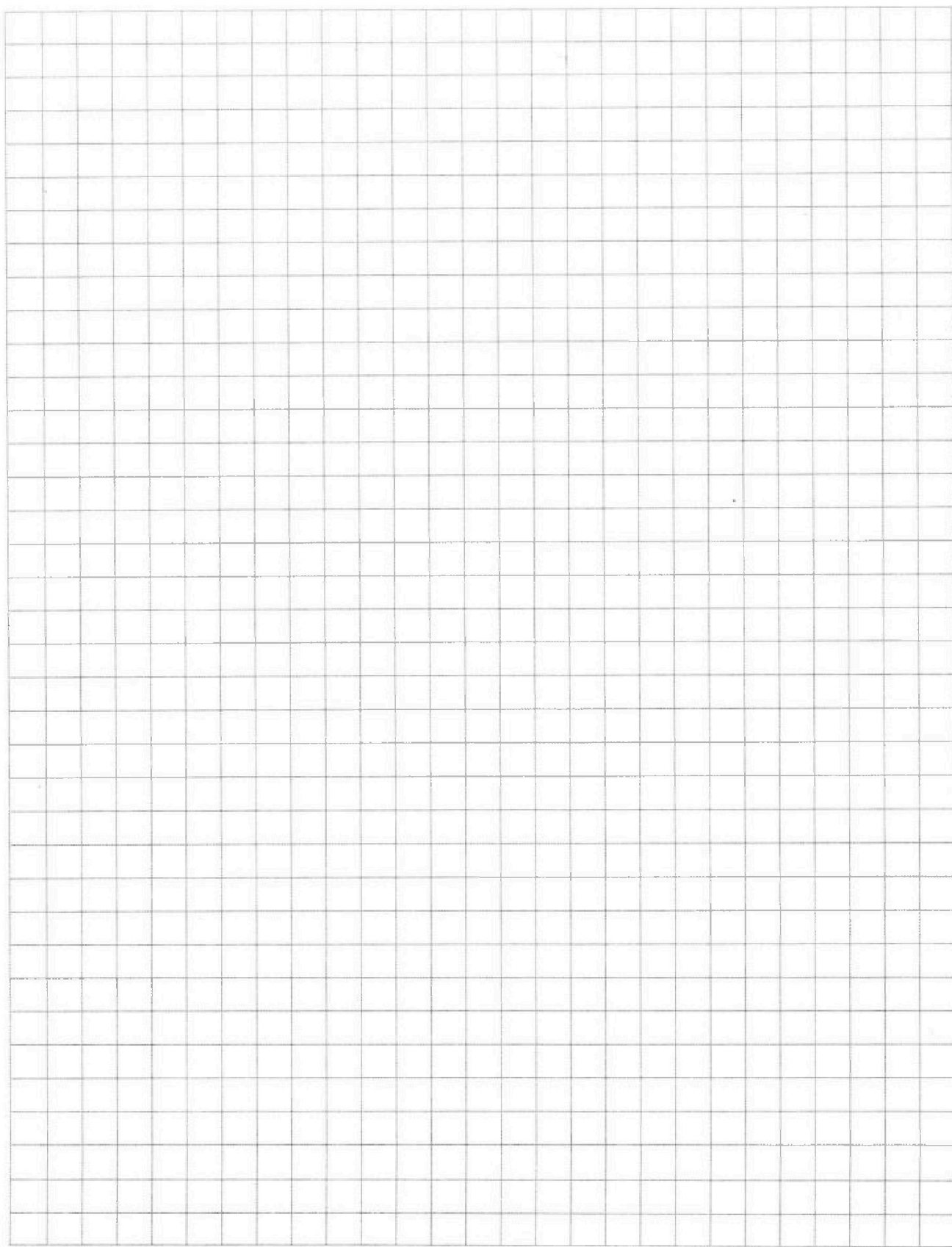


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = g(x)$$

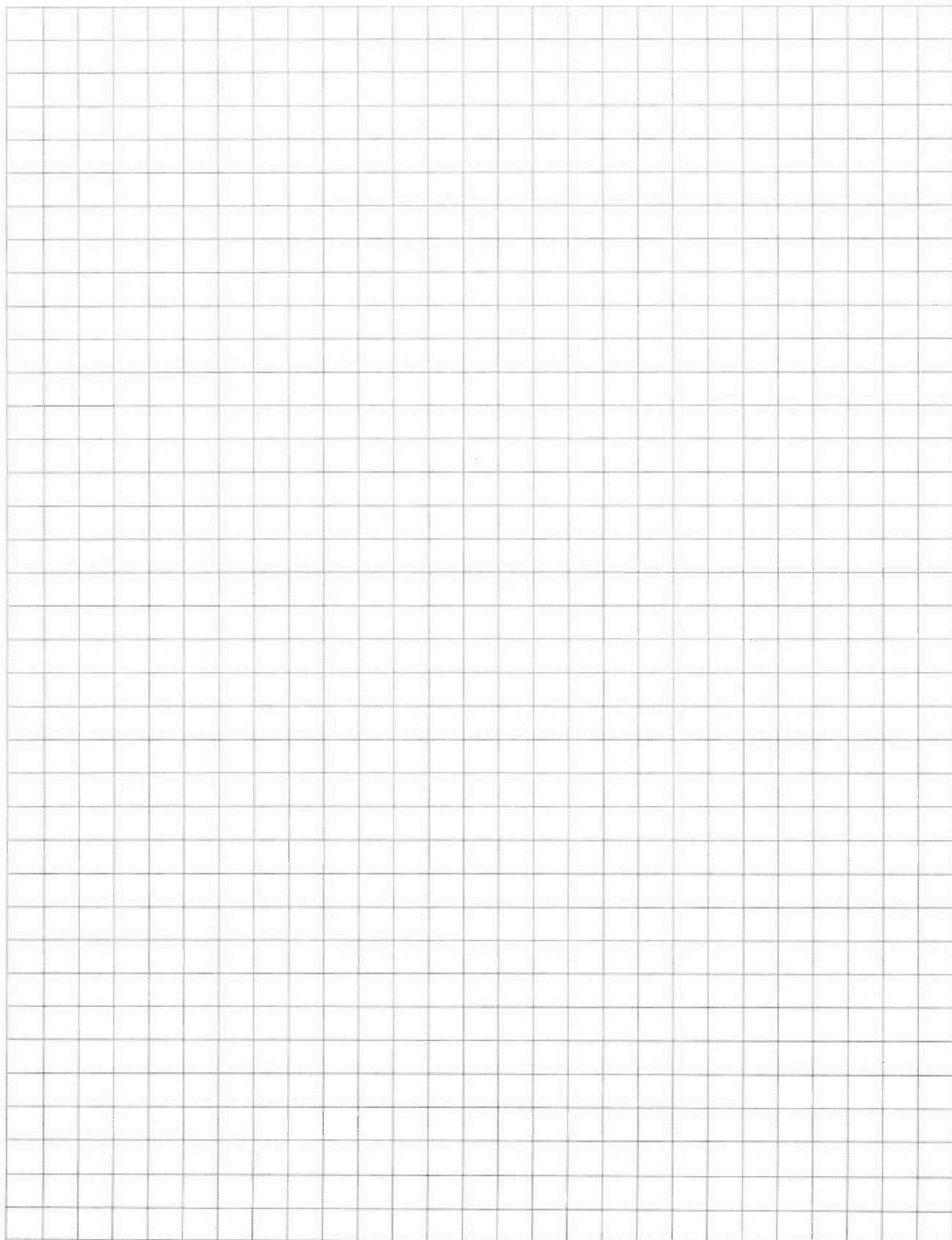


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{4}{z_M} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\angle MZB = \angle AZY = \alpha$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{4}{z_M} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow z_M = 4$$

$\triangle ABX \sim \triangle ZBM$, т.к. $\angle XAB = \angle MZB = \alpha$,
 $\angle ABX$ - общий.

$$\Rightarrow \frac{BZ}{BA} = \frac{z_M}{AX} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{4}{AX}$$

$$\Rightarrow AX = \frac{4 \cdot 12}{4} = \frac{16}{3}$$

По теореме косинусов:

$$CX^2 = 6^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{16}{3} \cdot \cos \alpha$$

$$XB^2 = 12^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} \cdot \cos \alpha$$

AX - биссектриса $\Rightarrow \frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Пусть $CX = x$, $BX = 2x$ ($x > 0$)

$$BC = CX + BX = 3x$$

$$x^2 = 6^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{16}{3} \cos \alpha$$

$$4x^2 = 12^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} \cos \alpha = 12^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4x^2 = 2 \left(6^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - x^2 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 12^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4x^2 = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 2x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 144 - 72 - \left(\frac{16}{3}\right)^2 = 72 - \left(\frac{16}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 72 - \frac{256}{9} = \frac{648 - 256}{9} = \frac{392}{9}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{196}{9} \Rightarrow x = \frac{14}{3} \text{ (и.к. } x > 0)$$

$$BC = 3x = 3 \cdot \frac{14}{3} = \boxed{14}$$

Ответ: 14.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1

 2

 3

 4

 5

 6

 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \underline{x+2} - 2\sqrt{(x+2)(7-x)} + \underline{7-x} =$$

$$= 4(14+5x-x^2) - 28\sqrt{14+5x-x^2} + 49$$

~~####~~ $t = \sqrt{14+5x-x^2} \quad t \geq 0$

$$4t^2 - 26t + 40 = 0$$

$$\Rightarrow 2(2t^2 - 13t + 20) = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 2 \cdot 20}}{2 \cdot 2} = \frac{13 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = \frac{5}{2} \quad \checkmark \quad t_2 = 4 \quad \checkmark$$

$$1) \sqrt{14+5x-x^2} = \frac{5}{2} \quad \text{возведем обе части в квадраты}$$

$$\Rightarrow 14+5x-x^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - \frac{31}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot \frac{31}{4}}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{56}}{2} \quad \text{####}$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{56}}{2} \quad \text{используем корень } (x \geq 0)$$

~~####~~

$$y_1 = x_1 = \frac{5 + \sqrt{56}}{2} \quad \checkmark$$