



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $d$  - разность арифметической прогрессии

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 18 \\ \hline 36 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$(*) \begin{cases} 6x + 18 + 2d = (x^2 - 4x)^2 / 3 \\ 6x + 18 + 6d = -3x^2 \quad (1) \end{cases}$$

$$\frac{-3x^2 - (x^2 - 4x)^2}{3} = 4d$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ 18x + 54 + 6d - 6x - 18 - 6d = 3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ 12x + 36 = 3(x^2 - 4x)^2 + 3x^2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ 4x + 12 = (x^2 - 4x)^2 + x^2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ x^4 - 8x^3 + 16x^2 + x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (x^3 - 6x^2 + 5x + 6) / (x - 2) = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (x^2 - 4x - 3)(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ x \in \{2, 2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7}\} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 6d = -3x^2 - 6x - 18 \Leftrightarrow d = \frac{-x^2 - 2x - 6}{2}$$

$$\Rightarrow \forall x \exists d \Rightarrow$$

Ответ:  $x \in \{2, 2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7}\}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

min  $14x + 7y$  -? N2

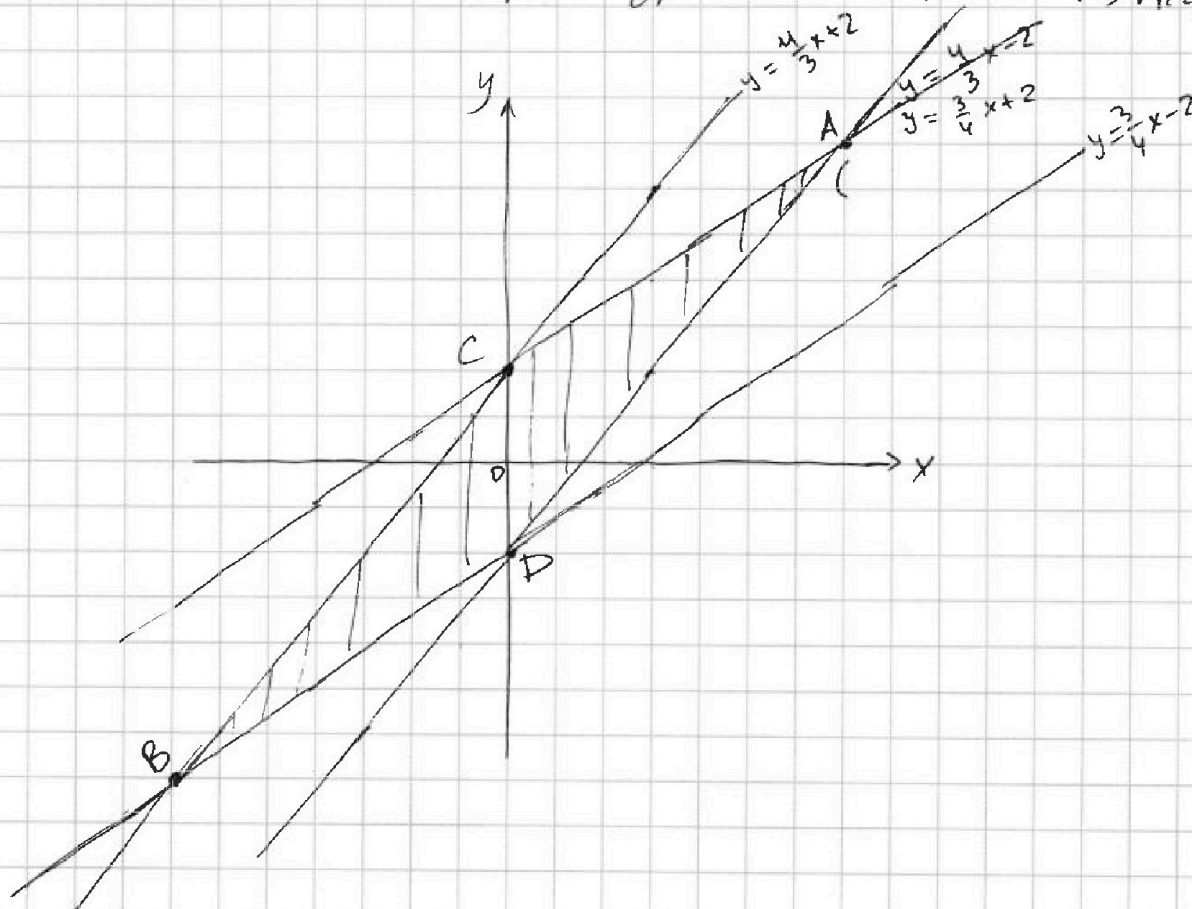
$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 & (1) \\ |3x - 4y| \leq 8 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{4}{3}x - 2 & (1.1) \\ y \leq \frac{4}{3}x + 2 & (1.2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{3}{4}x - 2 & (2.1) \\ y \leq \frac{3}{4}x + 2 & (2.2) \end{cases}$$

пусть  $14x + 7y = a \Leftrightarrow y = -2x + \frac{a}{7}$

Отметим на пл.  $xOy$  реш. ~~ур. (1.1), (1.2), (2.1), (2.2)~~ (1) и (2)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

реш. (1) и (2) явл. ч-к ACBD (вкл. ~~в~~ стороны)  
(мин-вом  $(x, y)$ )

$$l_{1.1}: y = \frac{4}{3}x - 2, l_{1.2}: y = \frac{4}{3}x + 2$$

$$l_{2.1}: y = \frac{3}{4}x - 2, l_{2.2}: y = \frac{3}{4}x + 2$$

$$\{A\} = l_{1.1} \cap l_{2.2}, \{B\} = l_{2.1} \cap l_{1.2}$$

$$\{C\} = l_{1.2} \cap l_{2.2}, \{D\} = l_{1.1} \cap l_{2.1}$$

$$\left. \begin{array}{l} C(0; 2), D(0; -2) \\ A\left(\frac{48}{7}; \frac{50}{7}\right) \\ B\left(-\frac{48}{7}; -\frac{50}{7}\right) \end{array} \right\}$$

для  $(14x + 7y)/\min$  дост. взять точку  $(x_0, y_0)$ ,  
где  $x_0$  - min из всех  $x$  уг. (1) и (2) и  $y_0$  - тоже.  
Такая т.  $\exists$ . Это B.  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \min(14x + 7y) &= 14 \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) + 7 \cdot \left(-\frac{50}{7}\right) = \\ &= -48 \cdot 2 - 50 = -146 \end{aligned}$$

Ответ: -146.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1.6. \quad t = p^2, \quad t + 9 = 13 \quad \rightarrow \quad p^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2$$

$$m - n = 4, \quad t = 4$$

$$mn \underset{> 3}{(t+3)} = 3q^2 \Rightarrow \begin{cases} t+3 = q \Rightarrow q = 7 \\ t+3 = 3q \Rightarrow q = \frac{7}{3} \times \\ t+3 = 3q^2 \times (m \neq n) \\ t+3 = q^2 \Rightarrow q = \sqrt{7} \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow q = 7, \quad t+3 = q, \quad mn = 3q = 21$$

$$\begin{cases} mn = 21 \\ m - n = 4 \end{cases} \xrightarrow{m, n > 0} (m, n) = (7, 3)$$

$$\text{Проверка: } A = (7-3)(7-3+9) = 4 \cdot 13 = 2 \cdot 2 \cdot 13 \quad \text{ok}$$

$$B = 7 \cdot 3 \cdot (7-3+3) = 7 \cdot 7 \cdot 3 \quad \text{ok}$$

$$1.5. \quad t = q^2, \quad t + 9 = 3 \quad \Rightarrow \quad q^2 + 9 = 3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -6 \quad \times$$

$$1.6. \quad t = 3q^2, \quad t + 9 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3q^2 + 9 = 1 \quad \times$$

Итак, ! подх. пара  $(m, n) = (7, 3)$

Прим.: " $\times$ " значит "противоречие"

Ответ:  $(7, 3)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(m, n) - ?$

$\mathbb{N}^3$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n; B = m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$\{A, B\} = \{13p^2, 3q^2\}; p, q \in \mathbb{P}$$

т.е.  ~~$A = 13p^2, B = 3q^2$~~   $A = (m-n)(m-n+9)$

$$B = mn(m-n+3)$$

т.е.  $A = 13p^2, B = 3q^2: (m-n)(m-n+9) = 13 \cdot p \cdot p \quad (1)$   
 $m \cdot n \cdot (m-n+3) = 3 \cdot q \cdot q \quad (2)$

~~$A, B > 0 \Rightarrow m > n \Rightarrow m-n+3 > 3.$~~

~~$m-n+3 \in \mathbb{N}, 3 \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \Rightarrow m-n+3 = 3q$~~

~~$(m-n+3) \in \{q, q^2, 3q, 3q^2\}$~~   
~~1.1. 1.2. 1.3. 1.4.~~

~~1.1.  $m-n+3 = q \Rightarrow m-n+9 = q+6$~~

~~1.1.1  $m = q, n = 3 \Rightarrow m = q - 3 + n$~~

~~1.1.  $m-n$  - простое или 1, т.к. (1)~~

~~$A, B > 0 \Rightarrow m > n \Rightarrow m-n+3 > 3$~~

~~$\Rightarrow m-n+3$  - простое, т.к. (2)~~

~~но  $m-n \in \mathbb{P} \cup \{1\}$ ,  $m-n+3 \in \mathbb{P}$ , только если  $m-n = 2$ .~~

~~$\Rightarrow p = 2$  (т.к. (1))  $\Rightarrow$  ~~т.к.~~~~

~~(2)  $\Rightarrow mn \cdot 5 = 3q^2$  ( $\Rightarrow q = 5$ )  $\Rightarrow mn = 15$~~

~~$\begin{cases} m-n=2 \\ mn=15 \end{cases} \Rightarrow (m, n) = (5, 3)$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.е. для сл. 1 обяз.  $(m, n) = (5, 3)$

Проверка:  $(m-n)(m-n+9) = 13p^2$

$mn(m-n+3) = 3q^2$

~~$p: 2 \cdot 11 = 13p^2 (p \in \mathbb{P})$~~

1.2.  $m, n$  - сосл.  $m-n = p^2$ , т.к. иначе только больше  $m-n+9$ .

Обозн.  $t = m-n$ .

1сл.  $t(t+9) = 13 \cdot p \cdot p$ ,  $mn(t+3) = 3q^2$

1.1.  $t = 13$ ,  $t+9 = p^2 \Rightarrow p^2 = 22$

~~$\forall m, n \in \mathbb{N} (2mn \rightarrow m-n, \text{ т.е. } mn > t)$~~

~~$\Rightarrow$  1.2.  $t = p$ ,  $t+9 = 13p \Rightarrow 12p = 9$~~

1.3.  $t = 13p$ ,  $t+9 = p \Rightarrow 12p = -9$

1.4.  $t = 13p^2$ ,  $t+9 = 1$

1.5.  $t = 1$ ,  $t+9 = 10 = 5 \cdot 2$

2сл.  $t(t+9) = 3q^2$ ,  $mn(t+3) = 13p^2$

1.1.  $t = 3$ ,  $t+9 = q^2 \Rightarrow q^2 = 12$

1.2.  $t = 1$ ,  $t+9 = 10 = 5 \cdot 2 = 3q^2$

1.3.  $t = q$ ,  $t+9 = 3q \Rightarrow q = 2q$

1.4.  $t = 3q$ ,  $t+9 = q \Rightarrow 2q = -9$

~~т.е.~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = 36 + 144 - 144 \cos 2\alpha = 36 + 144 + 144 \cdot \frac{1}{9} =$$
$$= 180 + \frac{144}{9} = 180 + 16 = 196$$

$$\Rightarrow BC = 14$$

Ответ: 14.





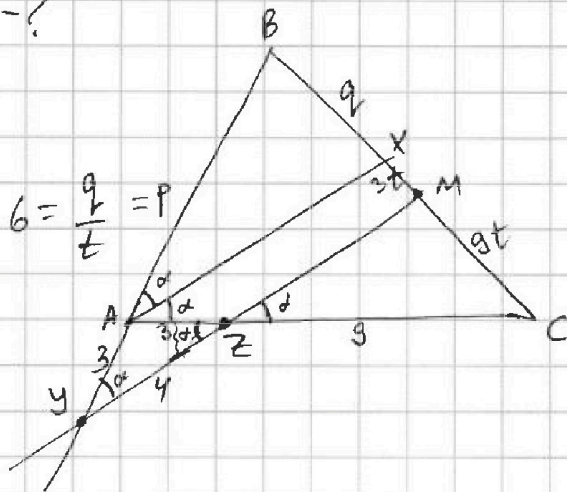
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

BC-?



нч

$$BM = MC$$

$$\begin{matrix} AC = 12 \\ AZ = 3 \end{matrix} \Rightarrow ZC = 9$$

$$YZ = 4$$

$$\begin{aligned} (AX) \parallel (ZM) &\Rightarrow \\ \angle XAC &= \angle MZC \\ &'' \\ \angle AZY & \end{aligned}$$

нчтб  $XM = 3t$ .  $(AX) \parallel (ZM) \Rightarrow \frac{XM}{MC} = \frac{AZ}{ZC} = \frac{3}{9} \Rightarrow MC = 9t$

нчстб  $AB = p$ ,  $BX = q$ .

$$[AX] - \text{сущ. в } \triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XB} \Rightarrow \frac{12}{p} = \frac{12t}{q} \Rightarrow$$

$$p = \frac{12q}{12t} = \frac{q}{t}$$

$$(AX) \parallel (YM) \Rightarrow \frac{AB}{AY} = \frac{BX}{XM} \Rightarrow \frac{q/t}{AY} = \frac{q}{3t} \Rightarrow$$

$$AY = \frac{3t \cdot \frac{q}{t}}{\frac{q}{t}} = 3 \Rightarrow \triangle YAZ - \text{р/ф.}$$

нчстб  $\angle BAX = \alpha$ .

Т. син. гмв  $\triangle YAZ$ :  $\frac{3}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin 2\alpha}$

$$BM = MC \Rightarrow q + 3t = 9t \Rightarrow q = 6t. \Rightarrow p = \frac{q}{t} = 6$$

Т. кос. гмв  $\triangle YAZ$ :  $4^2 = 3^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos 2\alpha \Rightarrow$

$$16 = 18 + 18 \cos 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

Т. кос. гмв  $\triangle BAC$ :  $BC^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos 2\alpha$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2} & (1) \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x+y} & (2) \end{cases}$$

заметьте, что  $x=y$  ур. (2)

решим (1) для  $y=x$ :

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \quad (3)$$

~~з.п.  $a = x+6, b = 5-x$~~

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 5 = 2\sqrt{ab} \quad \leftarrow 5 \rightarrow$$

$$a^2 - 2\sqrt{ab} + b^2 + 25 = 4ab - 20\sqrt{ab} + 25$$

~~$a, b \geq 0$~~

одр.  $\therefore x \geq -6, x \leq 5, x \in [-6; 5]$

$30-x-x^2$  - пар. ветвь вниз.  $x_p = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

заметьте, что  $f(x) = \sqrt{x+6} \nearrow$  на  $[-6; 5]$

$g(x) = -\sqrt{5-x} \nearrow$  на  $[-6; 5]$

$5 = \text{const}$

$h(x) = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \nearrow$  на  $[-6; -\frac{1}{2}]$

$\searrow$  на  $[-\frac{1}{2}; 5]$ .

т.е. на  $[-\frac{1}{2}; 5]$  не более 1 рещ.

з.п.  ~~$a = x+6, b = 5-x$~~  т.к. левая часть  $\nearrow$ , правая  $\searrow$ .

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 5 = 2\sqrt{ab}$$

$$a^2 + b^2 - 4ab - 25 = -48\sqrt{ab}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + g\left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = \sqrt{5\frac{1}{2}} - \sqrt{5\frac{1}{2}} + 5 = 5$$

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\left(5\frac{1}{2}\right)\left(5\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2} \cdot 2 = \frac{11}{2} \cdot 2 = 11$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + g\left(-\frac{1}{2}\right) + 5 < h\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(5) + g(5) + 5 = \sqrt{11} + \sqrt{0} + 5 = \sqrt{11} + 5$$

$$h(5) = 2\sqrt{11 \cdot 0} = 0$$

$$f(5) + g(5) + 5 > h(5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{на } \left[-\frac{1}{2}; 5\right] \exists! x, \text{ yg. (3).}$$

$$f(x) + g(x) + 5 = S(x)$$

$$S(-6) = 0 - \sqrt{11} + 5 = 5 - \sqrt{11} > 0 = h(-6)$$

$$h(-6) = 0$$

~~$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{2\sqrt{11}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{2\sqrt{11}}$$~~

~~$$S(x) = \sqrt{10} - 1 + 6$$~~  
~~$$h(x) = 2\sqrt{10}$$~~



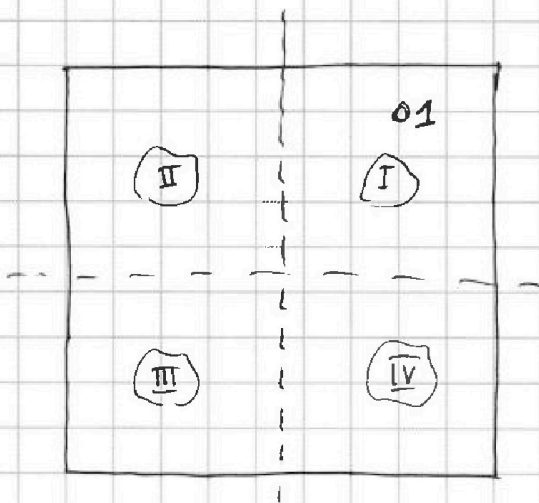
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6



всего 100 узлов.

~~$$\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$~~  
~~столько вар-в разместить 2 узла при фикс. полож. доски.~~  
~~перекр.~~

разд. кв. на 4 области, в каждой по 25 узлов (см. рис.)

Сначала посчитаем, как будто 2 разных узла отлич. гр. от гр. (узел 1 и узел 2).  
 Обл. I выбираем так, что в ней узел 1.  
 Ост. области нумеруем пр. ч/с.

вар-в для 1-го узла: 25; для 2-го: 99  
 Итого  $25 \cdot 99$  вар-в разместить узлы 1 и 2.  
~~с учетом поворота, т.к. никакое разм. не полук.~~  
 Из гр. поворотом, ибо уже зафикс. обл. I, и при приведении раскр. к тому, что узел 1 в той же области, раскр. полук. разные

1) Посчитаем кол-во вар-в, что 2 б. узла в ~~одной~~ обл. Это кол-во равно кол-ву выбрать 2-места из 25-ти =  $\frac{25 \cdot 24}{2} = 25 \cdot 12$ , т.к.

д.о.о. выбираем в I обл. 2 места, поворотом можно получить любые 2 места в II, III или IV обл.

И любые так посчитанные раскр. разные, т.к. они разные при приведении к тому, что



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если повернуть их так, чтобы оба д. узла были справа сверху (т.к. ~~25.12~~ так посчитано)

2) пост. кол-во вар-в выбрать 2 места для дельных узлов среди сосед. областей (д.о.о. I и II, т.к. поворотом получим левые сосед. области, и при этом все раскр. равные, т.к. они все их посчитаем с учетом, что в фикс. сосед. обл. они разные)

$$\text{Итак, } \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot \frac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 \text{ вар-в.}$$

3) пост. кол-во вар-в выбер. 2 узла для обл. раск. наискосок. (Посчитаем, аналогично п. 1) и п. 2), кол-во взять 2 места из I и III)

$$\frac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 \text{ вар-в}$$

$$\begin{aligned} \text{Всего } 25 \cdot 12 &= 25 \cdot 49 + 25 \cdot 49 = \\ &= 25(12 + 49 + 49) = 2750 \end{aligned}$$

Ответ: 2750.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = 26 \Rightarrow \angle B = 13 \Rightarrow MS = \frac{1}{2} \angle B = \frac{13}{2} \text{ (т.к. } [MS] \text{ - ср. линия } \triangle LBC)$$

$$\text{пусть } BM = MC = y, \quad HN = NC = x.$$

$$LR = \frac{1}{2} BM = \frac{y}{2}, \text{ т.к. } [LR] \text{ - ср. лин. } \triangle ABM.$$

$$AN = AN - x = 20 - x$$

$$BH^2 = 26^2 - (20-x)^2, \quad BH^2 = (2y)^2 - (2x)^2$$

$$\Rightarrow 26^2 - (20-x)^2 = 4y^2 - 4x^2 \quad (1)$$

продлим ~~ML~~ CL за L:  $C' \in [CL], CL = LC'$ .

$$2AC^2 + 2BC^2 = AB^2 + CC'^2 \Rightarrow 2(20+x)^2$$

т.к.  $M' \in \Gamma_{AM} \setminus [AM]$  и  $AM = MM'$

$$AM'^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2 \Rightarrow (2AM)^2 + (2y)^2 = 2(26)^2 + 2 \cdot (20+x)^2$$

$$\text{но } AM^2 = AN^2 + NM^2 = AN^2 + \left(\frac{BH}{2}\right)^2$$

$$[CL] \text{ - мед. и бисс.} \Rightarrow AC = CB \Rightarrow 20+x = 2y \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow 26^2 - 400 + 40x - x^2 = 4y^2 - 4x^2 \Rightarrow$$

$$3x^2 + 26^2 - 400 + 40x = 4y^2 \Rightarrow$$

$$(2) \Rightarrow 4y^2 = 400 + 40x + x^2 \Rightarrow$$

$$3x^2 + 26^2 + 400 + 40x = 400 + 40x + x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 = 800 - 26^2 = 800 - 676 = 124 \Rightarrow x^2 = 62 \quad (x \geq 0)$$

$$x = \sqrt{62}, \quad y = \frac{20+x}{2} = 10 + \frac{\sqrt{62}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC = 20 + x = 20 + \sqrt{62}$$

$$~~AB~~ BC = 2y = 20 + \sqrt{62}$$

$$\text{Ответ: } AC = 20 + \sqrt{62}, BC = 20 + \sqrt{62}.$$

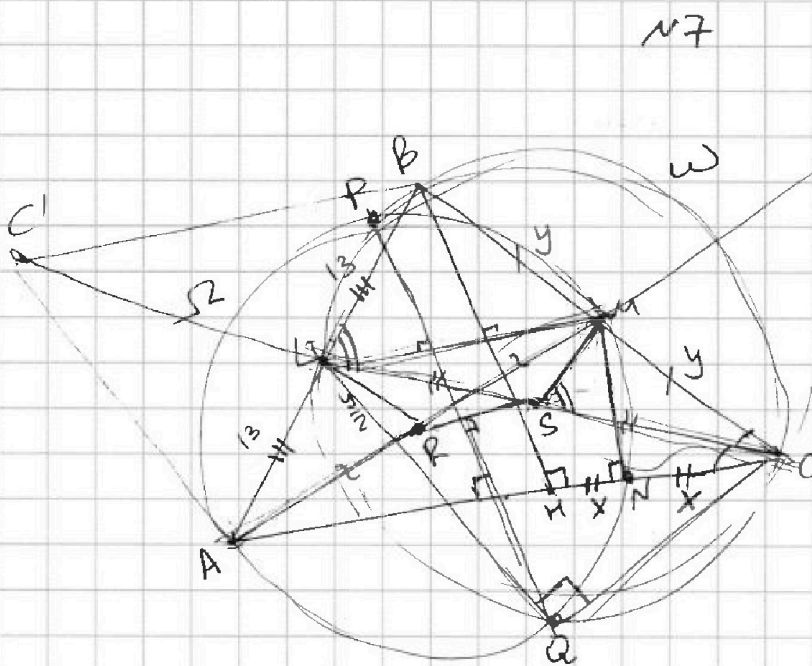


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N7

AC - ? BC - ?  
 $AB = 26, AN = 20$   
 BH - выс.  $\triangle ABC$

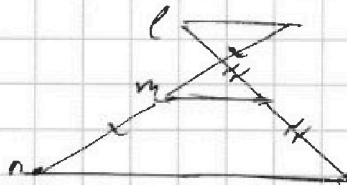
$(PQ)$  - рад. ось  $\Sigma$  и  $\omega$ ,  $(PQ) \perp (RS)$ ,  $\exists e$   
 $P$  - сер.  $[AM]$ ,  $S$  - сер.  $[LC]$ .

но  $(PQ) \parallel (BH) \perp (AC) \Rightarrow (RS) \parallel (AC)$

$N \in \omega$ ,  $[AM]$  - diam.  $\omega \Rightarrow \angle ANM = 90^\circ \Rightarrow (NM) \parallel (BH) \Rightarrow$

$HN : NC = BM : MC = 1 : 1$

$(LM) \parallel (AC)$ , т.к.  $AR = RM, LS = SC, (RS) \parallel (AC)$ :



(такое) получ. при движении стороны  $\triangle$  вдоль ср. линии и  $LM \parallel AC$  (по т. Фалеса)

$(LM) \parallel (AC) \Rightarrow \frac{BL}{LA} = \frac{BM}{MC} = 1$

$LM$  - ср. линия  $\triangle ABC \Rightarrow LM = \frac{1}{2} AC$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА \_\_\_\_\_ ИЗ \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. It includes several equations, diagrams, and calculations.

**Equations:**

- $\frac{4}{3}x = \frac{3}{4}x + 2$
- $16x = 9x + 16 \cdot 3$
- $7x = 48$
- $\frac{4}{3} \cdot \frac{48}{7} = 2$
- $\frac{16 \cdot 4}{7} - 2$
- $\frac{64}{7} - 2$
- $\frac{50}{7}$
- $\frac{2 \cdot 16}{64} \cdot 4$
- $\frac{16}{9} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{48}$
- $\frac{2 \cdot 0.5 \pm 2}{18}$
- $\frac{99}{55} \cdot \frac{55}{55} \cdot x$
- $\frac{14 \cdot 14}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{96}{5}$
- $(x+3)(x-5) = 5x+30-6x-15 = -x+15$
- $(x+6)(5-x) = 5x+30-6x-x^2 = -x^2-1x+30$

**Diagrams:**

- A quadrilateral with vertices A, B, C, D and diagonal AC. Points M and N are on AC. Side lengths are given as 3, 2, 4, 6.
- A triangle with side lengths 2, 3, 4.
- A rectangle containing four circles labeled I, II, III, IV.

**Formulas and Calculations:**

- $m(m-n) - n(m+n)$
- $m^2 - mn - mn + n^2 = m^2 - 2mn + n^2 = (m-n)^2$
- $c/2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$
- $c^2 \cdot d^2 = 12$
- $2 \cdot 4 = 8$
- $2 \cdot 6 = 12$
- $14 \cdot 14 = 196$
- $196 \cdot 6 = 1176$
- $14950$
- $14950 \cdot 4 = 59800$
- $59800 \cdot 4 = 239200$
- $239200 \cdot 4 = 956800$
- $956800 \cdot 4 = 3827200$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{54}{18} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{17-4-12}{10}$$

$$16 - 8 \cdot 8 + 17 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 12$$

$$(16 - 8 \cdot 8 + 17 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 12) - 8 - 12$$

$$\frac{16 - 8 \cdot 8 + 17 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 12}{20}$$

$$y \geq \frac{3x-8}{4}$$

$$y \geq \frac{3x+8}{4}$$

$$2 \cdot (8 + 6 \cdot 4 + 10 + 6) - 24$$

$$m^2 - 2m + 2 = 9$$

$$m^2 - 4m - 21 = 0$$

$$m = 7$$

$$m = -3$$

$$4 \pm \sqrt{16+12}$$

$$2 \pm \sqrt{4+3}$$

$$2 \pm \sqrt{4+3}$$

$$3y \leq \frac{4x-6}{3} = \frac{4}{3}x - 2$$

$$\frac{4x+6}{3} \geq 3y$$

$$\frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}y \leq \frac{4}{3}x + 2$$

$$\frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}x + 2$$

$$4(4-3 \cdot 3) = 12$$

$$x = 4$$

$$m^2 - 2m + 2 = 9$$

$$m^2 - 4m - 21 = 0$$

$$m = 7$$

$$m = -3$$

$$4 \pm \sqrt{16+12}$$

$$2 \pm \sqrt{4+3}$$

$$3y \leq \frac{4x-6}{3} = \frac{4}{3}x - 2$$

$$\frac{4x+6}{3} \geq 3y$$

$$\frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}y \leq \frac{4}{3}x + 2$$

$$\frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}x + 2$$

$$4(4-3 \cdot 3) = 12$$

$$x = 4$$

$$m^2 - 2m + 2 = 9$$

$$m^2 - 4m - 21 = 0$$

$$m = 7$$

$$m = -3$$

$$4 \pm \sqrt{16+12}$$

$$2 \pm \sqrt{4+3}$$

$$3y \leq \frac{4x-6}{3} = \frac{4}{3}x - 2$$

$$\frac{4x+6}{3} \geq 3y$$

$$\frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}y \leq \frac{4}{3}x + 2$$

$$\frac{4}{3}x - 2 = \frac{3}{4}x + 2$$

$$4(4-3 \cdot 3) = 12$$

$$x = 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

