



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
\ ИЗ \

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть разность арифм. прогр. равна d , тогда

$$d = \frac{a_6 - a_4}{2}, \text{ а также } d = \frac{a_{10} - a_6}{4}, \text{ где } a_i - i\text{-ый}$$

член арифм. прогр., тогда:

$$\frac{a_6 - a_4}{2} = \frac{a_{10} - a_6}{4}, \quad 2(a_6 - a_4) = a_{10} - a_6, \text{ подставим:}$$

$$2((8-9n) - (6-9n)) = 9n^2 - (n^2 - 2n)^2 = n^2(9 - (n-2)^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(n^2 - 4n^3 + 4n^2 + 9n - 6) = -n^4 + 4n^3 + 5n^2$$

$$2n^4 - 8n^3 + 8n^2 + 18n - 12 = -n^4 + 4n^3 + 5n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n^4 - 12n^3 + 3n^2 + 18n - 12 = 0 \Leftrightarrow n^4 - 4n^3 + n^2 + 6n - 4 = 0$$

замечим, что $n=1$ подходит, разложим:

$$(n-1)(n^3 - 3n^2 - 2n + 4) = 0, \text{ замечим, что правая}$$

часть также делится на $(n-1)$, получаем:

$$(n-1)^2(n^2 - 2n - 4) = 0, \text{ решим } n^2 - 2n - 4, D = 4 + 16 = 20$$

$$n = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}, \Rightarrow \text{подходят также } n;$$

$$n=1, n=1+\sqrt{5}, n=1-\sqrt{5}.$$

Ответы: $1, 1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



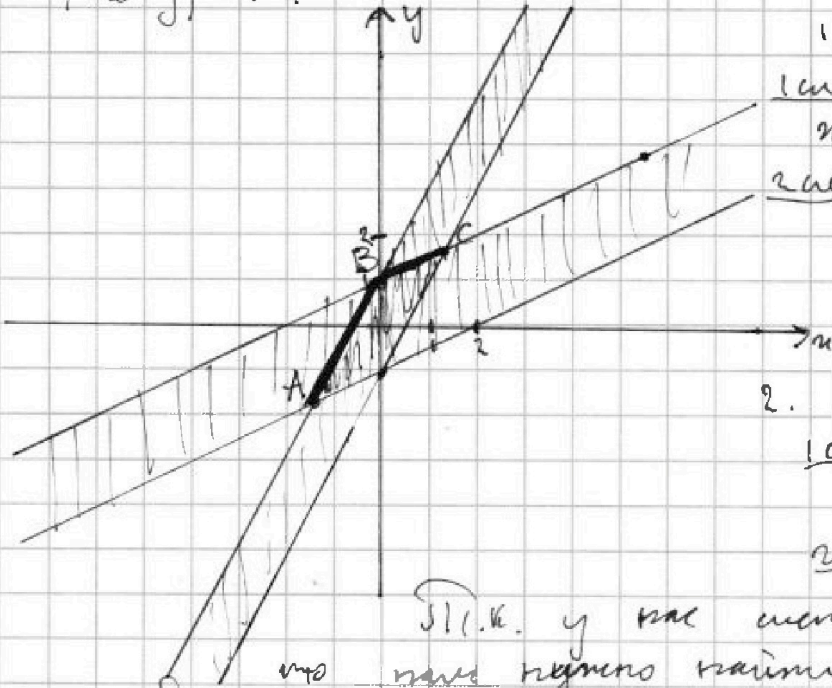
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дана область построения графиков $|x - 2y| \leq 2$ и

$|2x - y| \leq 1$:



1. $|x - 2y| \leq 2$
 1сл. $x - 2y \geq 0, y \leq \frac{x}{2}$
 $x - 2y \leq 2, y \geq \frac{x}{2} - 1$
 2сл. $x - 2y \leq 0, y \geq \frac{x}{2}$
 $-x + 2y \leq 2, y \leq \frac{x}{2} + 1$

2. $|2x - y| \leq 1$
 1сл. $2x - y \geq 0, y \leq 2x$
 $2x - y \leq 1, y \geq 2x - 1$
 2сл. $2x - y \leq 0, y \geq 2x$
 $-2x + y \geq 1, y \leq 2x + 1$

Пл.к. y как параметр

что нам нужно найти пересек. 2-х областей - это значит, пер-е. Заметим, что $\forall x \in$ нашей области мы можем выбрать единичный самый большой $y \Rightarrow$ нам нужно пойти только по y по широким отрезкам $[AB]$ и $[BC]$, также очевидно, что на отрезке $[BC]$ самым большим значением $3y + 5x$ будет обладать точка C , т.к. C увеличивает x и увеличивается и y , аналогично и с y отрезком $[AB] \Rightarrow$ на отрезках $[AB]$ и $[BC]$ самым большим значением $3y + 5x$ будет обладать точка C, \Rightarrow и во всей области (убвн. методе пер-е.)

Найдем коорд. т.к. C :
$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} + 1 = 2x - 1$$

 $x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}$, откуда $3y + 5x = 5 + 8 = 13$

Ответ: 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n =$

$$(m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

1 шаг. $A = 11p^2, B = 75q^2,$

$$(m+2n)(m+2n-7) = 11p^2, m+2n = k \in \mathbb{N},$$

$$k(k-7) = 11p^2, k > k-7, \Rightarrow k \text{ может быть}$$

равно $11p^2, 11p, p^2, 11, \underline{1.1} k=11p^2, k-7=11p^2-7=1 \neq$

1.2 $k=11p, k-7=11p-7=p, \neq, \underline{1.3} k=p^2, k-7=p^2-7=11, \neq$

1.4 $k=11, k-7=4=p^2, p=2, \Rightarrow k=11 \text{ годн. } m+2n=11 \checkmark$

отсюда пары $(1, 5), (3, 4), (5, 3), (7, 2), (9, 1)$ - годн.

но $mn(m+2n+9) = 75q^2, 5(1+10+9) = 100 \neq, 12(3+8+9) = 240 \neq,$
 $15 \cdot 20 = 300 = 2^2 \cdot 75 \checkmark, 14 \cdot 20 = 280 \neq, 9 \cdot 20 = 180 \neq$
 годн. только $(5, 3)$

2 шаг. $A = 75q^2, B = 11p^2, mn(m+2n+9) = 11p^2$

$m+2n+9 > 11, m+2n+9$ может равняться $11p^2, 11p, p^2, p,$

2.1 $m+2n+9 = 11p^2, m=n=1, m+2n+9=12 \neq, \underline{2.2} m+2n+9 = 11p,$

либо $m, \text{ либо } n = p, \text{ либо } m, \text{ либо } n = 1, \underline{2.2.1} m+2n+9 = p+n = 11p \neq$

2.2.2 $m+2n+9 = 2p+10 = 11p \neq, \underline{2.3} m+2n+9 = p^2, \underline{2.3.1} m=1, n=11$

$1+22+9 = 32 = p^2 \neq, \underline{2.3.2} m=n, n=1, 11+2+9 = 22 = p^2 \neq$

2.4 $m+2n+9 = p, \Rightarrow$ либо $m, \text{ либо } n$ больше или равно $p.$

т.к. $mn = 11p$ но тогда $m+2n+9 > p \neq$ противоречие

\Rightarrow к 2 шагу $B = 11p^2$ - решений нет.

\Rightarrow Ответ: $(5, 3)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

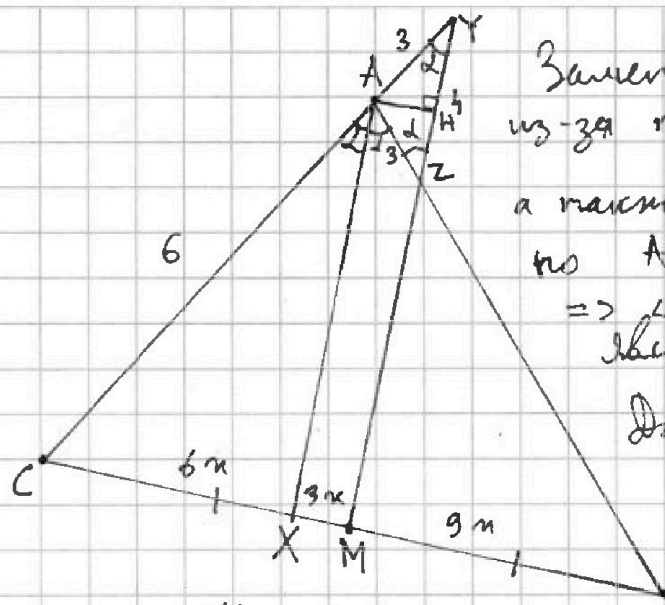


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $\angle XAB = \angle AZY$
из-за пар-ти прямых (AX) и (ZM) ,
а также $\angle CAX = \angle CYM$ из $(AX) \parallel (ZM)$,
но AX - бис-са $\Rightarrow \angle CAX = \angle XAB$
 $\Rightarrow \angle AZY = \angle CYM \Rightarrow \triangle AYZ$
является равнобедр. $\Rightarrow AY = AZ = 3$

Далее из т. Вареса следует,
что $\frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} = \frac{6}{3} \Rightarrow$
 $CX = 6n, XM = 3n,$

но $CM = MB \Rightarrow MB = CX + XM = 9n$, то т. о бис-се

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CX}{XM} = \frac{6n}{12n} = \frac{1}{2}, \Rightarrow AB = 2AC = 12.$$

~~Шенер по т. косинусов не требуется~~

В $\triangle AZY$ пров. и выкону (бис, мед.) AH ,
и найдем $\cos \alpha$, $\cos \alpha = \frac{XH}{AY} = \frac{2}{3}$. отсюда найдем

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}, \quad (\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9})$$

Шенер по т. кос. найдем BC : $BC^2 = 144 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot -\frac{1}{9} =$
 $144 + 36 + \frac{2 \cdot 12 \cdot 6}{9} = 180 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 196$, отсюда $BC = 14 = \sqrt{196}$

Ответ: $BC = 14$



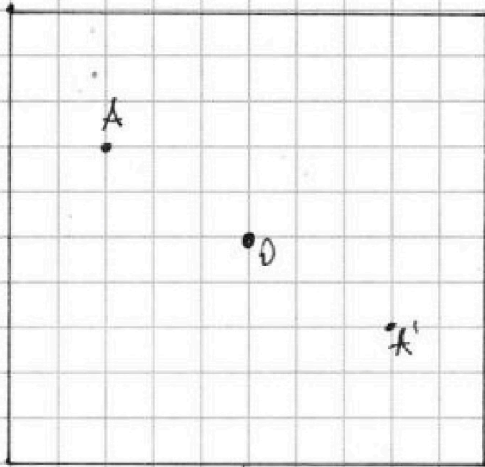
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что ~~все~~ всего

у нас 121 узел (11^2),

и у каждого узла, кроме центрального (точка O),

есть противоположный ему узел, например для узла

A противоположный ему

узел A', такой, что $A' = S_O(A)$ (центр. симм. фрм. O)

Заметим, что сама пара из A и A', где

A и A' противоположны (пара пар - какие-то

не противополож. узла), но у нас есть ч-вар-та

"навернуть нашу пару" так, что все пар-ты будут

отличаться, или же узлы противополож., то

только 2 вар-та, всего пар узлов: $C_{121}^2 = \frac{121 \cdot 120}{2} =$

$= 121 \cdot 60$, а также есть $\frac{121-1}{2} = 60$ противополож. пар

\Rightarrow непротивополож. пар у нас $121 \cdot 60 - 60 = 120 \cdot 60$

тогда кол-во вариантов k будет: $K = \frac{120 \cdot 60}{4} + \frac{60}{2} =$

$= 30 \cdot 60 + 30 = 30 \cdot 61 = 1830$ вариантов

Ответ: 1830 вариантов

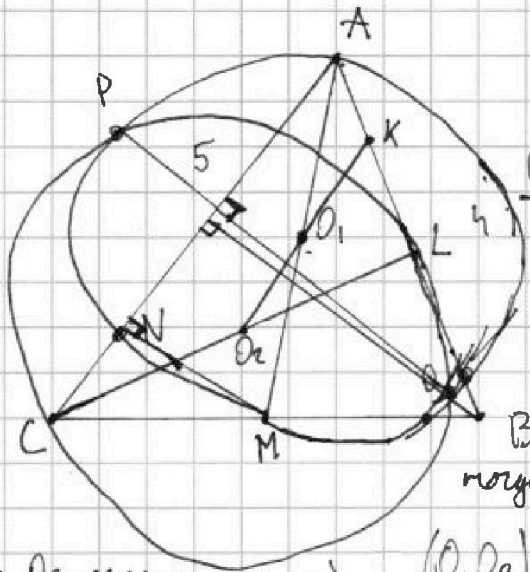


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



(PQ) перп. высоте из B \Rightarrow (PQ) \perp AC, м.к.

Ω высота из B \perp (AC)

Пусть O_1 - сеп. [AM]

O_2 - сеп. [CL],

тогда O_1 - центр Ω , O_2 - м.к.

м.к. O_2 - середина ω $(O_1 O_2) \perp (PQ) \Rightarrow (O_1 O_2) \parallel (AC)$.

$\Rightarrow (O_1 O_2) \cap (AB) = K$, K - сеп. [AL], м.к. [OK] сеп. линия

$\triangle KCL$, но $(ML) \parallel (OK)$, как сеп. лин в $\triangle KAL$, \Rightarrow

$(ML) \parallel (AC)$, но $CM = MB \Rightarrow ML$ - сеп. линия $\triangle ABC$

$\Rightarrow AL = LB$, $\Rightarrow CL$ - медиана $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ - равнобед.

$\Rightarrow AC = BC$, заметим, что $\angle MNA = 90$, м.к. $N \in \Omega$

но AM - диаметр, пусть $\angle CAB = 2\alpha$, тогда $\cos 2\alpha = \frac{0.5AB}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$

$\angle ACB = 180 - 2\alpha$, $\cos \angle ACB = -\cos 2\alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{21}{25} - \frac{16}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$, поэтому $\cos \angle ACB = \frac{CN}{CM}$

пусть $CM = a$, тогда $CB = 2a = AC$, тогда $CN = 2a - 5$,

тогда $\cos \angle ACB = \frac{2a - 5}{a} = \frac{17}{25}$, $50a - 125 = 17a$, $33a = 125$,

$a = \frac{125}{33}$, $\Rightarrow AC = BC = \frac{250}{33}$, тогда $AL = BL = \frac{1}{2} = 2$,

пусть $\angle ACL = \alpha$, $CN = a$, тогда $CM = \frac{a+5}{2}$,

м.к. $CM = MB = AC$ тогда $\cos 2\alpha = \cos \angle NCM = \frac{CN}{CM} = \frac{2a}{a+5}$

$\sin \alpha = \frac{AL}{AC} = \frac{2}{\frac{2a+5}{2}} = \frac{4}{2a+5}$, $\sin^2 \alpha = \frac{16}{(2a+5)^2}$, $\cos 2\alpha = 1 - \frac{16}{(2a+5)^2}$,

$\cos 2\alpha = 1 - \frac{16}{(2a+5)^2} = \frac{2a}{a+5}$, умножим на $(a+5)^2$:

$a^2 + 10a + 25 - 16 = 2a^2 + 10a$, $a^2 = 17$, отсюда $a = \sqrt{17}$

$\Rightarrow AC = BC = 5 + \sqrt{17}$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n =$

$$= (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

1 случай: $A = 11p^2$, $B = 75q^2$, тогда

$$A = (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2, \quad m+2n = k \in \mathbb{N},$$

$$A = k(k-7) = 11p^2, \quad \text{или } k = 11p, \quad k-7 = p, \text{ тогда,}$$

$$k = p+7 = 11p, \quad 10p = 7 \neq \emptyset, \quad \text{или } k = 11p^2, \quad k-7 = 1, \quad k = 8,$$

$$8 = 11p^2, \quad \emptyset \Rightarrow \text{в 1-м случае решений нет.}$$

2 случай: $A = 75q^2$, $B = 11p^2$

Рассмотрим $B = mn(m+2n+9) = 11p^2$, заметим, что

$$m+2n+9 \geq 11, \quad \text{или } m+2n+9 = 11, \text{ тогда } m=n=1,$$

$$1 \cdot 1 \cdot 11 = 11p^2, \quad p=1 \notin \mathbb{P} \text{ или } - \text{противоречие}$$

2-й. $m+2n+9 > 11$, тогда 2.1 $m+2n+9 = 11p^2$, тогда

$$m=n=1, \quad m+2n+9 = 12 \neq 11p^2 \neq \emptyset, \quad \text{2.2 } m+2n+9 = 11p,$$

$$\text{тогда } mn = p, \quad \text{2.2.1 } m=p, \quad n=1, \quad p \cdot (p+10) = 11p^2, \quad p+10 = 11p,$$

$$\text{2.2.2 } n=p, \quad m=1, \quad p(p+10) = 11p^2, \quad p+10 = 11p, \quad p=1 \notin \mathbb{P} \neq \emptyset$$

2.3 $m+2n+9 = p^2$, тогда $mn=11$, либо m , либо $n=11$, где $10=1$

$$m+2n+9 \text{ равно либо } 11+2+9=22, \text{ -тогда, либо } 1+22+9=32 \neq \emptyset$$

2.4 $m+2n+9 = p$, тогда либо $m=p$, $n=11$, либо $m=11$, $n=p$.

$$\text{2.4.1 } m=p, \quad n=11, \quad p+22+9 = p, \quad 31=0 \neq \emptyset, \quad \text{2.4.}$$

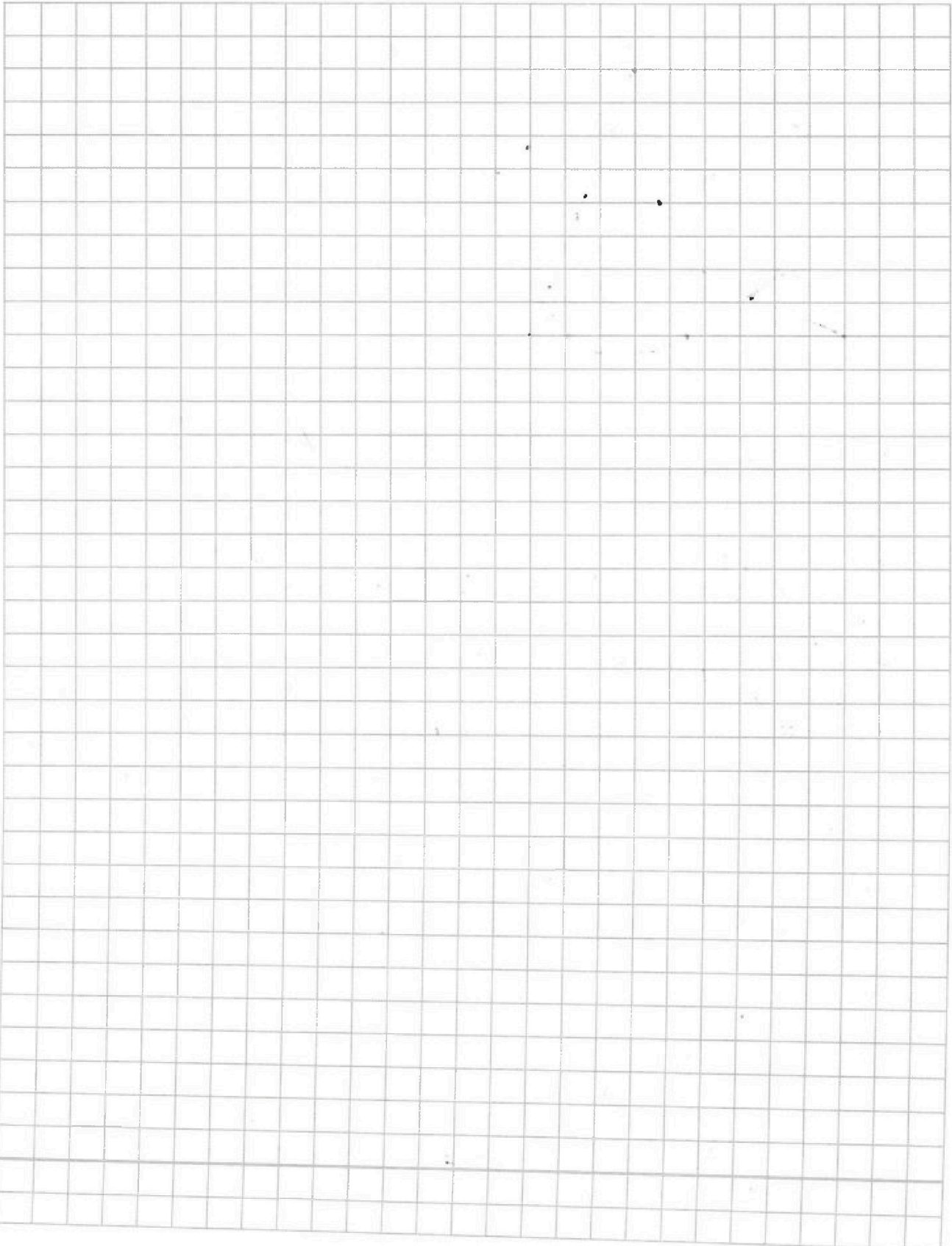


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



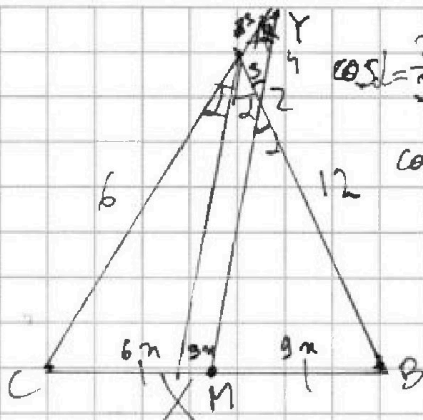


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

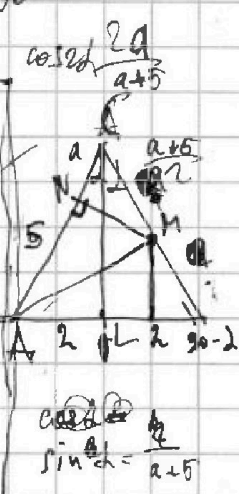
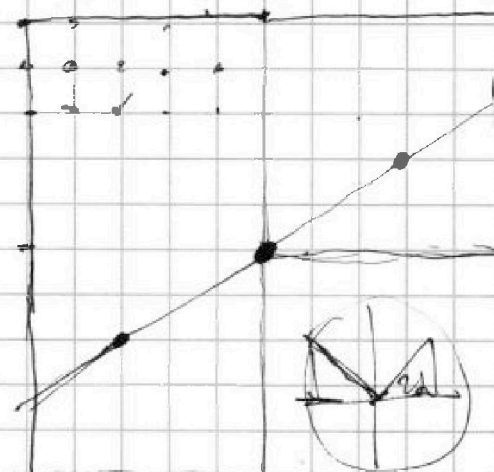


$\cos \alpha = \frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{5}{9}$ **Терновик**

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$\frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$

$\frac{121 \cdot 120}{2} - 60$
выбрать узел
121 узел



$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$
 $(m+2n)^2 - 7(m+2n)$
 $(m+2n)(m+2n-7) = 11p^2$
 $n(m^2 + 2mn + 4n^2)$

$\frac{121 \cdot 120 - 120}{2} + \frac{120}{2}$
 $mn(m+2n+g) = 11p^2$

$x^3 - y^3 = 3y - 3x + \sqrt{5}y - \sqrt{5}x$

$\frac{121 \cdot 120}{2} = 121 \cdot 60 - 60$

$\frac{16}{(a+5)^2} - \frac{(a+5)^2 - 16}{(a+5)^2}$
 $\frac{16}{(a+5)^2} - 3n$
 $\frac{32}{(a+5)^2}$

$11p^2 \cdot m = m = p \cdot 11p$
 $mn(m+2n+g) = 11p^2$

$m+2n+g = 11$

$m+2n+g = \cancel{1}, \cancel{11}, \cancel{12}, \frac{1}{11p^2}$

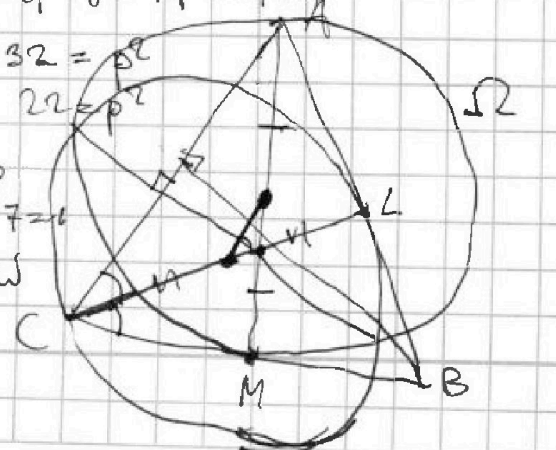
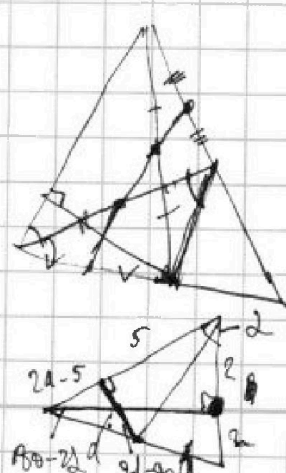
$p+2+g = p+4 = 11p$
 $1+2p+g = 11p = 2p+10$

$(m+2n)(m+2n-7)$
 $k/(k-7) = 11p^2$
 $k = 11p^2$
 $k = 11p$
 $k = p^2$

$32 = p^2$
 $22 = p^2$

$11p - 7 = p$
 $11p^2 - 7 = 0$

$k-7 = n$
 $p^2 = 18$



$\cos \alpha = \frac{2}{5}$
 $2a-5$