МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 1

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$

Два различных действительных корня $\Rightarrow D > 0$

$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4\cdot(4t^2-4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = -4t^2 + 16 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -t^2 + 4 > 0 \Rightarrow 4 > t^2 \Rightarrow t \in (-2; 2)$

Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4$, $c = 4t^2 - 4$.

По теореме Виета:

$x_1 \cdot x_2 = c$

По условию $x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow 4t^2 - 4 > 0 \Rightarrow t^2 - 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$$\begin{cases} t \in (-2; 2) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow t \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$

Ответ: при $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$ уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, и их произведение положительно.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5$

$(a-b)^2+15(a-b)=17p^5$

$(a-b)(a-b+15)=17p^5$

Если $(a-b)$ – нечётное, то $(a-b+15)$ – чётное. Если $a-b$ – чётное, то $(a-b+15)$ – нечётное. Тогда $(a-b)(a-b+15)$ в любом случае чётно, тогда $17p^5$ тоже чётное, тогда p^5 чётное. Единственное простое чётное число это 2, значит $p=2$, $p^5=32$.

Пусть $(a-b)$ – чётное, а $(a-b+15)$ – нечётное. Тогда:

$$\left[\begin{array}{l} a-b+15=1 \\ a-b+15=-1 \\ a-b+15=17 \\ a-b+15=-17 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=-14 \\ a-b=-16 \\ a-b=2 \\ a-b=-32 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a-b)(a-b+15)=-14\neq 17\cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15)=16\neq 17\cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15)=34\neq 17\cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15)=17\cdot 32=17\cdot 32 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow a-b+15=-17$, $a-b=-32$. По условию $a+b=40$. Тогда

$\begin{cases} a+b=40 \\ a-b=-32 \end{cases} \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4$, $b=36$. Пара $(4;36)$ подходит.

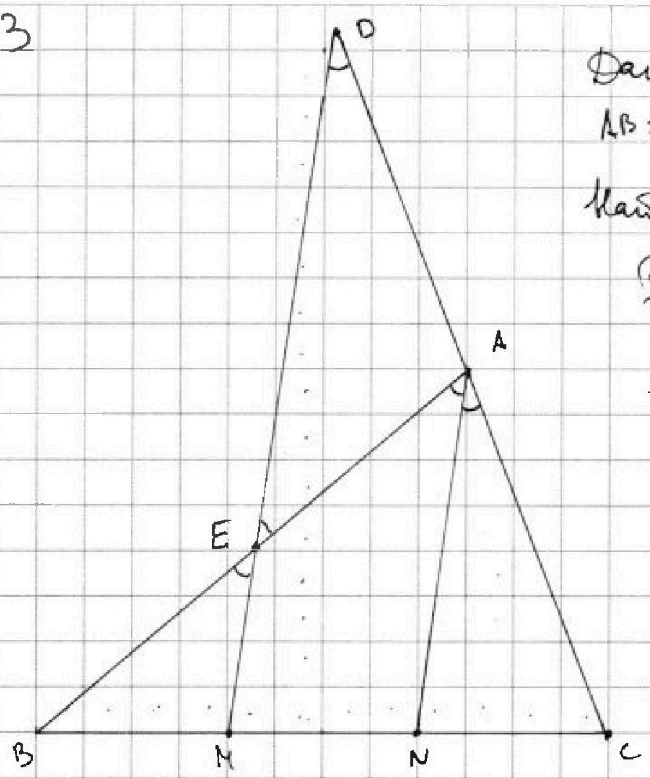
Пусть $(a-b)$ – нечётное, а $(a-b+15)$ – чётное. Тогда:

$$\left[\begin{array}{l} a-b=1 \\ a-b=-1 \\ a-b=17 \\ a-b=-17 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b+15=16 \\ a-b+15=14 \\ a-b+15=32 \\ a-b+15=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a-b)(a-b+15)=16\neq 17\cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15)=14\neq 17\cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15)=17\cdot 32=17\cdot 32 \\ (a-b)(a-b+15)=34\neq 17\cdot 32 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow a-b=17$, $a-b+15=32$. По условию $a+b=40$. Тогда $\begin{cases} a+b=40 \\ a-b=17 \end{cases} \Rightarrow 2a=57 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=\frac{57}{2}$. $\frac{57}{2}$ – нецелое, а по условию числа a и b – целые $\Rightarrow$ не подходит.
Таким образом подходит только одна пара (a,b) равная $(4,36)$

Ответ: $a=4$, $b=36$.

№3



Дано: $BM = MN = NC$, $AN \parallel MD$, $AB = CD$, $BC = 12$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$

Найти: AB.

Решение: $BM = MN = NC$, $BC = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow BM = MN = NC = \frac{1}{3} BC = 4$.

$\angle NAC = \angle MDC$ (как соотв при $AN \parallel MD$ и сек. DC),

$\angle NCA$ – общий $\Rightarrow \triangle NAC \sim \triangle MDC$ по двум углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{NC}{MC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC$ – половина $CD \Rightarrow AD$ – половина CD

$\angle BEM = \angle BAN$ (как соотв при $MD \parallel AN$ и сек AB), $\angle MBE$ – общ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BEM \sim \triangle BAN$ по двум углам $\Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{BM}{BN} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BE$ – половина $AB \Rightarrow AE$ – половина AB.

$AB = CD = 2AE = 2AD \Rightarrow AE = AD \Rightarrow \angle AED = \angle ADE$.

$\angle AED = \angle MEB$ как вертикальные $\Rightarrow \angle CAN = \angle CDM = \angle AED =$

$= \angle MEB = \angle NAB \Rightarrow \angle BAC = 2\angle CAN$.

По теореме косинусов для треугольника ABC:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$

$AC = AD = AE = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AC^2 = \frac{1}{4} AB^2$, $AB^2 = 4AC^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{BC^2 = AB^2}$ $BC^2 = 4AC^2 + AC^2 - 2 \cdot 2 \cdot AC \cdot AC \cdot \cos\angle BAC$

$\cos\angle BAC \parallel \cos 2\angle CAN$

$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 - 2 \cdot 2 \cdot AC \cdot AC \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$

$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 + AC^2$

$BC^2 = 6AC^2$

$AC = \sqrt{\frac{BC^2}{6}} = \sqrt{\frac{12^2}{6}} = \sqrt{24} \Rightarrow AB = 2 \cdot AC = 2 \cdot \sqrt{24} = 4\sqrt{6}$

Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Зададим граф: пусть деревни — вершины, ребро — дорога между деревнями. По условию из любой деревни можно добраться в любую другую единственным образом, тогда наш граф связный и наш граф — дерево. Рассмотрим вершину, у которой степень 3, 4, 5 или 7. Она соединена с какой-то вершиной со степенью 3, 4, 5 или 7. Причём степени у них разные, т.к. по условию каждого вида ровно 1 штука. Если это не так, то из нашей вершины рёбра идут только в вершины со степенями 1. Тогда у нас граф несвязный, ибо нет других трёх вершин из набора 3, 4, 5, 7. Пусть у нашей вершины степень x. Тогда количество деревень на данном этапе $x+1$, т.к. наша вершина соединена с x вершинами и $+1$ это она сама. Мы знаем что к ~~[illegible]~~ нашей вершине подсоединена вершина из набора 3, 4, 5, 7 и пусть её степень y. Тогда количество деревень равно $x+1+y-1$ ~~[illegible]~~, т.к. вершина y соединена с y вершинами, но -1, т.к. мы уже считали вершину со степенью x. Подсчёт деревень остальных двух вершин из набора 3, 4, 5, 7 аналогичен. Тогда всего вершин $x+1+y-1+z-1+w-1$, где x, y, z, w — числа из набора 3, 4, 5, 7. Таким образом количество деревень равно $3+4+5+7+1-1-1-1=17$.

Ответ: на острове может быть 17 деревень

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 7

x и y – целые $\Rightarrow$ $2x+2y-x^2-y^2$ и $1-|x+y-2|$ – целые.

Под корнем числа могут быть неотрицательными. Данная функция $\sqrt{x}$ – возрастающая. $\sqrt{0}=0$, $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{2}=\sqrt{2}>1$. Все целые числа больше 1 под корнем будут давать число больше 1.

Таким образом получаем такую совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+2y-x^2-y^2=0\\ 1-|x+y-2|=1\end{cases}\\ \begin{cases}2x+2y-x^2-y^2=1\\ 1-|x+y-2|=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим каждую систему по отдельности, ответы объединим.

$$\begin{cases}2x+2y-x^2-y^2=0\\ 1-|x+y-2|=1\end{cases} \Rightarrow |x+y-2|=0 \Rightarrow x+y=2 \Rightarrow 2x+2y-x^2-y^2=$$

$$=2(x+y)-(x+y)^2+2xy=2\cdot 2-2^2+2xy=2xy=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}xy=0\\ x+y=2\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}2x+2y-x^2-y^2=1\\ 1-|x+y-2|=0\end{cases} \Rightarrow |x+y-2|=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=3\\ x+y=1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2(x+y)-\\ 2(x+y)-\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}-(x+y)^2+2xy=2\cdot 3-3^2+2xy=-3+2xy=1\\ -(x+y)^2+2xy=2\cdot 1-1^2+2xy=1+2xy=1\end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2xy=4\\ 2xy=0\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}xy=2\\ xy=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=2\\ x+y=3\end{cases}\\ \begin{cases}xy=0\\ x+y=1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Таким образом подходят пары чисел $(0;2)$, $(2;0)$, $(1;2)$, $(2;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$

Ответ: $(0;2)$, $(2;0)$, $(1;2)$, $(2;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$

$D = (2\sqrt{3}t)^2 - 4\cdot(4t^2-4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 > 0$

$-4t^2 + 16 > 0 \Rightarrow -t^2 + 4 > 0 \Rightarrow 4 > t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \in (-2; 2)$

$3+4+5+4+5=$

$x_1 = \dfrac{-2\sqrt{3}t + \sqrt{-4t^2+16}}{2}$

$=$ нет $n=21)31$

$x_2 = \dfrac{-2\sqrt{3}t - \sqrt{-4t^2+16}}{2}$

$x_1 \cdot x_2 = \left(\dfrac{-2\sqrt{3}t + \sqrt{-4t^2+16}}{2}\right)\left(\dfrac{-2\sqrt{3}t - \sqrt{-4t^2+16}}{2}\right) =$

$= \dfrac{12t^2 + \cancel{2\sqrt{3}t\sqrt{16-4t^2}} - \cancel{2\sqrt{3}t\sqrt{16-4t^2}} - (16-4t^2)}{4} =$

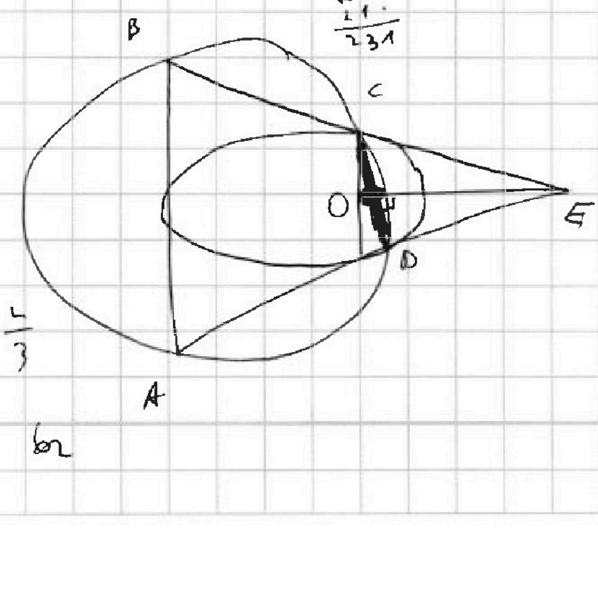
$= \dfrac{12t^2 - 16 + 4t^2}{4} = \dfrac{16t^2 - 16}{4} = 4t^2 - 4 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

$\boxed{\text{т.о.}}$ $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

$\begin{array}{r} 11 \\ \cdot 11 \\ \hline 21 \\ +21 \\ \hline 231 \end{array}$

№ 1 Д. 1



$\frac{11}{21}$ или $\frac{21}{31}$ $\frac{6}{21}$ $\frac{11}{30}$

240 231 $\frac{21}{31}$ $\frac{2}{3}$

$BE \cdot CE = AE \cdot DE$ 63 62

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5$

$(a-b)^2+15(a-b)=17p^5 \Rightarrow (a-b)(a-b+15)=17p^5$

$\cos(2\angle CAN)=-\frac{1}{4}$

$a-b=2$ $\quad$ $a-b=4$

$a-b+15=4$ $\quad$ $a-b+15=4$

$a^2-2ab+b^2+15a-15b=a^2+2ab+b^2+15a-15b-4ab=$

$=(a+b)^2+15(a-b)-4ab=17p^5$

$p=2 \Rightarrow p^5=32$

$a-b$ – чётное $\Rightarrow$ $a-b+15$ – нечётное $\Rightarrow a-b+15=17 \Rightarrow$

$\Rightarrow a-b=2 \Rightarrow 2\cdot 17=34 \neq 17\cdot 32$

$a-b$ – нечётное $\Rightarrow$ $a-b+15$ – чётное $\Rightarrow a-b=17\Rightarrow$

$\Rightarrow a-b+15=17+15=32 \Rightarrow 17\cdot 32=17\cdot 32$

$\begin{cases} a-b=17 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow 2a=57 \Rightarrow a=\frac{57}{2} \notin \mathbb{Z}$

$a-b+15=1 \Rightarrow a-b=-14$ $\quad$ $a-b$ – чётное

$(-14)\cdot 1 \neq 17\cdot 32$

$a-b+15=1 \Rightarrow a-b=-14$ X

$a-b+15=-1 \Rightarrow a-b=-16$ X

$a-b+15=17 \Rightarrow a-b=2$ X

$a-b+15=-17 \Rightarrow a-b=-32$

$\begin{cases} a-b=-32 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{40-32}{2}=4$

$b=36$

$a-b=1 \Rightarrow$

$a-b$ – нечётное

$a-b=1 \Rightarrow a-b+15=16$ X

$a-b=-1 \Rightarrow a-b+15=14$ X

$a-b=17 \Rightarrow a-b+15=32$

$a-b=-17 \Rightarrow a-b+15=-2$ X

$\begin{cases} a-b=17 \\ a+b=40 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{40+17}{2}$ X

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

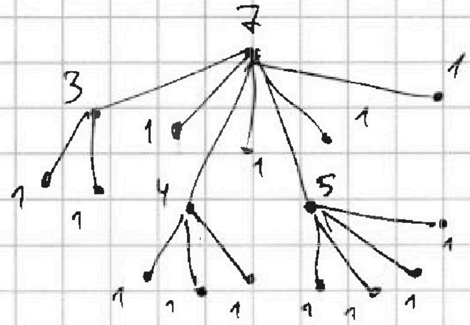
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

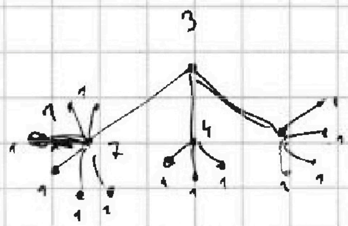
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

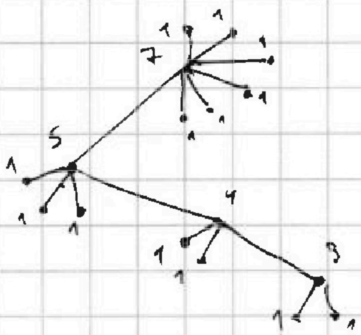
Единственный маршрут => граф - дерево

ans = 17.

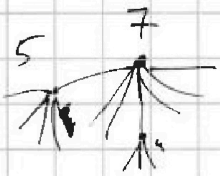


17





17



17

1 + 7 + 4 + 3 + 2

11/31

шаг

$$\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)-2xy+2xy} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

$$\sqrt{(x+y)(2-x-y)+2xy} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1.$$

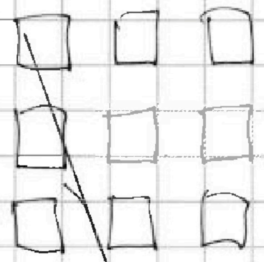
$$\sqrt{(x+y)(2-x-y)+2xy} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

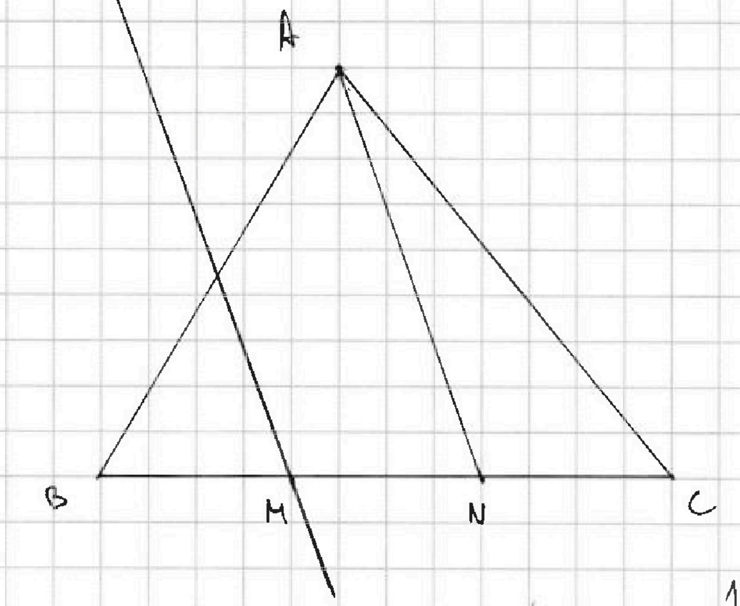
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_9$

Всего 9!



31

$\frac{6}{11}$? или $\frac{16}{31}$

$6\cdot 31 - 16\cdot 11$

$186 - 176 = 10$

$-(x^2+y^2) = -(x+y)^2 + 2xy = -x^2-2xy-y^2+2xy$

$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 - 2\cdot 2AC\cdot AC \cdot -\frac{1}{4}$

$BC^2 = 4AC^2 + AC^2 + AC^2 = 6AC^2$

$144 = 6AC^2 \Rightarrow AC^2 = \frac{144}{6} = 24 \Rightarrow AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \Rightarrow AB = 4\sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x+y=a,\quad xy=b$

$x^2+y^2=a^2-2b$

$\sqrt{2a-a^2+2b}+\sqrt{1-|a-2|}=1$

$\sqrt{a(2-a)+2b}+\sqrt{1-|a-2|}=1$

$a(2-a)+2b+1-|a-2|+\sqrt{(a(2-a)+2b)(1-|a-2|)}=1.$

$a(2-a)+2b+1-(a-2)+\sqrt{(a(2-a)+2b)(1-(a-2))}=1$

$a(2-a)+2b+1+(2-a)+\sqrt{(a(2-a)+2b)(1+(2-a))}=1$

$(a+1)(2-a)+2b+1+\sqrt{a(2-a)+a(2-a)^2+2b+2b(2-a)}=1$

$(a+1)(2-a)+2b+1+\sqrt{(3-a)(a(2-a)+2b)}=1$

$\sqrt{(3-a)(a(2-a)+2b)}=(a+1)(a-2)-2b$

$(3-a)(a(2-a)+2b)=(a+1)^2(a-2)^2-4(a+1)(a-2)b+4b^2$

$a(2-a)(1+2-a)+$

$a\geq 2\qquad +2b(1+2-a)=$

$=(3-a)(a(2-a)+2b)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2(x+y)-(x^2+y^2)=0 \Rightarrow 2(x+y)-(x+y)^2+2xy=0\\ \qquad 4-4+2xy=0 \Rightarrow x=0,\ y=2;\quad x=2,\ y=0\\ 1-|x+y-2|=1 \Rightarrow x+y=2\end{cases}\\ \begin{cases}2(x+y)-(x^2+y^2)=1\\ 1-|x+y-2|=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow x+y=3$

$2(x+y)-(x+y)^2+2xy=9$

$6-9+2xy=1 \Rightarrow 2xy=4$

$xy=2$

$\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases} \Rightarrow (3-x)x=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-x^2-2=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow$

$x=1$ или $x=2$

$y=2 \qquad y=1$

$x+y=1$

$2(x+y)-(x+y)^2+2xy=1$

$2-1+2xy=1$

$2xy=0$

$\begin{cases}x+y=1\\ xy=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}x=1 & x=0\\ y=0 & y=1\end{matrix}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\cos = x \quad \sin = y \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$= -\frac{1}{4} = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2\alpha = +\frac{3}{4} \Rightarrow \qquad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = +\frac{3}{8}$

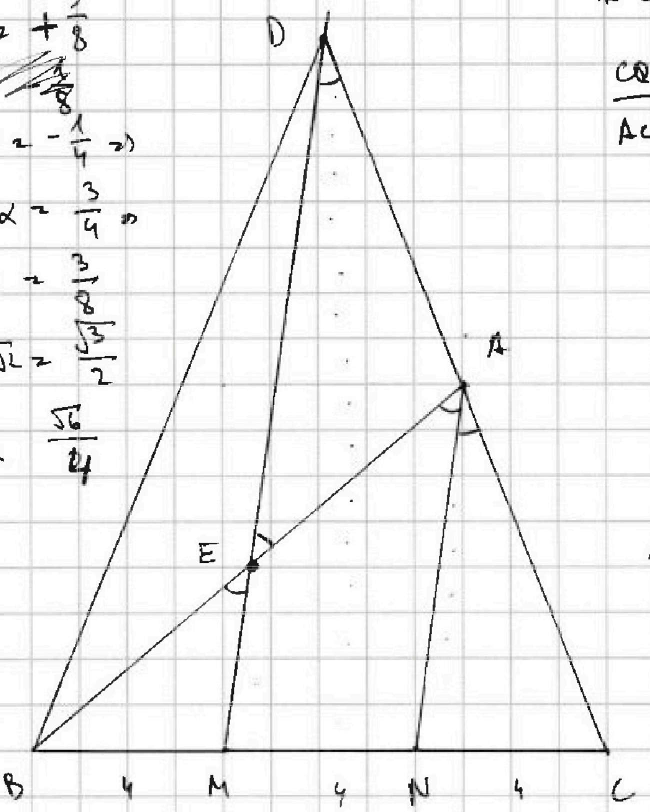
$2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{8}$

$\cos\alpha \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$



24^2

$\times 24$, $\times 24$, 96, $+48$, 576

$\triangle CMD \sim \triangle CAN$

$\frac{CD}{AC} = \frac{MC}{NC} = \frac{8}{4} = 2$

$\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{AC}{\sin\angle ABC}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{6}{16}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

$AD = AC = \frac{1}{2} AB.$

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8+2+1}{8} = \frac{11}{8}$

$\times \begin{matrix}144 \\ 8\end{matrix} = 1152$

$\frac{12^2 \cdot 2^2 \cdot 2}{11} = 24 \cdot \sqrt{\frac{2}{11}}.$

$16 = AN^2 + AC^2 - 2AN \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}$

$16 = AN^2 + AC^2 - AN \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$

$144 = AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 - AB \cdot \frac{1}{2}AB \cdot -\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 144 = AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{8}AB^2$

$144 = AB^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = AB^2 \cdot \frac{11}{8}$

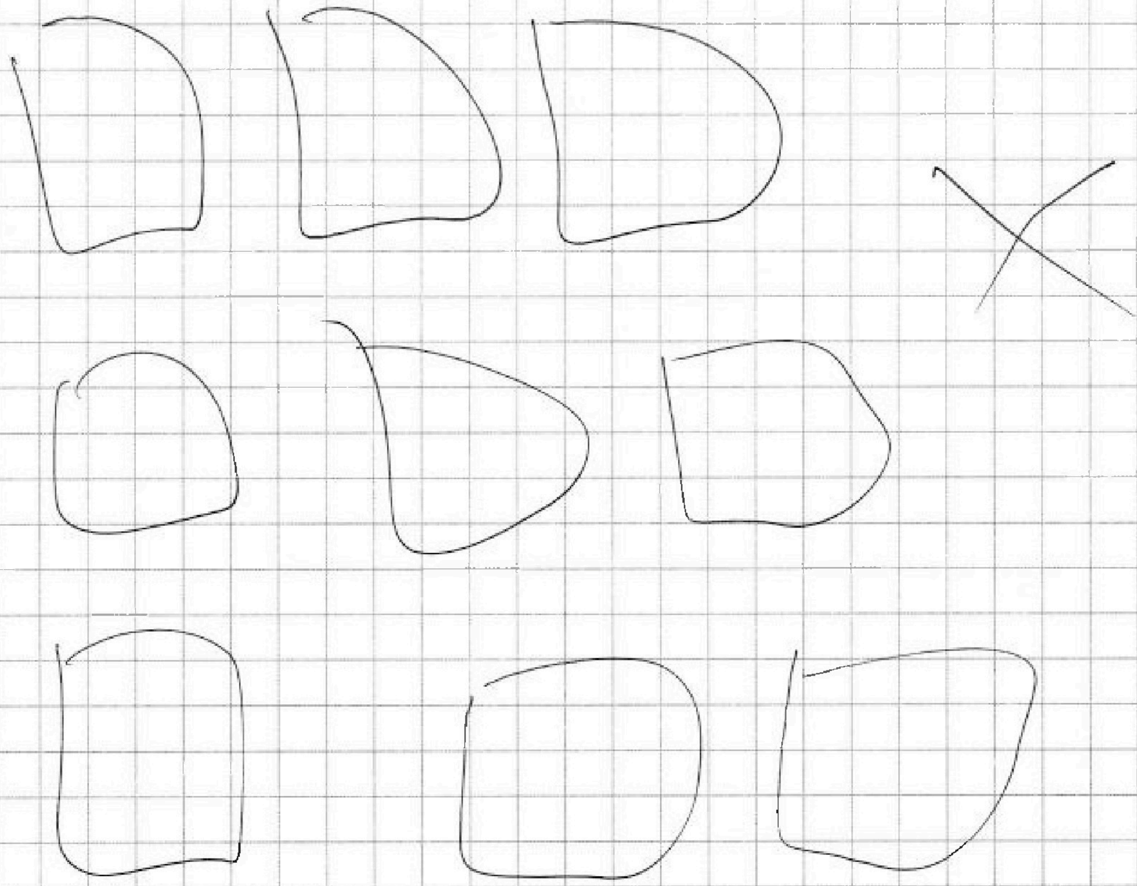
$AB^2 = \frac{144 \cdot 8}{11} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{144 \cdot 8}{11}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$9! - \frac{3\cdot 4\cdot 5}{3!}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!