

20-3 / 17  
40-6 / 17



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  - некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
3. [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$ .
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

$$x(x-2) + y(y-2) + |x+y-2|$$

$$(2x+2y-x^2-y^2) + (1-|x+y-2|) = 1$$

$$= 1 - (2x+2y-x^2-y^2) + 1 - |x+y-2|$$

$$= 2 - (x(x-2) + y(y-2)) + (x+y-2) + 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x_1$  и  $x_2$

2 разн. действ. корня, их произвед. положит.  $\rightarrow$   
 $\Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ ; либо  $x_1$  и  $x_2$  полож.,  
 либо  $x_1$  и  $x_2$  - отрицат.

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  - квадратн. многочлен  
 с коэффициентами  $a=1, b=2\sqrt{3}t, c=4t^2-4$

Тогда,  $D = b^2 - 4ac = 12t^2 + 4(4 - 4t^2) = -4t^2 + 16 > 0$

$D > 0$ , т.к. корней 2 по усн-ю

Тогда,  $16 > 4t^2$

$$4 > t^2$$

$$2 > |t|$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} t > -2 \\ t < 2 \end{cases}$$

Запишем корни многочлена:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3}t + 2\sqrt{4-t^2}}{2} = \sqrt{4-t^2} - \sqrt{3}t$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3}t - 2\sqrt{4-t^2}}{2} = -\sqrt{4-t^2} - \sqrt{3}t$$

Из усн-я  $x_1 \cdot x_2 > 0$ . Тогда,

$$(\sqrt{4-t^2} - \sqrt{3}t)(-\sqrt{4-t^2} - \sqrt{3}t) > 0$$

$$-(4-t^2) + t\sqrt{3(4-t^2)} - t\sqrt{3(4-t^2)} + 3t^2 > 0$$

$$4t^2 - 4 > 0 \Rightarrow t^2 - 1 > 0 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} \begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases}$$

Одновременно должны выполнят.  
 и  $\textcircled{1}$  и  $\textcircled{2}$ . Тогда, запишем  
 совокупность.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

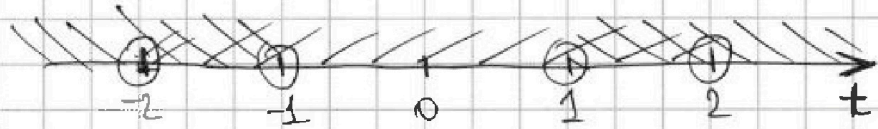
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} t < 2 \\ t > -2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t > 1 \\ t < -1 \end{array} \right.$$

Рассм. на коор. прямой:



Ответ:  $(-2; -1) \cup (1; 2)$

~~Handwritten work for a quadratic equation, which is crossed out with large diagonal lines:~~

$$x^2 + 3\sqrt{3} \cdot x + 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 27 - 4 \cdot 5 = 7$$

$$x_1 = \frac{-3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2} \quad \text{отр.}$$

$$x_2 = \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2} \quad \text{отр.}$$

~~Additional scribbled notes on the right side of the page:~~

$$\sqrt{7} < 3$$

$$3\sqrt{3} < 6$$

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

$$3 < 3\sqrt{3} < 6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{|l} a, b \\ \hline a + b = 40 \end{array}$$

$$\sqrt{2}.$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

Разложим многочлен  ~~$a^2 + 2a(-2b) + b^2$~~  из 14 на множители

$$a^2 + a(15 - 2b) + (b^2 - 15b) = 0$$

$$D = 15^2 - 60b + 4b^2 - 4b^2 + 60b = 15^2$$

$$a_1 = \frac{2b - 15 + 15}{2} = b$$

$$a_2 = \frac{2b - 15 - 15}{2} = b - 15$$

Тогда,  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a - b)(a - b + 15) = 17p^5$

$$a - b = a + b - 2b = 40 - 2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (40 - 2b)(40 + 15 - 2b) = 17p^5$$

$$(40 - 2b)(55 - 2b) = 17p^5$$

как множ. одно из множит. 6 14 : 17.

Рассм 2 случая:

I:

$$40 - 2b \equiv_{17} 0$$

$$20 \equiv_{17} b$$

$$b \equiv_{17} 3$$

II:

$$55 - 2b \equiv_{17} 0$$

$$4 \equiv_{17} 2b$$

$$b \equiv_{17} 2$$

$a, b$  натур.  $\Rightarrow b < 40$

возм. знач.  $b$ :

3, 20, 37

$a, b$  - натур  $\Rightarrow b < 40$

возм. знач.  $b$ :

2, 19, 36

Рассмотрим знач.  $(40 - 2b)(55 - 2b)$  для всех возм.  $b$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть  $b = 3$ . Тогда, значение выраж.:

$$(40-6)(55-6) = 34 \cdot 49 = 17 \cdot 17 \cdot 7^2 \neq p^5 \rightarrow \emptyset$$

2) Пусть  $b = 20$ . Тогда,  $40 - 2b = 0 \Rightarrow 17p^5 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow p = 0$ , что не явл. прас.

3) Пусть  $b = 37$ . Тогда:

~~$(40-37)(55-74) = -3 \cdot 19 \neq p^5$~~   
~~(Получилась шутка про то, что  $\frac{19}{3} \neq p^5$ )~~

$$(40-74)(55-74) = -34 \cdot (-19) = 17 \cdot (2 \cdot 19) \neq p^5$$

4) Пусть  $b = 2$ . Тогда:

$$(40-4)(55-4) = 36 \cdot 51 = 17 \cdot (3^2 \cdot 2^2) \neq p^5$$

5) Пусть  $b = 19$ . Тогда:

$$(40-38)(55-38) = 2 \cdot 17 \cdot 2 \neq p^5$$

6) Пусть  $b = 36$ . Тогда:

$$(40-72)(55-72) = -32 \cdot (-17) = 17 \cdot 32 = 17 \cdot p^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^5 = 32 \Rightarrow \boxed{p = 2}$$

Подставим только вай вар.  $\rightarrow b = 36 \rightarrow a = a + b - b =$   
 $= 40 - 36 = 4$

Ответ:  $a = 4, b = 36$ .



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:  $AC = 12$ ,  $BM = MN = NC$ ,  $MD \parallel AN$ ,  $AB = CD$ ;

$$\sin(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}; \angle CAN = \alpha;$$

$$\angle BNA = \gamma; \angle BAN = \beta.$$

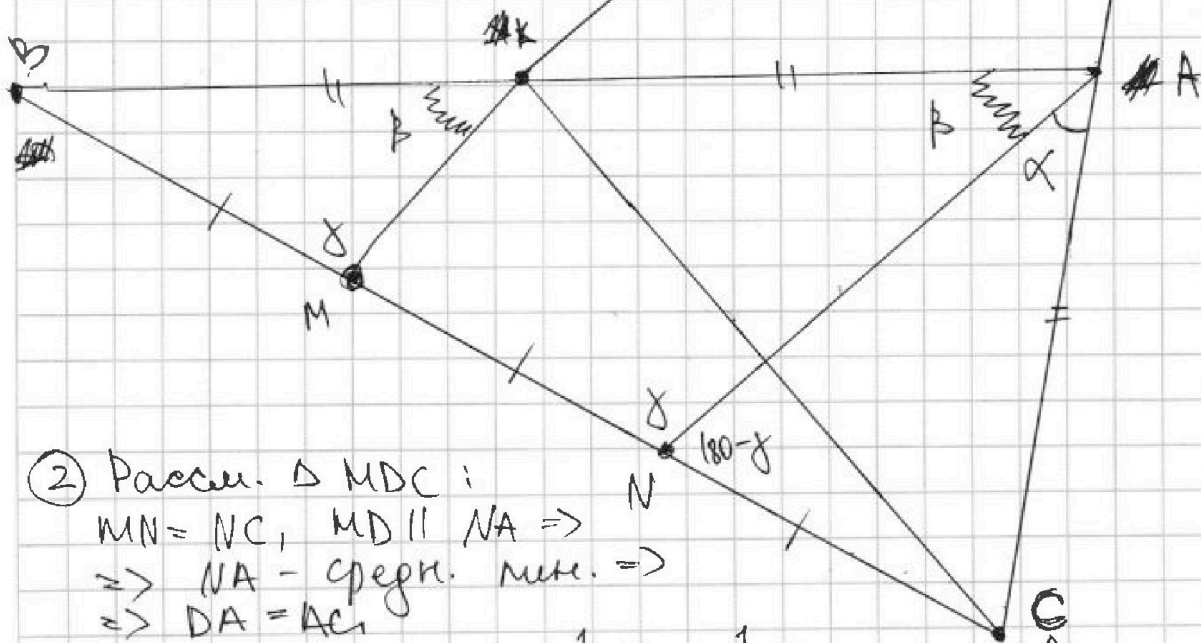
Решение:

① Рассмотрим  $\triangle ABN$ :

$$BM = MN; MK \parallel NA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MK - \text{ср. лин.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BK = KA.$$



② Рассмотрим  $\triangle MDC$ :

$$MN = NC, MD \parallel NA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow NA - \text{ср. лин.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DA = AC$$

$$AB = CD \Rightarrow BK = KA = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD =$$

$$= AC = AD$$

③ ~~sin~~ ~~cos~~  $\sin \alpha = \sin \beta$ , если  $\alpha + \beta = 180^\circ$   
 $\cos \alpha = -\cos \beta$ , если  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

~~④~~ ~~Рассмотрим~~ ~~треугольник~~ ~~sin~~ ~~cos~~ ~~α~~

④ Рассмотрим  $MK \parallel AN$  с сек.  $MN$ :

$$\angle BMK = \angle BNA = \gamma; \angle KMC = \angle ANC = 180^\circ - \gamma - \cos \beta.$$

Рассмотрим  $MK \parallel AN$  с сек.  $AK$ :

$$\angle KMC = \angle KAN = \beta - \cos \beta.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Даны:  $\gamma$ ,  $\sin \alpha$  для  $\triangle ANC$  и  $\triangle BMC$ :

$$1) \frac{\sin \beta}{\frac{1}{3} BC} = \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{2} AB}$$

$$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DC$$

$$\sin \alpha = \sin (180 - \alpha) \Rightarrow$$

$$2) \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{3} BC} = \frac{\sin (180 - \alpha)}{\frac{1}{2} DC}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \sin \alpha \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  либо  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , либо  $\alpha = \beta$

невозм., т.к. оба угла ~~острые~~ ост. углы  
треугольника  $\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BAC = \alpha + \beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

6) Запишем  $\gamma$ ,  $\cos$  для  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12^2 = (2AC)^2 + AC^2 - 2 \cdot 2AC \cdot AC \cdot \cos(2\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12^2 = 5AC^2 + 4AC^2 \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12^2 = 6AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{12 \cdot 2} = 2\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 2AC = 4\sqrt{6}$$

Ответ:  $AB = 4\sqrt{6}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1     
2     
3

БУДЕМ РАССМ. КАЖДЫЙ РЯД ОТДЕЛЬНО.

Отсортируем уч. по росту:  $a_1, a_2, a_3 \dots a_8$ , где  $a_1$  - самый высокий, а  $a_8$  - самый маленький.

~~Также, ~~как бы~~ добавим ученика с ростом  $a_9 = 0$  - пустое место. Равносильно, т.к. и перед пустым местом, и перед человеком тоже ростом  $(0 < a_8, a_7, \dots)$  всё верно.~~

Тогда, рассм. один из рядов:

~~Если там~~ Пусть там нет св. места. Тогда, с 3 способами мы сможем выбрать 3х людей, которые здесь сидят. Рассадить их мы можем единственным способом, ~~верь~~: Самый маленький на 1ой парте, т.к. 1я ост. он никому не уприт; средний - за второй, т.к. за третьей ему будет мешать самый высокий.

таких 2 ряда

Выбрать ряд, на котором будет одно св. место можно 3мя способами выбрать двух людей там сидят 2 оставшихся человека, которые не сели на полностью занят. ряду. Это будут люди с ростом  $a_i, a_j$ , где  $a_i > a_j$ . Тогда, возм. рассм.:

x	x	$a_i$	$a_j$	$a_i$	$a_j$
$a_i$	$a_j$	x	x	$a_j$	$a_i$
$a_i$	$a_i$	$a_i$	$a_i$	x	x
①	②	③	④	⑤	⑥

① и ⑤ вар. не подходят, т.к.  $a_i$  запер. обзор  $a_j \Rightarrow \Rightarrow$  вар. раскладки 4



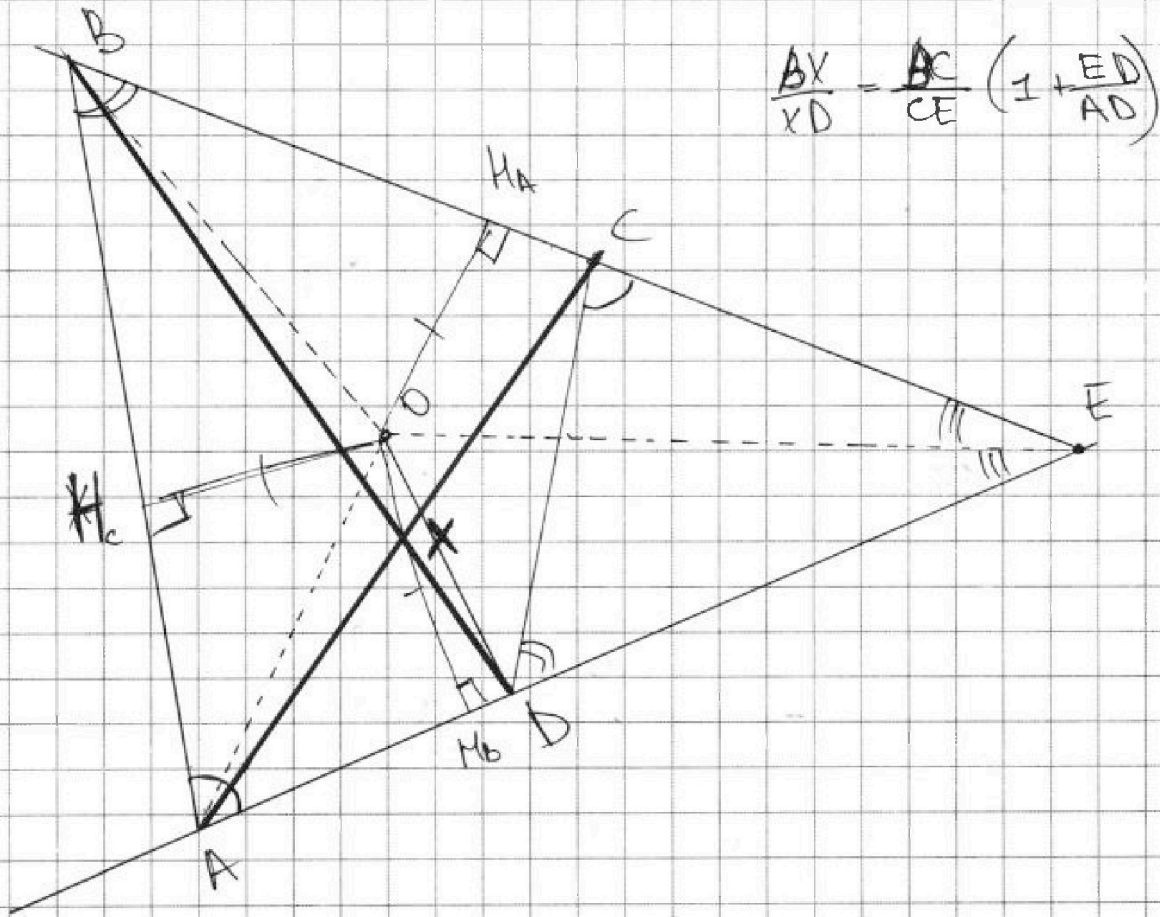


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BX}{XD} = \frac{BC}{CE} \left(1 + \frac{ED}{AD}\right)$$

центр. впис. окр. - центр пересеч. биссектрис.

Четырёхуг. впис.  $\Rightarrow$  сумма противоп.  $180^\circ$

Чтобы треуг. CED существовал.  $ED + DO > OE$

① Из впис. четырёх. ABCD следует, что  $\angle BAC = \angle DCE$ ,  $\angle ABE = \angle CDE \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CDE$  по двум углам  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{DE}{BE} = \frac{CD}{AB}$

② Найдем ст. точки E отн. окр. ABCD:  
 $BE \cdot CE = AE \cdot ED$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

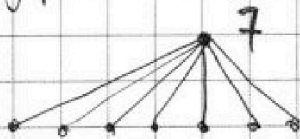
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Из деревьев следует, что граф~~

Далее мы будем рассм. граф, в котором  
Вершины - деревья, а дороги - рёбра.

Из условия след., что граф связанный  
(из каждой деревни можно доехать в любую др.),  
а также явл. деревом (из одной деревни  
в др. можно доехать единственным способом)

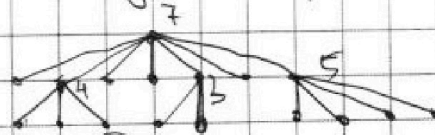
Тогда, повесим граф за вершину со степенью 7.  
(деревню из которой выведет 7 дорог)



Теперь, есть 7 верш. со ст. 1,  
а т.к. с другими степенями  
есть ещё только 3 вершины  
(степени: 3, 4, 5), то 4 из этих  
вершин останутся только негражу-  
тьми.

Рассм. случаи, как могут быть присоед.  
верш. со степенями 3, 4 и 5.

1) Все 3 вершины соедин. с вершиной, степень  
которой 7



кол-во деревьев (верш): 17



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

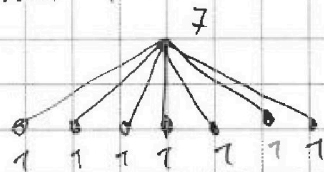
СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~В~~ На самом деле всегда будет 17 деревьев (вершин) вершину со степенью ~~3, 4, 5~~ "присчитая" к графу к графу ~~2, 3, 4~~ ребра соотв. (т.к. одно, последнее, соотв. граф с вершиной)  $\rightarrow$

$\Rightarrow$  кол-во вершин в графе всегда будет равно:  $(8) + 2 + 3 + 4 = 17$

число вершин в графе, с которого мы начали:



Ответ: 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$(x+y-2) \cdot$~~

~~$(2x+2y - x^2 - y^2)$~~

~~$(x+y-2) \cdot$~~

~~$x^2(x-2)^2 + y^2(y-2)^2 + 2xy(x-2)(y-2)$~~

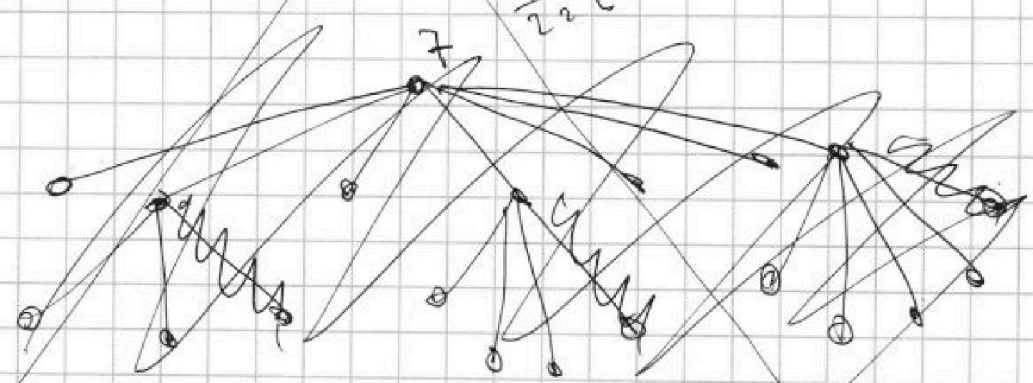
~~$x^2 + y^2 - 2x - 2y$~~

~~$+ (x+y-2)^2 + 2x(y-2) + 2(x^2 - 2x + y^2 - 2y) \cdot (x+y-2) + x^2 + y^2 - 2x - 2y$~~

~~MA~~

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 15 \\ \hline 30 \\ + 15 \\ \hline 45 \\ \hline 225 \end{array}$$

Граф дерева  
связан.







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Выбрать какой ряд с пуст. мест. : 3

Заполнить первый ряд :  $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$

Заполнить второй ряд :  $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 10.$

Заполнить третий ряд (с пустыми местами) : 4

Итого :  $3 \cdot 56 \cdot 10 \cdot 4 = 120 \cdot 56$  вариантов



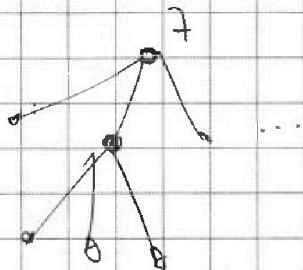
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

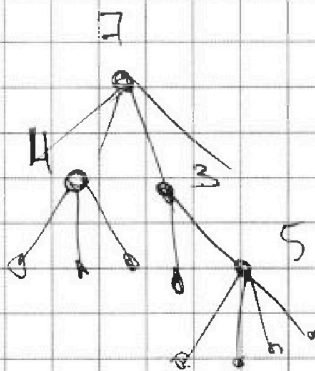
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

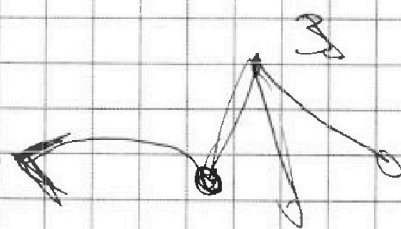
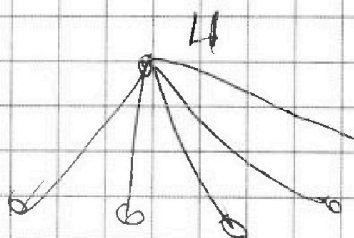
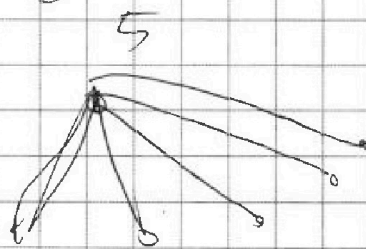
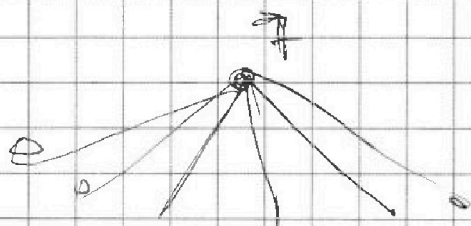
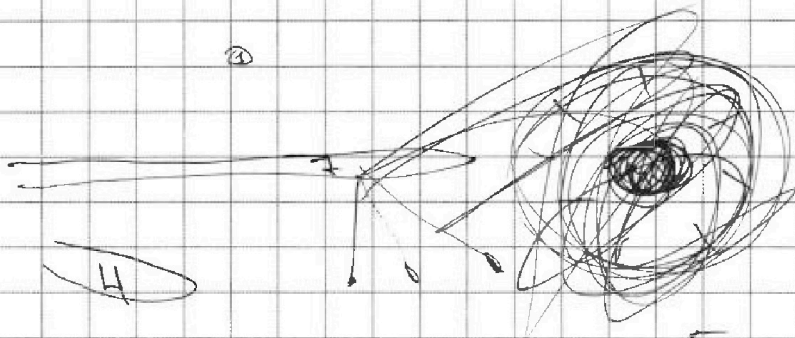
~~Точка~~



$$\cancel{17} + 3 + 2 + 4 = 17$$



$$4 + 2 + \cancel{3} + \cancel{7} + 7 = 17$$



$$8 + \cancel{4} + 3 = 11 \quad \text{or} \quad 7$$