



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA$ ,  $AB$ ,  $BC$  в точках  $D$ ,  $E$ ,  $F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Пусть  $a = a_0 \cdot 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$ ,  $b = b_0 \cdot 3^{\beta_2} \cdot 7^{\gamma_2}$ ,  $c = c_0 \cdot 3^{\delta_1} \cdot 7^{\delta_2}$ ,  
где  $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{N} \setminus \{3, 7\}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

По условию,  $ab : 3^{11} \cdot 7^{11} \Rightarrow a_0 b_0 \cdot 3^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot 7^{\beta_2 + \gamma_2} : 3^{11} \cdot 7^{11} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 11 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 11 \end{cases}$

$bc : 3^{18} \cdot 7^{16} \Rightarrow b_0 c_0 \cdot 3^{\beta_2 + \delta_1} \cdot 7^{\gamma_2 + \delta_2} : 3^{18} \cdot 7^{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \beta_2 + \delta_1 \geq 18 \\ \gamma_2 + \delta_2 \geq 16 \end{cases}$

$ac : 3^{21} \cdot 7^{38} \Rightarrow a_0 c_0 \cdot 3^{\alpha_1 + \delta_1} \cdot 7^{\beta_1 + \delta_2} : 3^{21} \cdot 7^{38} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \delta_1 \geq 21 \\ \beta_1 + \delta_2 \geq 38 \end{cases}$

Получаем:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 11 & (1) \\ \beta_2 + \delta_1 \geq 18 & (2) \\ \gamma_2 + \delta_2 \geq 16 & (3) \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 16 \\ \gamma_2 + \delta_2 \geq 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1) \geq 50 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \alpha_2 + \delta_2 \geq 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq 25 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 38 \end{cases}$$

$abc = a_0 b_0 c_0 \cdot 3^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 7^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$

Пример: Пусть  $a = 3^7 \cdot 7^{19}$   
 $b = 3^4 \cdot 7^0$   
 $c = 3^{14} \cdot 7^{19}$

Тогда  $ab = 3^{11} \cdot 7^{19} : 3^{11} \cdot 7^{11}$ ,  $bc = 3^{18} \cdot 7^{19} : 3^{18} \cdot 7^{16}$ ,

$ac = 3^{21} \cdot 7^{38} : 3^{21} \cdot 7^{38}$

$abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$

Ответ:  $3^{25} \cdot 7^{38}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

Пусть  $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

$D = 9 - 32 = -23 < 0$ . Значит,  $f(x)$  не имеет корней.

Коэффициент при наибольшей степени  $2 > 0$ . Значит,  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) > 0$ .

Пусть  $g(x) = 2x^2 + x + 3$

$D = 1 - 24 = -23 < 0$ . Значит,  $g(x)$  не имеет корней.

Коэфф. при  $x^2$  равен  $2 > 0$  значит,  $\forall x \in \mathbb{R} g(x) > 0$

~~$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x \Rightarrow 2x^2-3x+4 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = (1-4x)^2 \Rightarrow$~~

~~$2x^2-3x+4 + 2x^2+x+3 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = (1-4x)^2 \Rightarrow$~~

~~$4x^2 - 2x + 7 - 1 - 16x^2 + 8x = 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)}$~~

Пусть  $a = 2x^2 - 3x + 4$ ,  $b = 2x^2 + x + 3$

Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \\ \sqrt{a} = \sqrt{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{cases}$$

Вернемся к  $x$ :

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-3x+4} + \sqrt{2x^2+x+3} = 1 & (1) \\ 2x^2-3x+4 = 2x^2+x+3 \end{cases}$$

$$2x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + x + 3$$

Решим (1)

$$\sqrt{2x^2-3x+4} + \sqrt{2x^2+x+3} = 1 \Rightarrow 2x^2-3x+4 + 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} + 2x^2+x+3 = 1 \Rightarrow 4x^2-2x-6 = -2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+3-2x^2)^2 = (2x^2-3x+4)(2x^2+x+3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+9+4x^4+12x-4x^3-12x^2 = 4x^4+2x^3+6x^2-6x^3-3x^2-9x+$$

$$+8x^2+4x+12 \Rightarrow 4x^4-4x^3-11x^2+6x+9 = 4x^4-4x^3+11x^2-5x+12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11x^2+6x+9-11x^2+5x-12=0 \Rightarrow 22x^2-11x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \emptyset$$

$$D = 121 - 264 < 0$$

Вернемся к совокупности:

$$\begin{cases} x \in \emptyset \\ -4x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Проверка:  $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3} = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{8} + 3\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{8} + 3\frac{1}{4}} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ - Верно}$$

Ответ:  $\frac{1}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

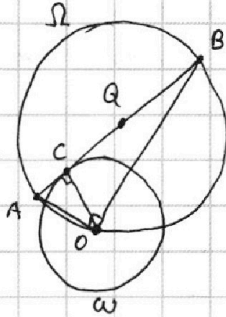
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:



Пусть  $O$  - центр окр.  $\omega$ ,  $r$  - её радиус,  
 $Q$  - центр окр.  $\Omega$ ,  $R$  - её радиус.

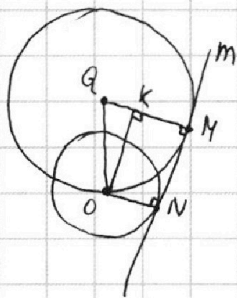
Проведём отрезки  $AQ$  и  $BO$ .  
 $AB$  - диаметр окр.  $\Omega$ ,  $O \in \Omega$ . Значит,  
 $\angle AOB = 90^\circ$  и  $\triangle AOB$  - прямоугольный

$AB$  касается  $\omega$ ,  $OC$  - радиус окр.  $\omega \Rightarrow$   
 $\Rightarrow OC \perp AB$ .

Пусть  $\angle ABO = \beta$ . Тогда  $\angle COB = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle AOC = 90^\circ - \angle COB =$   
 $= 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta = \angle ABO$

$\triangle CBO \sim \triangle COA$  по двум углам  $\Rightarrow \frac{CB}{CO} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow r = CO = \sqrt{BC \cdot AC} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow r = \sqrt{1 \cdot 16} = 4$

$AB$  - диаметр окр.  $\Omega \Rightarrow AB = 2R \Rightarrow R = \frac{AC+BC}{2} = \frac{1+16}{2} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$



Пусть  $t$  - <sup>прямая, содержащая</sup> общая касательная к двум  
окружностям и окр.  $\Omega$  касается  $t$  в точке  $M$ ,  
а окр.  $\omega$  касается  $t$  в точке  $N$ .  
Значит,  $QM \perp t$  и  $ON \perp t$ , как радиусы

Опустим перпендикуляр  $OK$  из точки  $O$  на  $QM$   
 $K \in [QM]$ , т.к.  $R > r$ .

$OK \perp KM$ ,  $KM \perp t$ ,  $ON \perp t \Rightarrow OKMN$  - прямоугольник  $\Leftrightarrow$   
 $\Rightarrow MN = OK$

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $QKO$ .

$QK = R - r$ ,  $QO = R$ ,  $OK = MN$ .

По теореме Пифагора,  $OK^2 = OQ^2 - QK^2 \Rightarrow MN^2 = R^2 - (R-r)^2 =$   
 $= (R-r+r)(R+r-r) = 2Rr - r^2$

$MN = \sqrt{2 \cdot \frac{17}{2} \cdot 4 - 4^2} = \sqrt{17 \cdot 4 - 16} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$

Общие касательные к двум данным окружностям равны

Ответ:  $2\sqrt{13}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

По условию,  $x, y, z \in \mathbb{R}$  и  $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ .

$$\begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ (3x+2y)\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right) = z \cdot \frac{2}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ 9+3\frac{x}{y} + 6\frac{y}{x} + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ (x+2y)(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y & \textcircled{1} \\ -4y = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y & \textcircled{2} \\ z = -y \end{cases}$$

Разберем два случая:

① Пусть  $\begin{cases} x = -2y \\ z = -4y \end{cases}$ . Тогда  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3 \cdot 4y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} =$   
 $= \frac{-16y^2 + 12y^2 - 4y^2}{-2y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$

② Пусть  $\begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$ . Тогда  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} =$   
 $= \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$

~~$\frac{2}{5} < 4$~~  Знают <sup>значим</sup> наибольшее возможное значение  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$

равно  ~~$4$~~

Ответ:  $4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

Пусть расстояние между пунктами А и В равно  $S$  (км),  
 $v_M$  (км/ч) - скорость мотоциклиста,  $v_B$  (км/ч) - скорость велосипедиста

По условию,

$$\begin{cases} \frac{S}{v_B} - \frac{S}{v_M} = 2 \\ v_M \cdot \frac{S}{v_B} - v_B \cdot \frac{S}{v_M} = 96 \\ \frac{S}{v_B+6} - \frac{S}{v_M+6} = 1\frac{15}{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \left( \frac{v_M - v_B}{v_M v_B} \right) = 2 \quad (1) \\ S \left( \frac{v_M^2 - v_B^2}{v_M v_B} \right) = 96 \quad (2) \xrightarrow{(2):(1)} \\ S \left( \frac{v_M - v_B}{(v_B+6)(v_M+6)} \right) = \frac{5}{4} \quad (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S \frac{v_M - v_B}{v_M v_B} = 2 \\ \frac{(v_M - v_B)(v_M + v_B)}{v_M - v_B} = 48 \quad \text{т.к. } v_M \neq v_B \\ \frac{(v_B+6)(v_M+6)}{v_M v_B} = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{2v_M v_B}{v_M - v_B} \\ v_M + v_B = 48 \\ \frac{v_M v_B + 6v_B + 6v_M + 36}{v_M v_B} = \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{2v_M v_B}{v_M - v_B} \\ 1 + \frac{6 \cdot 48 + 36}{v_M v_B} = \frac{8}{5} \quad (4) \\ v_M + v_B = 48 \end{cases}$$

$$\text{Решим (4): } \frac{36 \cdot 9}{v_M v_B} = \frac{3}{5} \quad | :3 \Rightarrow \frac{36 \cdot 3}{v_M v_B} = \frac{1}{5} \Rightarrow v_M \cdot v_B = 36 \cdot 3 \cdot 5$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} S = \frac{2v_M v_B}{v_M - v_B} \\ v_M + v_B = 48 \quad (5) \\ v_M v_B = 36 \cdot 15 \quad (6) \end{cases} \xrightarrow{(5)^2 - 4 \cdot (6)} \begin{cases} S = \frac{2v_M v_B}{v_M - v_B} \\ v_M v_B = 36 \cdot 15 \\ v_M^2 + 2v_M v_B + v_B^2 - 4v_M v_B = 48^2 - 4 \cdot 36 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \frac{2v_M v_B}{v_M - v_B} \\ (v_M - v_B)^2 = 36 \cdot 4 \\ v_M v_B = 36 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{2v_M v_B}{v_M - v_B} \\ v_M - v_B = 12 \\ v_M v_B = 36 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{2 \cdot 36 \cdot 15}{12} \Rightarrow S = 90 \text{ (км)}$$

Ответ: 90 км

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

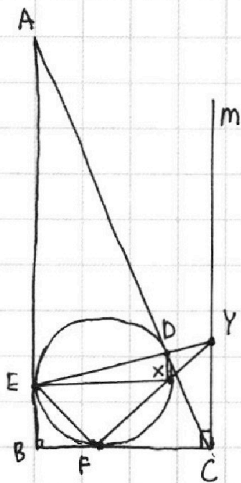
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:



Пусть  $m$  - прямая такая, что  $CG \perp m$  и  $m \perp BC$

$\angle EAD = \angle DCY$ , как накрест-лежащие при параллельных  
прямых  $AB$  и  $m$  и секущей  $AC$

$\angle ADE = \angle CDY$ , как вертикальные

$\triangle ADE \sim \triangle CDY$  по двум углам  $\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY}$

$\angle DFY = \angle DEX$ , т.к. вписанные и опираются на  $DX$

$\angle EYF$  - общий для  $\triangle FDY$  и  $\triangle EXY$

$\triangle FDY \sim \triangle EXY$  по двум углам  $\Rightarrow$

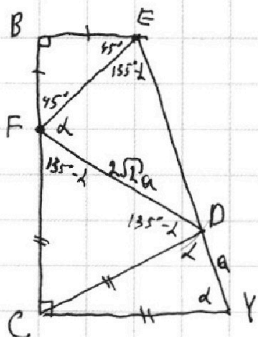
$$\Rightarrow \frac{FD}{EX} = \frac{DY}{XY} \Rightarrow \frac{XY}{EX} = \frac{DY}{FD} \Rightarrow \frac{DY}{FD} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{XY}{EX}$$

по усл.

$AE = AD$  как отрезки касательных к  $\omega \Rightarrow DC = CY$ , т.к.  $\triangle ADE \sim \triangle CDY$

$FC = CD$  как отр. касат. к  $\omega \Rightarrow CF = CD = CY$ .

$BF = BE$  как отр. касат. к  $\omega$



Пусть  $DY = a$ . Тогда  $FD = 2\sqrt{2}a$  (по ранее доказанному)

$\triangle BFE$  - прямоуголь. и равнобедр.  $\Rightarrow \angle BFE = \angle BEF = 45^\circ$

Пусть  $\angle CDY = \lambda$ . Тогда  $\angle CYD = \lambda$  по признаку  $p/d \triangle DCY$

$\angle DCY = 180^\circ - 2\lambda \Rightarrow \angle FCD = 90^\circ - 180^\circ + 2\lambda = 2\lambda - 90^\circ$

$\Rightarrow \angle CFD = \angle CDF = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\lambda + 90^\circ) = 135^\circ - \lambda$

(признак  $p/d \triangle FCD$ )

$$\angle EFD = 180^\circ - 45^\circ - 135^\circ + \lambda = \lambda$$

$$\angle FED = \angle BED - 45^\circ = (180^\circ - \angle CYE) - 45^\circ, \text{ т.к. } BE \parallel CY$$

$$\angle FED = 135^\circ - \lambda$$

По Теореме синусов,  $\frac{ED}{\sin \lambda} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sin(135^\circ - \lambda)} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sin(45^\circ + \lambda)}$ ;  $\therefore$  гл.  $\triangle FED$  (1)

$$\triangle DCY: \frac{a}{\sin \angle DCY} = \frac{CD}{\sin \angle CYD} \Rightarrow \frac{a}{\sin(180^\circ - 2\lambda)} = \frac{CD}{\sin 2\lambda} \Rightarrow \frac{a}{\sin 2\lambda} = \frac{CD}{\sin 2\lambda}$$
 (2)

$$\triangle FCD: \frac{2\sqrt{2}a}{\sin(2\lambda - 90^\circ)} = \frac{CD}{\sin(135^\circ - \lambda)} = \frac{CD}{\sin(45^\circ + \lambda)}$$
 (3)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) = CD = a \frac{\sin d}{\sin 2d}$$

$$(2) \rightarrow (3): \frac{2\sqrt{2}a}{\cos 2d} = \frac{2\sqrt{2}a}{\cos(180^\circ - 2d)} = \frac{CD}{\sin(45^\circ + d)} = \frac{a \sin d}{\sin 2d \cdot \sin(45^\circ + d)}$$

$$\frac{2\sqrt{2}a}{\sin 2(d-45^\circ)} = \frac{a \sin d}{\sin 2d \sin(45^\circ + d)} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2 \sin(d-45^\circ) \cos(d-45^\circ)} = \frac{\sin d}{\sin 2d \sin(45^\circ + d)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin d}{\sin(45^\circ + d)} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin d \cos d}{2 \cdot \sin(d-45^\circ) \cos(d-45^\circ)}$$

$$\text{Итак, } ED = 2\sqrt{2}a \cdot 2\sqrt{2} \frac{\sin d \cos d}{\sin(d-45^\circ) \cos(d-45^\circ)}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} = 8$$

Ответ: 8.



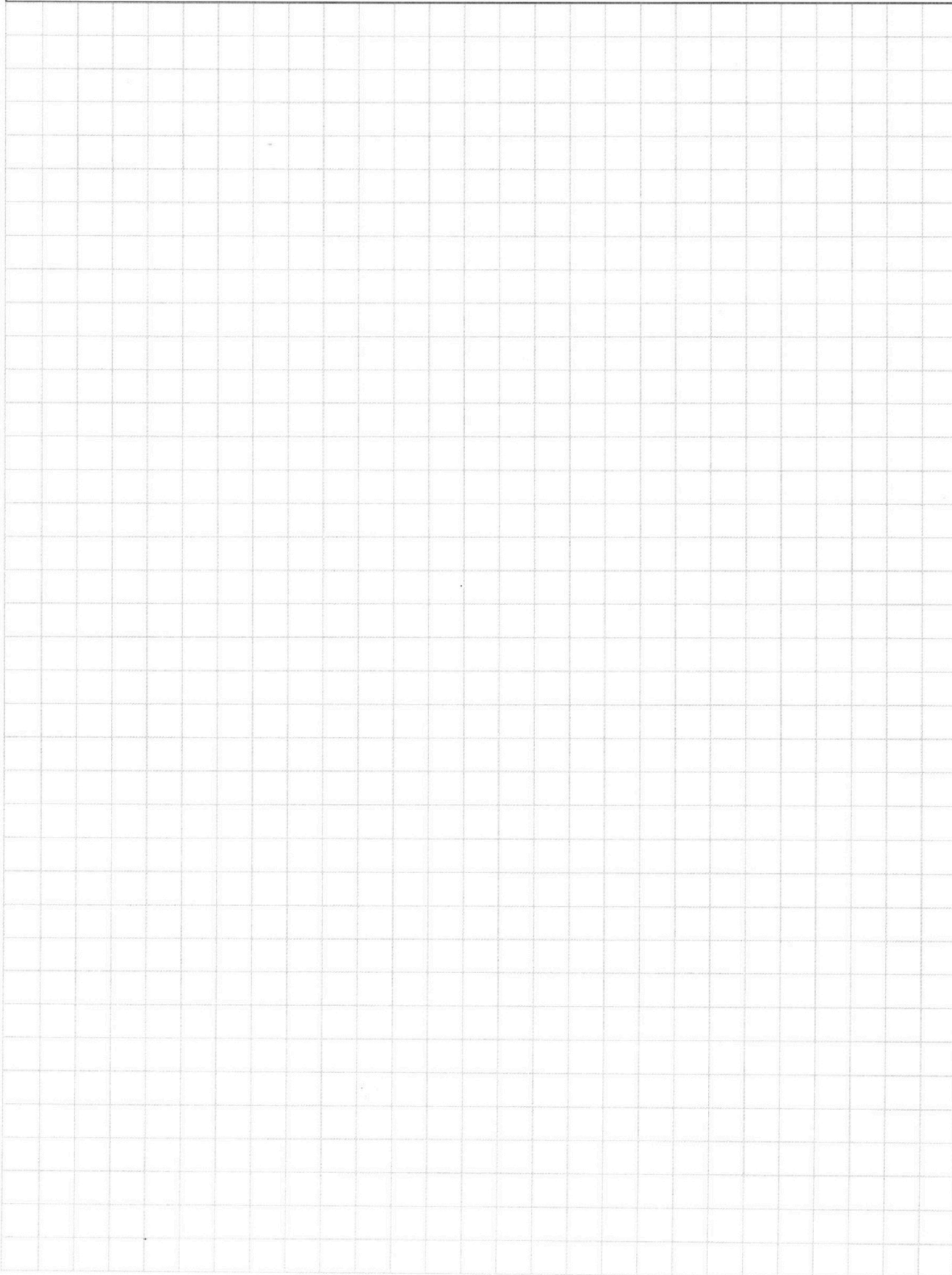
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 3^{17} \cdot 7^{11} \\ bc &: 3^{18} \cdot 7^{16} \\ ac &: 3^{21} \cdot 7^{38} \\ a &= a' \cdot 3^{d_1} \cdot 7^{d_2} \\ c &= c' \cdot 3^{d_1} \cdot 7^{d_2} \\ a'c' &: 3^{d_1} \cdot 7^{d_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc &= a'c'b' \cdot 3^{d_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 7^{d_2+\beta_2+\gamma_2} \\ &= 3^{25} \cdot 7^{33} \\ a &= 3^4 \cdot 7^7 \\ b &= 3^7 \cdot 7^{11} \\ c &= 3^8 \cdot 7^{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &\geq 21 \\ d_2 + d_2 &\geq 38 \\ d_1 + \beta_1 &\geq 11 \\ d_2 + \beta_2 &\geq 11 \\ \beta_1 + \gamma_1 &\geq 18 \\ \beta_2 + \gamma_2 &\geq 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(d_1 + \gamma_1 + \beta_1) &\geq 50 \Rightarrow d_1 + \gamma_1 + \beta_1 \geq 25 \\ 2(d_2 + \gamma_2 + \beta_2) &\geq 65 \Rightarrow d_2 + \gamma_2 + \beta_2 \geq 33 \\ 38 + 11 + 16 &= 49 + 16 = 65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 - 8ab + 16b^2 &= 15b^2 \\ (a-4b)^2 - 15b^2 &: m \end{aligned}$$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

$$\begin{aligned} a+b : m &\Rightarrow a^2+ab : m \\ a^2-8ab+b^2 : m & \quad ab+b^2 : m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2-9ab : m \\ b(b-9a) : m \\ a(a-9b) : m \\ a^2-b^2 : m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x+2y &= z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{2}{z} \Rightarrow 3yz + xz = 2xy \end{aligned}$$

$$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$$

$$\begin{aligned} a^2-8ab+b^2 \\ \Delta/4 = 16b^2 - b^2 = 15b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a,b) &= 1 \quad a+b : m \\ a^2+ab &: m \\ a^2-8ab+b^2 &: m \\ a^2-b^2 &: m \\ a^2+ab+b^2 &: m \\ (a^2-b^2) &= 6ab : m \\ \Rightarrow 6ab &: m \\ 18ab &: m \\ 4ab &: m \\ 2ab &: m \end{aligned}$$

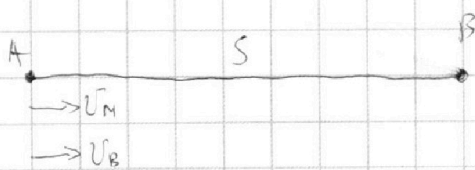
$$\frac{17}{5} \cdot \frac{1}{b} \cdot a = \frac{4b^2 \cdot b \sqrt{15}}{5}$$

$$\frac{17}{2} \cdot 4$$

$$\begin{aligned} a^2+b^2-8ab-4a+4b \\ (a-4b+1)^2 &= a^2+b^2-8ab+4a-4b \end{aligned}$$

$$(2a-2b+1)^2 = a^2+b^2-8ab+4a-4b$$

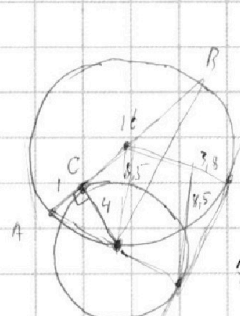
$$2a-2b+1 : m$$



$$-\frac{S}{U_M} + \frac{S}{U_B} = 27$$

$$-\frac{8}{U_M} \cdot U_B + \frac{S}{U_B} \cdot U_M = 96$$

$$S \left( \frac{U_M}{U_B} - \frac{U_B}{U_M} \right) = 96$$



$$\begin{aligned} \sqrt{254} \\ 6 \cdot 6 \cdot 8 - 4 \\ = 36 \cdot 8 - 4 \\ = 36 \cdot 8 - 4 \\ \frac{3}{x^2} \cdot 36 \cdot 15 = 15 \cdot b \\ \frac{d}{48} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S \left( \frac{U_B - U_A}{U_M U_B} \right) &= 27 \\ 6 \cdot 8^2 &= 36 \cdot 64 - 4 \cdot 36 \cdot 15 \\ &= 36(64 - 60) \end{aligned}$$

$$S \left( \frac{U_M - U_B}{U_M U_B} \right) = 96$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1  $a, b, c \in \mathbb{N}$

№2  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ , *каскарат*

№3 *по корням  $\geq 0$ , знакам, масштабом*

№4

№5  $x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z \neq 0, x^2 - 6y^2 \neq 0$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$(2x^2 - 3x + 4) / (2x^2 + x + 3) =$$

~~9/16~~  $D = 9 - 2 \cdot 4 \cdot 4 < 0$

$$= 4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 6x^3 - 3x^2 - 9x +$$

$$2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}) + 4 = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16})^2 - 1\frac{1}{8} + 4$$

$$+ 8x^2 + 4x + 12 =$$

$$2(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16})^2$$

$$= 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12$$

$$4x^2 - 2x + 7 - 2\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12} = 1 + 6x^2 - 8x$$

$$6x - 12x^2 + 6 = 2\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12}$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$36x^2 + 144x^4 + 36 - 144x^3 + 72x - 144x^2 =$$

$$2x^2 - 8x + 12x + 4 - 2x^2 - 8x + 12x + 12$$

$$6(-2x^2 + x + 1) = 2\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12}$$

$$16x^2 - 8x + 1$$

$$3(x - 2x^2 + 1) = \sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12}$$

$$9(x^2 + 4x^4 + 1 - 4x^3 + 2x - 4x^2) = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12$$

$$36x^4 - 36x^3 - 27x^2 + 18x + 9 = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12$$

$$32x^4 - 32x^3 - 38x^2 + 23x - 3 = 0$$

	32	-32	-38	23	-3
$\cdot 3$	96	-96	-114	69	-9
$+\frac{1}{2}$	32	-16	-46	$-\frac{56}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{2}$	32	-48	-114	30	
$+\frac{1}{4}$	32	-24	-50		
$-\frac{1}{4}$	32	-40	-28	30	

96-32  
192-38  
-32+18

ab : 3<sup>11</sup>7<sup>11</sup>  
bc : 3<sup>18</sup>7<sup>16</sup>  
ac : 3<sup>21</sup>7<sup>38</sup>

22-3-4 = 11-2-12  
 $\frac{18}{4}$   
 $\frac{4}{264}$

ab = x 3<sup>11</sup>7<sup>11</sup>  
bc = y 3<sup>18</sup>7<sup>16</sup>  
ac = z 3<sup>21</sup>7<sup>38</sup>  
b<sup>2</sup> =  $\frac{x}{z} y \frac{3^{36} 7^{32}}{7}$

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{z} \frac{1}{3^{10} 7^{12}}$$

~~a<sup>2</sup> = abcd~~

a = 3<sup>19</sup>7<sup>19</sup>  
b = 3<sup>18</sup>7<sup>16</sup>  
c = 3<sup>18</sup>7<sup>16</sup>

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

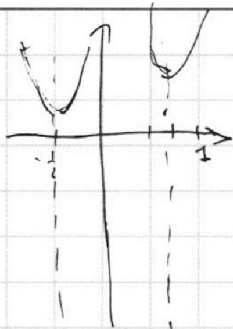
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{37}{8}$$

$$2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{7}{8}$$

$$a = 2x^2 - 3x + 4$$

$$b = 2x^2 + x + 3$$

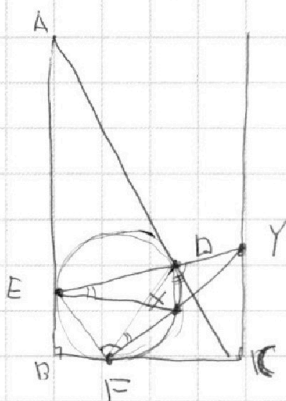
$$a - b = 1 - 4x$$

$$a + b - \sqrt{ab} - a - b$$

$$2b = 2\sqrt{ab}$$

$$b = \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$



$$4x^2 - 2x + 3 = -$$

$$2x^2 - x + 3 = -\sqrt{ab}$$

$$4x^4 + x^2 + 9 - 4x^3 - 12x^2 - 6x = 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12$$

$$2x^2 + x + 3 = 0$$

$$D = 1 -$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}$$

$$\frac{XY}{EY} = \frac{YD}{YF}$$

$$a + b + m$$

$$a^2 - 8ab + b^2 - 15b^2 = (a - 4b)^2 - 15b^2 = m$$

$$a^2 - b^2 = m$$

$$15a^2 - 15b^2 = m$$

$$16a^2 - 8ab + 16b^2$$

$$8(4a^2 - 2ab + 4b^2) = m$$

$$8($$

$$38, 314$$

$$38 - 28 = 10$$

$$10(a-1)(b-1) \equiv 10$$

$$10(a-1)(b-1) - 1 \equiv 0$$

$$a + b \equiv 10ab \equiv 0$$

$$a + b - 10ab \equiv 0$$

$$a(1 - 10b)$$

$$\text{НОД}(a^2 - 8ab + b^2, a + b)$$

$$(a^2 - 8ab + b^2, a + b) = (a^2 - 8ab + b^2,$$

$$a^2 + ab) = (b^2 - 9ab, a^2 + ab) =$$

$$= (10a - 10ab)(a + b, 10ab)$$

$$(a^2 - 8ab + b^2, a + b) = (b^2 - 9ab, a + b) =$$

$$(10ab, a + b)$$

$$(a, b) = 1$$

$$10ab - 10a - 10b = 10a(b-1) - 10b + 10 \equiv 10$$

$$(a-1)(b-1) \equiv$$

$$(10a - 10b)$$

$$10(a-1)(b-1) \equiv 10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$$

$$3x^2 - 4y^2 = z^2$$

$$g + 2 + \frac{3x}{y} + \frac{6y}{x} = 2$$

$$(a+b, +10ab) = (a+b, 10((a-1)/(b-1) - 1))$$

$$(a, b) = 1$$

$$\frac{3x}{y} + \frac{2y}{x} = 3$$

$$10abx - 10a - 10b = 10a(b-1) - 10b + 10 - 10$$

$$x^2 + 2y^2 = -3xy$$

$$10(a-1)(b-1) - 10$$

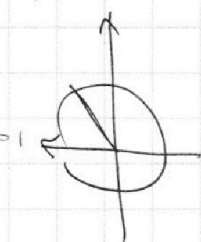
$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$10((a-1)(b-1) - 1) = m$$

$$a = 9 - 8 = 1$$

$$10(a-1)(b-1) - 1 = m$$

$$(x - 2y)(x - y) = 0$$



$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin(45^\circ + \alpha)} = \frac{x}{\sin \alpha}$$

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin \alpha}$$

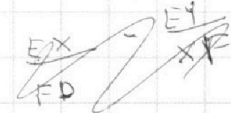
$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin(45^\circ + \alpha)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{a \sin \alpha} = \frac{\sin 1}{\sin(45^\circ + \alpha)}$$

$$\frac{DY}{FY} = \frac{XY}{EY}$$

$$DY + ED$$

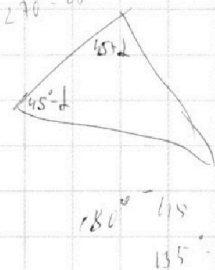
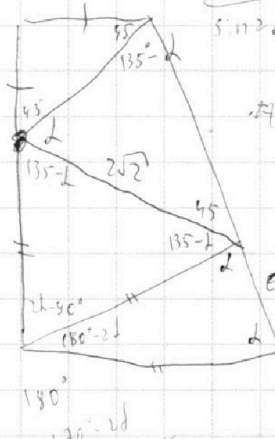
$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY}$$



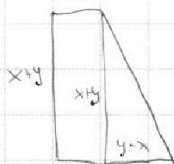
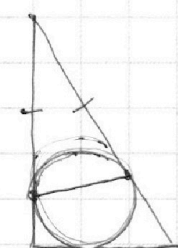
$$\frac{EX}{FD} = \frac{XY}{DY}$$

$$\frac{FD}{DY} = 2\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + x^2 + 2y^2 = 2x^2 + 2y^2$$

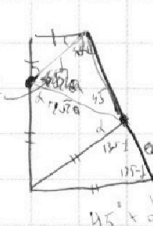
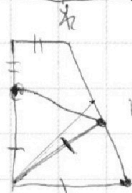


$$\frac{CD}{\sin(45^\circ + \alpha)} = \frac{CB}{\sin \alpha}$$



$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{2\sqrt{2} \cos 45^\circ \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha \sin \alpha}$$

$$\frac{CD}{\sin(45^\circ + \alpha)} = \frac{2\sqrt{2} \sin \alpha}{\sin 2\alpha}$$



$$180^\circ - 2\alpha$$

$$90^\circ - 180^\circ + 2\alpha$$

$$2\alpha - 90^\circ$$

$$180^\circ - 2\alpha$$

$$2\alpha - 90^\circ$$

$$135^\circ - \alpha$$





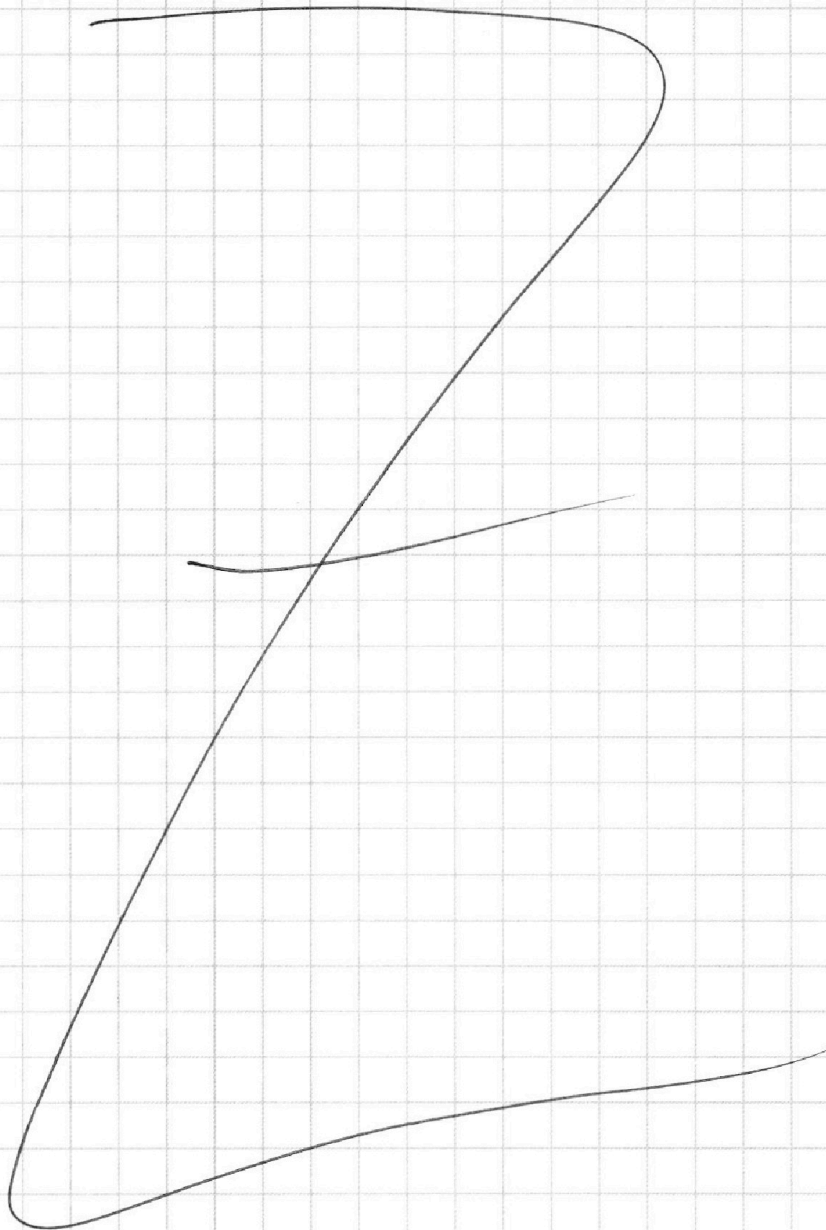
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

