



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  - некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CDM) = -\frac{1}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  ; Два корня  $x_1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4t^2 - 4}{1} \Rightarrow$   
м.к.  $x_1 \cdot x_2 > 0$  - произведение  $\Rightarrow 4t^2 - 4 > 0 \Rightarrow 4t^2 > 4 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow |t| > 1$   
 $D = b^2 - 4ac$  ;  $D = (2\sqrt{3} \cdot t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4t^2 - 4) = 12t^2 - 16t^2 + 16 = -4t^2 + 16$   
м.к. по знаку  $\Rightarrow$  разность  $2 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow -4t^2 + 16 > 0$  ;  $-4t^2 > -16$  ;  $t^2 < 4$  ;  
 $t^2 < 4$  ;  $|t| < 2 \Rightarrow$   
 $\begin{cases} |t| > 1 \\ |t| < 2 \end{cases} \Rightarrow$   ~~$t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$~~   $\Rightarrow t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$

Ответ:  $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a+b=40 \Rightarrow b=40-a$ ; к.к. Числовый

$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$ ;

$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) =$

$= (2a-40)(2a-25) = 17p^5$ ;  $2a - \text{числ.}, 40 - \text{числ.}, \text{числ.} - \text{числ.} = \text{числ.} \Rightarrow$

$2a-40 - \text{числ.} \Rightarrow 2a-40 \equiv 2 \Rightarrow 17p^5 : 2$ ;  $17 \cdot 2 = 7p^5 : 2$ ;

к.к.  $p$  - простое, то оно делится на себя и на  $p \Rightarrow$  если  $p^5 : 2 \Rightarrow$

$p=2 \Rightarrow 17p^5 = 17 \cdot 2^5 = 17 \cdot 32 = 544$

$(2a-40)(2a-25) = 544 \Rightarrow 4a^2 - 130a + 1000 = 544$ ;

$4a^2 - 130a + 456 = 0$ ,  $2a^2 - 65a + 228 = 0 \Rightarrow$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -\frac{b}{a} = 32,5 \\ a_1 \cdot a_2 = \frac{c}{a} = 114 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 4; a_2 = 28,5 - \text{п.к.}, \text{к.к. } a \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow a=4$ ;  $a+b=40 \Rightarrow b=36$

Ответ:  $a=4$ ;  $b=36$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итого порт =  $7 \cdot 3 = 9$  <sup>и 4 штифта</sup>  $\rightarrow$  всего 9 мест для 8 человек = 7

1 место оставшихся штифтов.  $\rightarrow$  Будем 2 возможные ряда

ряды  $x, y$  и с пустой партией, где - во сколько способов разместим

три человека разного роста = 1 (по возрастанию роста)

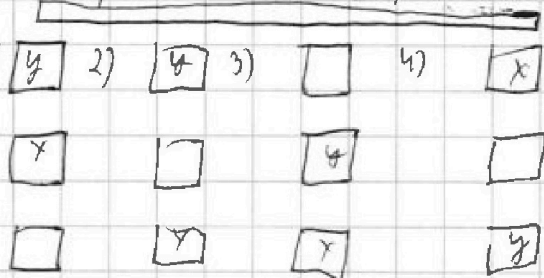
Во сколько способов встроим штифт на заданной ряду  $C_3^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$ , <sup>из 8 штифтов</sup>

На втором заданном ряду останется на встроить 6 человек  $\rightarrow$  способов =  $C_6^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$ , где второй ряд

останется для человека, пусть из ряда  $x$  и  $y$  состав, пусть  $x \neq y$

$\rightarrow$  всего способов разместить их, чтобы ни два парня

вместе = 4



Всего, не учитывая все 3 ряда, на эти ряды можно

поставить штифты и будем получать новые способы. Всего способов

$$(C_3^3 \cdot C_3^3 \cdot 4) \cdot 3! = \left( \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 4 \right) \cdot 3!$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 4 \right) \cdot 3!$$



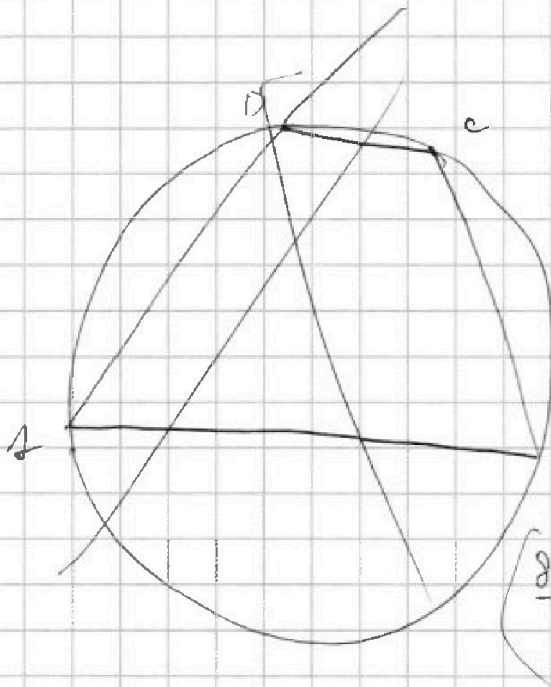
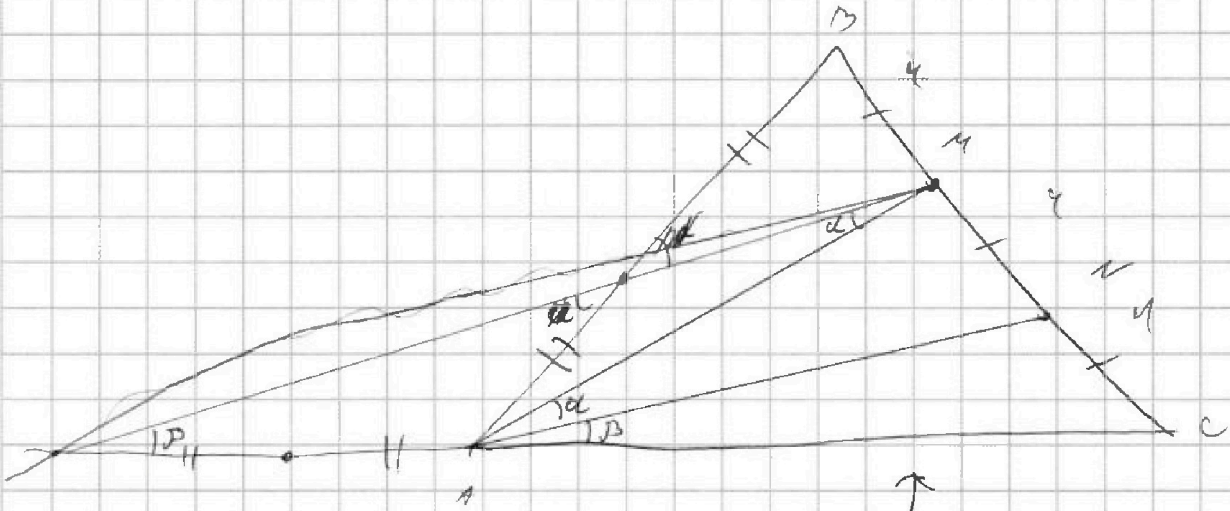
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

*Черновик*



<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 120 \cdot 20 = 2400$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

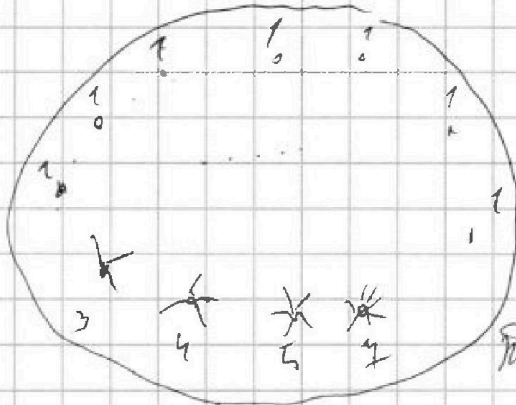
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6. Числовые

Представьте себе эту задачу в виде графа.

Каждая вершина графа = деревце, соединим те <sup>деревца (вершины)</sup> вершины, между которыми есть дороги. Получим в итоге граф и вершины.



и вершин. Убедитесь что у каждой вершины степени равны 2, 3, 5, 7. У остальных  $deg = 1$ .

Теперь мы убедились, что из любой

вершины в любую другую можно добраться единственным способом  $\rightarrow$  этот граф - дерево. (с одной стороны

у дерева на  $n$  вершинах  $n-1$  ребро, с другой стороны

каждое ребро =  $\frac{\sum \text{степени вершин}}{2}$ , у 4 вершин степени = 3, 4, 5, 7.)

а у остальных  $n-4$  равны по единице  $\Rightarrow$

$$n-1 = \frac{(n-4) \cdot 1 + 3 + 4 + 5 + 7}{2} \Rightarrow n-1 = \frac{n+15}{2} \Rightarrow$$

$$2n-2 = n+15 \Rightarrow n=17$$

Ответ: 17 вершин или 17 г 17 деревьев.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad x+y=1; \quad \text{или} \quad x=1-y \Rightarrow x^2=y^2=1; \quad 2(xy) - (x^2+y^2) = 1 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2=1; \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2=1^2 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=1 \Rightarrow$$

$$(x^2+2xy+y^2) - (x^2+y^2) = 1-1=0 \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow$$

$$x_1=0 \quad y_1=1; \quad x_2=1; \quad y_2=0.$$

$$\text{Ответ: } (0; 1); (1; 0); (1; 1); (0; 1); (1; 0)$$









На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

*черновик*

$$2x + 2y - x^2 - y^2 = 2x + 2y - x^2 - y^2 - 1 - 1 + 1 + 1$$

$$(-x^2 + 2x + 1) + (-y^2 + 2y - 1) + 2 = -(x-1)^2 + (y-1)^2 + 2$$

$$2 - (x+1)^2 - (y+1)^2 \quad 2x + 2y - x^2 - y^2 =$$

$$(x+y-2) < 1$$

$$2k - x^2 = (k-x^2)^2$$

$$x+y \in [1, 3]$$

$$2k - y^2 - k^2 + 2kk + k^2 = 2k - k^2 + 2kx$$

$$x+y=k \rightarrow y=k-x$$

$$2k - k^2 + 2k + kx > 0$$

$$-k^2 + 2k > -2kx \quad x+y = 1, 2, 3$$

$$x(2-x) + y(2-y)$$

$$2x > k-2$$

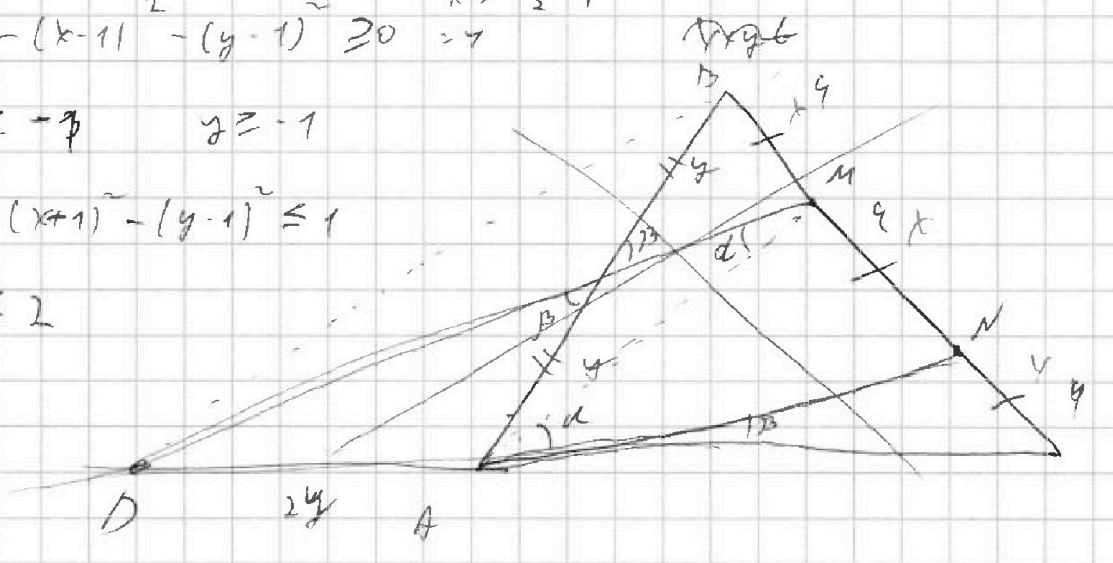
$$x > \frac{k}{2} - 1$$

$$2 - (x-1)^2 - (y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \geq -1 \quad y \geq -1$$

$$2 - (x+1)^2 - (y+1)^2 \leq 1$$

$$x \leq 2$$



$$x=y$$

*Handwritten signatures and scribbles at the bottom of the page.*



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$y^2 + 2\sqrt{3}x + 4x^2 - 4 = 0$$

$$D = 12b^2 - 16c^2 + 16 = 10 \cdot 4b^2 - 16c^2 + 16 \geq 0$$

$$4b^2 - c^2 \geq 0$$

$$|b| \leq c$$

$$|b| \geq 1$$

$$p = 2 \Rightarrow 2^5 = 32$$

$$|b| \geq 2$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$17 \cdot 22 = 2^5 \cdot 17$$

$$a + b = 40$$

$$b = 40 - a$$

$$2 - 17$$

$$-32 \cdot -17$$

$$76 - 40 = 36$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = 17p^5$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) = 17p^5$$

$$(2a-40)(2a-25) = 17p^5$$

$$0 \leq 4 \leq 21$$

$$2a \in [12, 5]$$

$$2^x \cdot 2^y \cdot 17$$

$$2a - 25 \geq 0$$

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

$$(4, 36); (21, 19); (38, 2)$$

$$32$$

$$\times 17$$

$$\hline 544$$

$$32$$

$$\hline 544$$

$$(2a-40)(2a-25) = 17 \cdot 2^5$$

$$4a^2 - 80a - 80a + 1000 = 17 \cdot 2^5$$

$$4a^2 - 160a + 1000 - 17 \cdot 2^5 = 0$$

$$a_1 + a_2 = \frac{130}{4} = 32,5$$

$$a_1 = 4, a_2 = 28,5$$

$$a_1 \cdot a_2 = 114$$

$$n-1 = a_1 - a_2 = 24$$

$$n-1 = (n-4) + 3 \cdot 4 + 6 + 7$$

$$n-1 = \frac{n+75}{2}$$

$$2n-2 = n+75$$

$$n = 77$$

