



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

1. ~~а) делится на $2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow$ существует такое~~

1. $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow ab, bc, ac \in \mathbb{N}$. ~~а) делится на $2^{15} \cdot 7^{11}$, существует такое~~
~~такое ab и $2^{15} \cdot 7^{11}$ - взаимно простые числа \Rightarrow существует такое взаимно простое~~
 p , что $ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot p$; аналогично $bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot q$ ($q \in \mathbb{N}$) и $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot r$
($r \in \mathbb{N}$).

$$2. ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot p \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot q \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot r$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot pqr$$

$$(abc)^2 = \cancel{2^{55} \cdot 7^{68}} \cdot 2^{54} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{2pqr \cdot 2^{54} \cdot 7^{68}} = \sqrt{2pqr} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$3. \text{ ~~а) } a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N}; 2^{27} \cdot 7^{34} \in \mathbb{N}; abc = \sqrt{2pqr} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34}~~$$

$2, p, q, r \in \mathbb{N} \Rightarrow 2pqr \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2pqr}$ - натуральное или иррациональное
число (иначе $\sqrt{2pqr} = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 1, m$ и n взаимно просты, ~~тогда~~
 $2pqr = \frac{m^2}{n^2}$, где $m^2 \in \mathbb{N}, n^2 \in \mathbb{N}, n^2 \neq 1, m^2$ и n^2 взаимно просты, ~~откуда~~
следует, что $2pqr \notin \mathbb{N}$, что неверно). Если $\sqrt{2pqr}$ - иррациональное
число, то $\sqrt{2pqr} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34}$ как произведение иррационального и ~~натураль-~~
ного ~~числа~~ иррационально, то есть $abc = \sqrt{2pqr} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34} \notin \mathbb{N}$,
что неверно $\Rightarrow \sqrt{2pqr}$ - натуральное число.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $\sqrt{2pq^2r}$ - натуральное число $\Rightarrow 2pq^2r$ - полный квадрат натурального ^{числа}.

$$p, q, r \in \mathbb{N} \Rightarrow p, q, r \geq 1 \Rightarrow 2pq^2r \geq 2.$$

5. Наименьшее значение $abc = \sqrt{2pq^2r} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}$ достигается
при наименьших значениях $\sqrt{2pq^2r}$, наименьшее значение
 $\sqrt{2pq^2r}$ - при наименьших значениях $2pq^2r$. $2pq^2r \geq 2$, $2pq^2r$ - полный
квадрат. 2 и 3 не являются полными квадратами \Rightarrow
наименьшее значение $2pq^2r$ ~~не~~ - это $4 = 2^2$, и тогда $abc =$
 $= \sqrt{2pq^2r} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39} = \sqrt{4} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39} = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

$$4. abc = a \cdot bc = a \cdot q \cdot r \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \text{ делится на } 7^{39}, abc = \sqrt{2pq^2r} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39} = (b \cdot r \cdot 2^{23}) \cdot 7^{39}$$

$\sqrt{2pq^2r} \cdot 2^4 = b \cdot r \cdot 7^{39} \Rightarrow \sqrt{2pq^2r} \cdot 2^4$ делится на 7^5 . П.к. 2 и 7 - ~~все~~
различные простые числа, но 2^4 не делится на 7 в какой-
либо натуральной степени $\Rightarrow \sqrt{2pq^2r} : 7^5$.

5. $\sqrt{2pq^2r}$ - натуральное число, $\Rightarrow 2pq^2r$ - полный квадрат. $\sqrt{2pq^2r}$

делится на $7^5 \Rightarrow 2pq^2r$ делится на $7^{10} \Rightarrow 2pq^2r = t \cdot 7^{10}$, где $t \in \mathbb{N}$.

П.к. $2pq^2r$ - полный квадрат, но $2pq^2r$ делится на любое простое
в четной степени. П.к. $2pq^2r = p \cdot q^2 \cdot r \cdot 2$ но $2pq^2r$ кратное $2^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2pq^2r$ кратное 2^2 . Наименьшее ^{натуральное} значение $2^2 \cdot 7^{10}$.

Это $2^2 \cdot 7^{10} \Rightarrow$ наименьшее значение $2pq^2r = 2^2 \cdot 7^{10} \Rightarrow$

\Rightarrow наименьшее значение $abc = \sqrt{2pq^2r} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}$ - это

$$\sqrt{2^2 \cdot 7^{10}} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39} = 2^{28} \cdot 7^{39}.$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

1. $(a+b)$ и $(a^2 - 7ab + b^2)$ можно сократить на $m \Rightarrow \frac{a+b}{m} \in \mathbb{N}$ (числитель и знаменатель делимые, числитель кратен знаменателю).

Пусть $\frac{a+b}{m} = x$.

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{a^2 - 7ab + b^2}{m}} = \frac{x}{\frac{a^2 - 7ab + b^2 - 9ab}{m}} = \frac{x}{\frac{(a+b)(a+b) - 9ab}{m}} = \frac{x}{\frac{(a+b)(a+b-9ab/(a+b))}{m}}$$

2. $(a^2 - 7ab + b^2)$ делится на $m \Rightarrow \frac{a^2 - 7ab + b^2}{m} \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{m} = y. \text{ Тогда } y = \frac{a^2 - 7ab + b^2 - 9ab}{m} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 9ab}{m} = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{m} = \frac{(a+b)(a+b) - 9ab}{m} = \frac{(a+b)(a+b-9ab/(a+b))}{m}$$

$$x(a+b) \in \mathbb{N}, \frac{9ab}{m} > 0, y = x(a+b) - \frac{9ab}{m} \Rightarrow \frac{9ab}{m} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9ab$ делится на m .

3. Докажем, что m не может быть больше 9, от противного:

предположим, что $m > 9$. Тогда $\frac{9ab}{m} < 9ab$. Или же $a \mid m$ и $b \mid m$ были взаимно простыми, но $\frac{9ab}{m}$ не могло бы

быть целым \Rightarrow либо $a \mid m$, либо $b \mid m$ есть общая делитель, отличный от 1. Мы бы ограничились случаем общей делитель $a \mid m$ $k > 1$. Тогда $a = pk, m = qk$ ($p, q \in \mathbb{N}$). Известно, что

$$\frac{a+b}{m} = x (x \in \mathbb{N})$$

$$a+b = xm$$

$$pk + b = xqk \Rightarrow b = (xq - p)k. x, q, p \in \mathbb{N} \Rightarrow xq - p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$\Rightarrow b$ делится на k . Но тогда дробь $\frac{a}{b}$ сократится на k . Тогда вернее $\Rightarrow m \leq 9$. При $m = 9$ $\frac{9ab}{m} = ab$, и дробь $\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$ сократится на m так можно выбрать $a=1, b=8$:

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{9}{1 - 56 + 64} = \frac{9}{9} = 1.$$

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

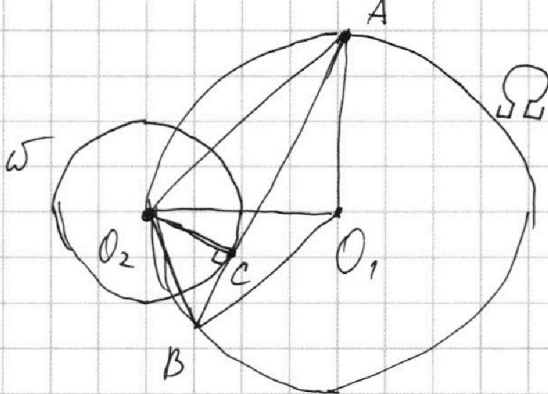


Задача 3.

1. Пусть центры окр. $\Omega - O_1$, окр. $\omega - O_2$.

Существует 2 случая:

I. Плоски O_1O_2 лежит на прямой касательной к ω .



Условные обозначения:

\in - принадлежность

\perp - перпендикулярность

n/g - взаиморасположение (параллельно или нет)

окр. - окружность

н.к. - не как

т. - точка

2. Пусть $AB = 24x$, $AC = y$, $CB = z$. Тогда $y : z = AC : CB = 17 : 7 \Rightarrow z = \frac{7}{17}y$;

$$y + z = AC + CB = AB = 24x \Rightarrow y + \frac{7}{17}y = 24x \Rightarrow \frac{24}{17}y = 24x \Rightarrow y = 17x \Rightarrow z = 7x.$$

3. K_3 касается окр. ω в т. $C \Rightarrow O_2C \perp K_3$ по св-ву точки касания; тогда $\Delta O_2CB \sim \Delta O_2CA$ ($\angle O_2CB = 90^\circ$, $\angle O_2CA = 90^\circ$) $\Rightarrow O_2B^2 = O_2C^2 + CB^2 = 7^2 + 7^2x^2$ по теореме Пифагора и $O_2A^2 = O_2C^2 + CA^2 = 7^2 + 17^2x^2$ по теореме Пифагора ($O_2C = 7$, т.к. $C \in \omega$, а радиус $\omega - 7$).

3. Пусть $\angle O_1O_2A = \alpha$, $\angle O_1O_2B = \beta$. В ΔO_1O_2A по теореме косинусов

$$O_2A^2 = O_1A^2 + O_1O_2^2 - 2O_1A \cdot O_1O_2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{O_1A^2 + O_1O_2^2 - O_2A^2}{2O_1A \cdot O_1O_2} = \frac{13^2 + 13^2 - 7^2 - 17^2x^2}{2 \cdot 13 \cdot 13} = \frac{2 \cdot 13^2 - (7^2 + 17^2x^2)}{2 \cdot 13^2}$$

$$= 1 - \frac{7^2 + 17^2x^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$\text{В } \Delta O_1O_2B \text{ по теореме косинусов } O_2B^2 = O_1O_2^2 + O_1B^2 - 2O_1O_2 \cdot O_1B \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{O_1O_2^2 + O_1B^2 - O_2B^2}{2O_1O_2 \cdot O_1B} = \frac{13^2 + 13^2 - 7^2 - 7^2x^2}{2 \cdot 13^2} =$$

$$= 1 - \frac{7^2 + 7^2x^2}{2 \cdot 13^2} \quad (O_1O_2 = O_1A = O_1B = 13, \text{ т.к. } O_1, O_2, A, B \in \Omega, \text{ радиус } \Omega - 13).$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1^2 - \left(1 - \frac{7^2 + 17^2x^2}{2 \cdot 13^2}\right)^2} = \sqrt{\left(1 - 1 + \frac{7^2 + 17^2x^2}{2 \cdot 13^2}\right) \left(1 + 1 - \frac{7^2 + 17^2x^2}{2 \cdot 13^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{O_2A^2}{2 \cdot 13^2} \cdot \left(2 - \frac{O_2A^2}{2 \cdot 13^2}\right)}; \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1^2 - \left(1 - \frac{7^2 + 7^2x^2}{2 \cdot 13^2}\right)^2} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3 (продолжение).

3 (продолжение). ... = $\sqrt{\left(1 - 1 + \frac{7^2 + 7^2 x^2}{2 \cdot 13^2}\right) \left(1 + 1 - \frac{7^2 + 7^2 x^2}{2 \cdot 13^2}\right)}$ =
 $= \sqrt{\frac{0_2 B^2}{2 \cdot 13^2} \left(2 - \frac{0_2 B^2}{2 \cdot 13^2}\right)}$.

4. В $\triangle AOB$ по теореме косинусов

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \Rightarrow \cos \angle AOB = \frac{AO^2 + OB^2 - AB^2}{2AO \cdot OB} =$$

$$= \frac{13^2 + 13^2 - 24^2 x^2}{2 \cdot 13^2} = 1 - \frac{24^2 x^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$\cos \angle AOB = 1 - \frac{24^2 x^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$\cos(\angle AOB_2 + \angle O_2OB) = 1 - \frac{24^2 x^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 1 - \frac{24^2 x^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = 1 - \frac{24^2 x^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$\left(1 - \frac{0_2 A^2}{2 \cdot 13^2}\right) \left(1 - \frac{0_2 B^2}{2 \cdot 13^2}\right) - \sqrt{\frac{0_2 A^2}{2 \cdot 13^2} \cdot \left(1 - \frac{0_2 A^2}{2 \cdot 13^2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{0_2 B^2}{2 \cdot 13^2} \cdot \left(2 - \frac{0_2 B^2}{2 \cdot 13^2}\right)} =$$

$$= 1 - \frac{24^2 x^2}{2 \cdot 13^2} \quad (2 \cdot 13^2)^2 \neq 0$$

$$(2 \cdot 13^2)^2 \left(1 - \frac{0_2 A^2}{2 \cdot 13^2}\right) \left(1 - \frac{0_2 B^2}{2 \cdot 13^2}\right) - \sqrt{(2 \cdot 13^2)^4 \cdot \frac{0_2 A^2}{2 \cdot 13^2} \cdot \left(2 - \frac{0_2 A^2}{2 \cdot 13^2}\right) \cdot \frac{0_2 B^2}{2 \cdot 13^2} \cdot \left(2 - \frac{0_2 B^2}{2 \cdot 13^2}\right)} =$$

$$= (2 \cdot 13^2)^2 - 24^2 x^2 \cdot 2 \cdot 13^2$$

$$(2 \cdot 13^2 - 0_2 A^2) (2 \cdot 13^2 - 0_2 B^2) - \sqrt{0_2 A^2 (2 \cdot 13^2 - 0_2 A^2) 0_2 B^2 (2 \cdot 13^2 - 0_2 B^2)} =$$

$$= (2 \cdot 13^2)^2 - 24^2 x^2 \cdot 2 \cdot 13^2$$

Пусть $2 \cdot 13^2 = k$:

$$(k - 0_2 A^2)(k - 0_2 B^2) - \sqrt{0_2 A^2 (2k - 0_2 A^2) 0_2 B^2 (2k - 0_2 B^2)} = k^2 - 24^2 x^2 \cdot k$$

$$k^2 - k(0_2 A^2 + 0_2 B^2) + (0_2 A \cdot 0_2 B)^2 - 0_2 A \cdot 0_2 B \sqrt{(2k - 0_2 A^2)(2k - 0_2 B^2)} = k^2 - 24^2 x^2 \cdot k$$

$$k(24^2 x^2 - 0_2 A^2 - 0_2 B^2) + (0_2 A \cdot 0_2 B)^2 = 0_2 A \cdot 0_2 B \sqrt{(2k - 0_2 A^2)(2k - 0_2 B^2)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 31 (проф. уровень).

1 (проф. уровень).

Приведем обе части уравнения в квадрат:

$$k^2(24^2x^2 - O_2A^2 - O_2B^2) + (O_2A \cdot O_2B)^4 + 2 \cdot k(24^2x^2 - O_2A^2 - O_2B^2)(O_2A \cdot O_2B)^2 =$$

$$= (O_2A \cdot O_2B)^2 (2k - O_2A^2)(2k - O_2B^2).$$

$$5. 24^2x^2 - O_2A^2 - O_2B^2 = \cancel{24^2x^2} 576x^2 - 49 - 49x^2 - 49 - 289x^2 = 238x^2 - 98.$$

$$6. k^2(238x^2 - 98) + 2k(238x^2 - 98)(O_2A \cdot O_2B)^2 = (O_2A \cdot O_2B)^2 \cancel{(O_2A \cdot O_2B)^2} \cdot$$

$$\cdot ((2k - O_2A^2)(2k - O_2B^2) - (O_2A \cdot O_2B)^2)$$

$$k^2(238x^2 - 98) + 2k(238x^2 - 98)(O_2A \cdot O_2B)^2 = (O_2A \cdot O_2B)^2 (4k^2 - 2k(O_2A^2 + O_2B^2) +$$

$$+ (O_2A \cdot O_2B)^2 - (O_2A \cdot O_2B)^2)$$

$$k \cdot k(238x^2 - 98) + k \cdot 2(238x^2 - 98)(O_2A \cdot O_2B)^2 = (O_2A \cdot O_2B)^2 \cdot 2k(2k - O_2A^2 - O_2B^2)$$

$$k(238x^2 - 98) + k \cdot 2(238x^2 - 98)(O_2A \cdot O_2B)^2 = (O_2A \cdot O_2B)^2 \cdot 2 \cdot (2k - O_2A^2 - O_2B^2)$$

$$k(238x^2 - 98) = (O_2A \cdot O_2B)^2 (4k - 2(O_2A^2 + O_2B^2) + 2(238x^2 - 98))$$

$$k(238x^2 - 98) = (O_2A \cdot O_2B)^2 (4k - 2(O_2A^2 + O_2B^2) - 2(24^2x^2 - O_2A^2 - O_2B^2))$$

$$k(238x^2 - 98) = (O_2A \cdot O_2B)^2 (4k - 2O_2A^2 - 2O_2B^2 - 2 \cdot 24^2x^2 + 2O_2A^2 + 2O_2B^2)$$

$$k(238x^2 - 98) = (O_2A \cdot O_2B)^2 (4k - 2 \cdot 24^2x^2)$$

$$238 \cdot k \cdot x^2 - 98k = (49 + 49x^2)(49 + 289x^2)(4k - 2 \cdot 576x^2)$$

$$7 \cdot 34k \cdot x^2 - 7 \cdot 14 \cdot k = 7^2(1 + x^2)(7^2 + 17^2x^2)(4k - 2 \cdot 24^2x^2)$$

$$7 \cdot 34 \cdot kx^2 - 7 \cdot 14 \cdot k = 7^2(7^2 + 7^2x^2 + 17^2x^2 + 17^2x^4)(4k - 2 \cdot 24^2x^2)$$

$$7 \cdot 34 \cdot kx^2 - 7 \cdot 14 \cdot k = 7^2(7^2 + \cancel{2 \cdot 17^2} 338x^2 + 17^2x^4)(4k - 2 \cdot 24^2x^2)$$

$$2 \cdot 7 \cdot 34 \cdot kx^2 - 2 \cdot 7 \cdot k = 7(7^2 + 338x^2 + 17^2x^4) \cdot 2(2k - 24^2x^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3 (продолжение).

6 (продолжение).

$$17k \cdot x^2 - 7k = 7(7^2 \cdot 2k - 7^2 \cdot 24^2 x^2 + 2 \cdot 17^2 x^2 \cdot 2k - 2 \cdot 17^2 \cdot 24^2 x^4 +$$
$$+ 44^2 x^4 \cdot 2k - 17^2 \cdot 24^2 \cdot x^6)$$

$$17k x^2 - 7k = \cancel{17k} \cdot 7^3 \cdot 2k - 7^3 \cdot 24^2 x^2 + \cancel{17k} \cdot x^2 - 7 \cdot 24^2 k x^4 +$$
$$+ 7 \cdot 17^2 \cdot 2k x^4 - 7 \cdot 17^2 \cdot 24^2 x^6$$

$$7 \cdot 17^2 \cdot 24^2 x^6 + 7k(17^2 \cdot 2 - 24^2) x^4 + 44k^2 x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.

$$1. \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2$$

$$2. 3x^2 - 6x + 2 = (1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 81x^2 + 3x^2 + 3x + 1 - 18x - 18x\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 + 3x^2 + 3x + 2 - 18x - 3x^2 + 6x - 2 - (18x - 2)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$81x^2 - 9x = (18x - 2)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x(9x - 1) = (9x - 1)(2\sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$(9x - 1)(9x - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 1 = 0 \\ 9x - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 9x - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 9x \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

~~3. $(9x - 1)^2 = 3x^2 + 3x + 1$ 23. ~~81~~~~

3. $81x^2 = 12x^2 - 12x + 4$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 69 \cdot (-4) = 144 + 1104 = 1248 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{1248}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{138} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

4. Проанализируйте рисунок 2:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 9x \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 0,75 + 0,25 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

Верно ли? $\frac{3}{4}(3x+1)^2 + 0,25 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x \geq 0 \\ x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \\ x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4 (продолжение).

4) (продолжение).

$$1) 78 > 64 \Rightarrow \sqrt{78} > 8 \Rightarrow \cancel{16} + 2\sqrt{78} > 16 \Rightarrow 6 - 2\sqrt{78} < -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < -10 < 0 \Rightarrow x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \text{ не подходит.}$$

$$2) 78 > 64 \Rightarrow \sqrt{78} > 8 \Rightarrow 2\sqrt{78} > 16 \Rightarrow 6 + 2\sqrt{78} > 22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > \frac{22}{69} > \frac{10}{69} = \frac{1}{6.9} > 0 \Rightarrow \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \text{ подходит.}$$

5. Продолжение пункта 1:

$$\dots \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 3 - 1 \geq 0 \\ 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-1)^2 \geq 1 \\ \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1 \\ x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

тип $x = \frac{1}{3}$:

$$1) \sqrt{3\left(\frac{1}{9} - 1\right)^2} = 3 \cdot \frac{8^2}{9^2} = 3 \cdot \frac{64}{81} = \frac{64}{27} > \frac{22}{27} = 1; \sqrt{3\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{9}\right) + 1} \geq 0$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{3} - 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \text{ подходит.}$$

$$2) \sqrt{3\left(\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} - 1\right)^2} = 3 \cdot \frac{2\sqrt{78} - 63}{69} \cdot 2 \quad \text{тип } x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$64 < 48 > 81 \Rightarrow 8 < \sqrt{78} < 9 \Rightarrow 16 < 2\sqrt{78} < 18 \Rightarrow 22 < 2\sqrt{78} + 6 < 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{22}{69} < \frac{2\sqrt{78} + 6}{69} < \frac{36}{69} \Rightarrow \frac{22}{69} < \frac{2\sqrt{78} + 6}{69} < \frac{12}{23} < \frac{1}{2}; 9x - 1 >$$

$$> 9 \cdot \frac{22}{69} - 1 = \frac{198}{69} - 1 = \frac{29.68 + 69}{23} - 1 = 2 \frac{20}{23} - 1 = 1 \frac{20}{23};$$

$$3x^2 + 3x + 1 < 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{6}{4} + \frac{4}{4} = \frac{13}{4} = 2 \frac{3}{4};$$

$$(9x - 1)^2 > \left(1 \frac{20}{23}\right)^2 = \frac{1 + 2 \cdot \frac{20}{23} + 1 + \frac{400}{529}}{23^2} = 1 + \frac{40}{23} + \frac{400}{529} = \dots$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (проделана).

5 (проделана).

$$= 1 + 1 \frac{17}{23} + \frac{400}{529} = 2 + \frac{17 \cdot 23}{529} + \frac{400}{529} \geq 2 + \frac{10 \cdot 23}{529} + \frac{400}{529} =$$

$$= 2 + \frac{530}{529} = 2 + 1 \frac{1}{529} > 3 > 2 \frac{3}{4} > 3x^2 + 3x + 1,$$

$$9x - 1 > 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 9x - 1 \Rightarrow \frac{6 + 2\sqrt{38}}{69} \text{ не}$$

используем.

6. Пошли $\frac{1}{y}$, вернем только один $\frac{1}{y}$.

$$x = \frac{1}{y}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{1}{y}.$$

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5.

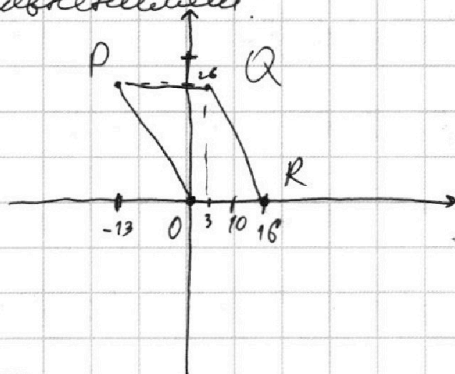
1. Трапеция, содержащаяся внутри параллелограмма, заданного следующими уравнениями:

$$OR: y = 0$$

$$PQ: y = 26$$

$$PO: y = 2x$$

$$QR: y = -2x + 32$$



Потому точки $T(x, y)$, содержащиеся внутри или на его стороне, удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 26 \\ y \geq 2x \\ y \leq -2x + 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 26 \\ y + 2x \geq 0 \\ y + 2x \leq 32 \end{cases}$$

$$2. 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 14$$

Пусть $2x_2 + y_2 = m$. Т.к. x_2, y_2 — целые, то и m — целое.

$$\text{Потому } 2x_1 + y_1 = m - 14. \quad 2x_2 + y_2 \leq 32 \text{ (н.1)} \Rightarrow m \leq 32.$$

$2x_1 + y_1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 14$ Таким образом, ~~точки A~~ — это множество точек с целыми координатами, лежащих на отрезке прямой $y = 2x + m$ (где $14 \leq m \leq 32$), содержащихся в параллелограмме $OPQR$, и для каждой точки A множество точек B — это (прямой $y = 2x + m$)

точки с целыми координатами, лежащие на отрезке прямой $y = 2x + m - 14$, содержащиеся в параллелограмме $OPQR$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача 5 (продолжение)

(P: 90 баллов, это р. 100 баллов)

3. Рассмотрим случаи, когда $m \div 2$. Пусть $m = 2n$.

В параллелограмме $OPQR$ содержится отрезок

прямой $y = 2x + m$ от точки с $y = 0$ до точки с $y = 16$:

1) $0 = 2x + m \Rightarrow x = -\frac{m}{2} = -n$.

2) $16 = 2x + m \Rightarrow x = \frac{16 - m}{2} = 8 - n$.

Получим образы, соответствующие точкам A на прямой

$y = 2x + m$, ~~с точки~~ $m \div 2$, $8 - n - (-n) + 1 = 9$.

т.е. $(n - 14) \div 2$ точек, но к каждой из них вписывается

каждый из отрезков B . Прямых с $m \div 2$ всего

10: n от 7 до 16, т.е. от 14 до 32, итого

10 · 9 · 9 = 810 пар точек.

4. Рассмотрим случаи, когда $m \div 2$. Пусть $m = 2n + 1$.

В параллелограмме $OPQR$ содержится отрезок прямой $y = 2x + m$ от точки с $y = 0$ до точки с $y = 16$:

1) $0 = 2x + m \Rightarrow x = -n - \frac{1}{2}$.

2) $16 = 2x + m \Rightarrow x = 8 - n - \frac{1}{2}$. Соответствуют вписываем коэффициент

A ~~у~~ x от $8 - n$ до $-n$, т.е. 1 от $8 - n$ до $-n$ ⇒ всего $8 - n - (-n) + 1 = 9$. Т.е. $(n - 14) \div 2$ точек, но

для каждой A соответств. B точек B . Прямых с

$m \div 2$ 9: n от 7 до 15, ~~⇒~~ итого $9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$ пар точек.

Итого соответств. $810 + 576 = 1386$ пар точек A и B в параллелограмме

Ответ: 1386.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



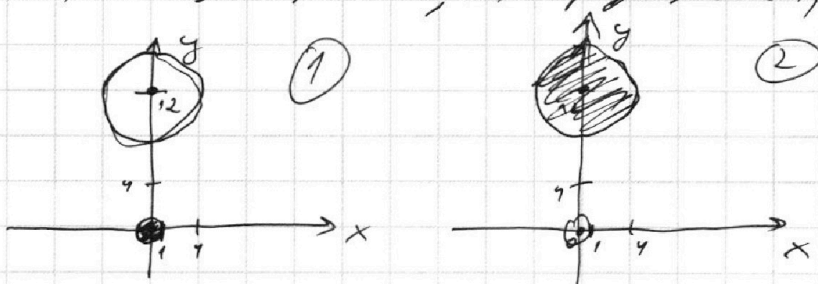
Задача 6.

$$1. (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y-12)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

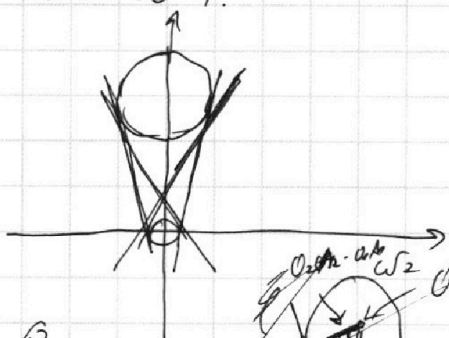
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & (1) \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 4^2 & (2) \end{cases}$$

Первой системой удовлетворяют точки

внутри с центром $(0; 0)$ и радиусом 1 и вне круга либо на границе
 \rightarrow 2) с центром $(0; 12)$ и радиусом 4, вне круга либо на границе.

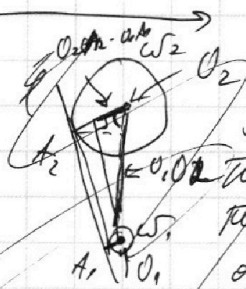


2. $ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = -ax + 8b$. У данного уравнения есть смысл из данного уравнения и неизвестна величина a и b может быть 2 решения, если уравнение $-ax + 8b$ задает прямую касательную к окружности. Ух
 всего 4:



Условия векторных касательных
 равны в 4 равенств, но противоположны
 или по знаку a , y условия
 вселики - монот.

13.



Рассмотрим внешний ободок касательных
 Пусть центры окружностей - O_1 и O_2 .
 Тогда $O_1(0; 0)$, $O_2(0; 12)$. Пусть ω_1 - центр
 окружности ω_1 , ω_2 - ω_2 . Пусть касательная

прямая l , $l \cap \omega_1 = A_1$, $l \cap \omega_2 = A_2$. Тогда $\sin \angle A_2 O_1 A_1 =$
 $= \frac{O_2 A_2 - O_1 A_1}{O_1 O_2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



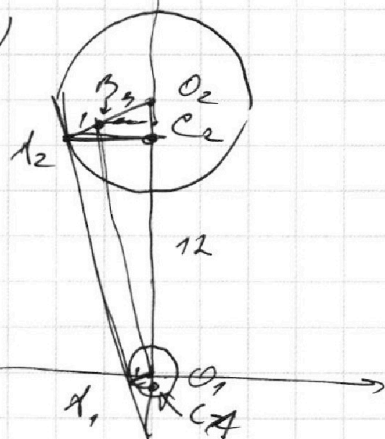
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (продолжение)

Рассмотрим от A_2 до O_1, O_2 равнобедренные Δ_2 , м.к. A_2

3. Пусть A_2 — центр окружности — $O_2(O_2, 4)$

4 $O_1(0, 1)$. Плоскости $O_1(O_1, 0), O_2(O_2, 12)$. Пусть



$\Delta_2 A_2$ — обlique вращенная касательная

($\Delta_2 A_2 \cap \omega_1 = A_2, \Delta_2 A_2 \cap \omega_2 = A_2$).

Пусть плоскости $O_2 A_2 = 9, O_1 A_2 = 1$.

9. Пусть $B_2 \in O_2 A_2, O_1 B_2 \parallel A_2 A_1$. Пусть $\angle A_2 B_2 O_2 = \angle A_2 O_1 A_1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow B_2 O_2 = O_2 A_2 - B_2 A_2 = 3$ ($\Delta_2 A_2 \perp A_2 O_2$ по св-ву касательной

$\omega_1 \omega_2 \perp A_2 O_1$). $B_2 O_1 \parallel A_2 A_1, A_2 A_1$

4. Пусть $B \in O_2 A_2, O_1 B \parallel A_2 A_1, A_2 A_1 \perp O_2 A_2, O_1 A_1$ по св-ву

касательной $\Rightarrow O_1 B \perp A_2 O_2 \Rightarrow B O_1 A_2$ — прямоугольный

$\Rightarrow B A_2 = O_1 A_1 = 1, B O_2 = O_2 A_2 - B A_2 = 3 \Rightarrow \cos \angle A_2 O_2 A_1 =$

$$= \frac{B O_2}{O_1 O_2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

6. $\exists C_2 \in O_2 O_1, A_2 C_2 \perp O_2 O_1$. Пусть $A_2 C_2 = O_2 A_2 \cdot \sin \angle A_2 O_2 O_1 =$

$$= 4 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}, A_2 C_2 = O_2 A_2 \cdot \cos \angle A_2 O_2 O_1 =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow A_2(-\sqrt{15}, 12-1=11)$$

4. Пусть $O_2 A_2 \perp O_1 A_1$, м.к. $\Delta_2 A_2$, м.к.

4. Пусть $C_1 \in (O_1 O_2), A_1 C_1 \perp O_1 O_2$. Пусть $\angle A_1 O_1 C_1 = \angle A_2 O_2 C_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_1 C_1 = \frac{\sqrt{15}}{4}, O_1 C_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow A_1\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow a = \frac{\sqrt{15} - \frac{\sqrt{15}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{15}.$$

Ответ: $\pm \sqrt{15}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax + y - 8b = 0$$
$$y = 8b - ax$$

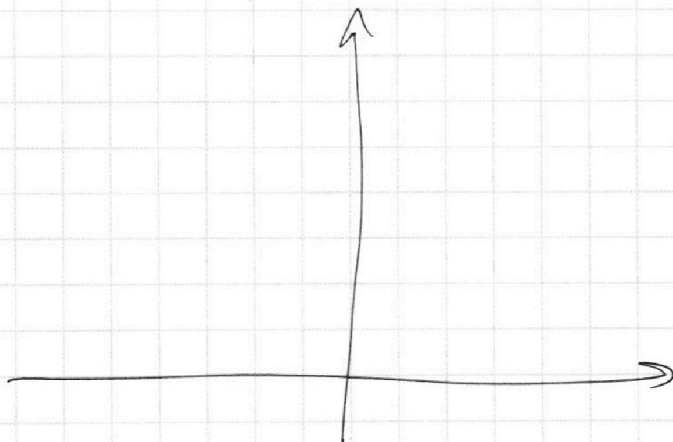
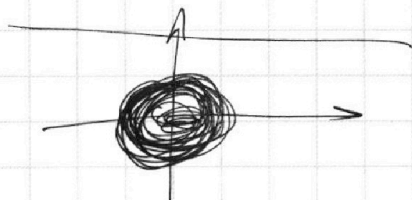
$$x^2 + a^2 x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 24y + 144 - 16 \geq 0$$

$$24y - 129 \leq 0$$

$$y \leq \frac{129}{24} = \frac{43}{8} = 5\frac{3}{8}$$





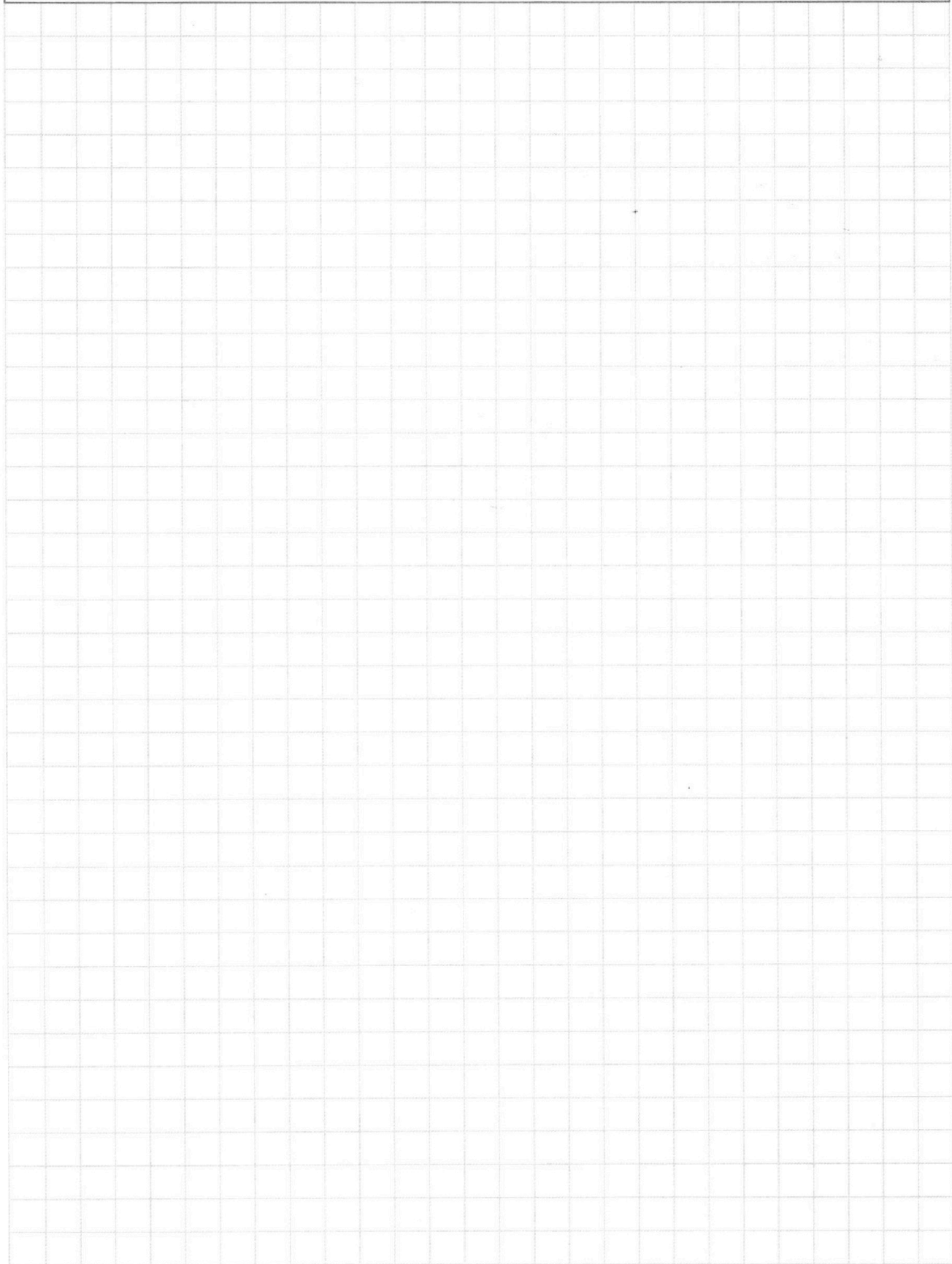
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{a+b}{m} x$$

$$(x^2 + a^2 x^2 + b^2 x^2 - 2abx - 1)$$

$$\frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2 - 2ab} = \frac{k}{k(a+b) - \frac{2ab}{m}}$$

$$\frac{a+b}{m} = k$$

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 + (y-12)^2 - 16 \leq 0$$

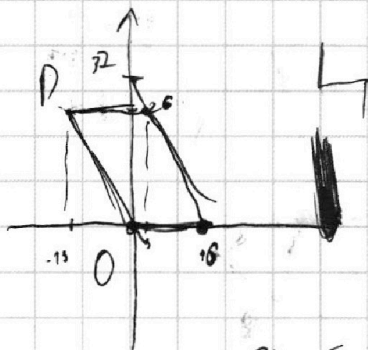
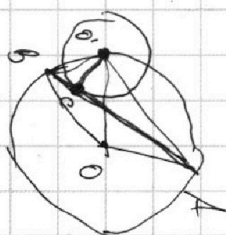
$$-x^2 - y^2 + 24y - 144 + 16 \geq 0$$

$$24y - 128 \geq 0$$

$$y \geq \frac{43}{8}$$

$$x^2 \geq 1 - y^2$$

P(13, 8)



O(0, 0)

$$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 14$$

$$\begin{cases} y_1 \leq 26 \\ y_1 \geq 0 \\ y_1 \geq -2x_1 \\ y_1 \leq -2x_1 + 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 \leq 26 \\ y_1 \geq 0 \\ y_1 + 2x_1 \geq 0 \\ y_1 + 2x_1 \leq 32 \end{cases}$$

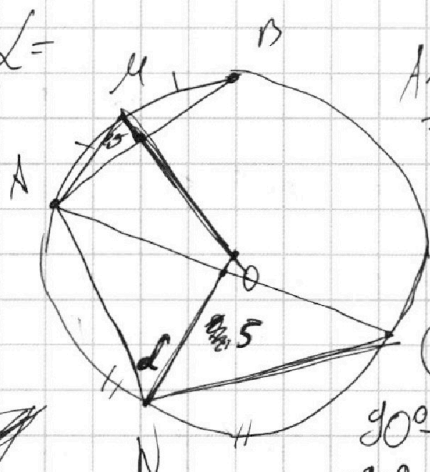
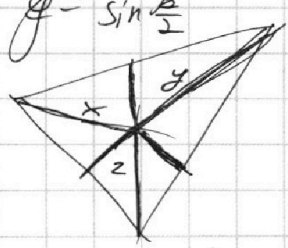
238 = 7 * 34
296
276
 $576x^2 - 98 = (576 - 338)x^2 - 98 = 238x^2 - 98$

$$\frac{y}{z} = \sqrt{2} \quad \alpha =$$

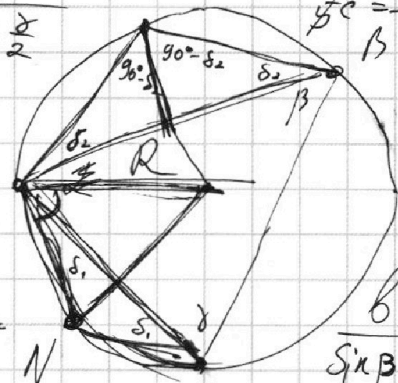
$$x = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$y = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

$$z = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$



$$AM = MB = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$



$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot c = \frac{1}{2} AM \cdot MB \cdot \sin \alpha$$

$$c = \frac{25}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \sin \alpha$$

$$c = \frac{5}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \sin \alpha$$

$$b = \frac{2.5}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \sin \beta$$

$$\frac{c}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$90^\circ - 2\delta_1$$

$$90^\circ - 2\delta_2$$

$$\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \alpha = 180^\circ$$

$$180^\circ - \beta + 2\delta_1 = 180^\circ \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right)^2$$

$$\beta = 2\delta_1 \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right)^2 = 2$$

$$\gamma = 2\delta_2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = p \cdot 2^4 \cdot 7^{11}$$

$$bc = q \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

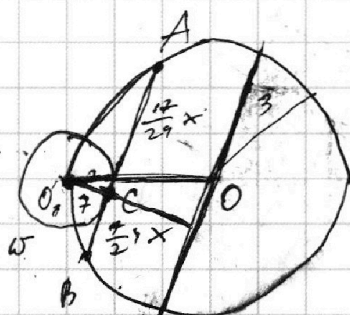
$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 = p q r \cdot 2^{15+17+23} \cdot 7^{40+18+39}$$

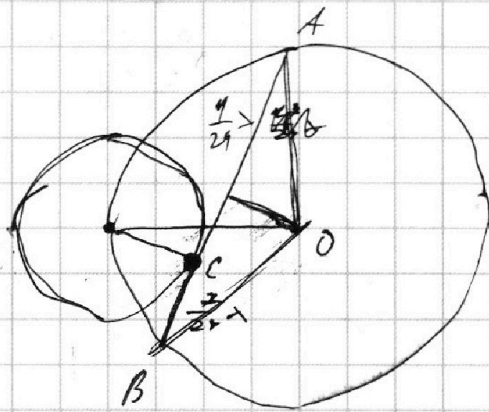
$$(abc)^2 = p q r \cdot 2 \cdot 2^{54} \cdot 7^{68}$$

$$abc = \sqrt{2 p q r} \cdot 2^{27} \cdot 7^{34} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} =$$



$$JKS = x$$



$$0 = 4 - x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 9 = 0$$

$$9x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 9 = 0$$

$$28$$

$$28$$

$$28$$

$$28$$

$$28$$

$$28$$

$$28$$

$$28$$

$$75 - 803$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{\dots} \sqrt{\dots} = 81x^2 - 18x + 1$$

$$15x - 75x^2 + 2 = 2\sqrt{\dots} \sqrt{\dots}$$

$$(15x - 75x^2 + 2)^2 = 4 \dots (3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)$$

$$(75x^2 - 15x - 2)^2 = 4(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)$$

$$75^2 x^4 + 225 x^2 + 4 + 60x - 300 x^2 - 25 \cdot 30 x^3 = 4(9x^4 - 18x^2 + 6$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 81x^2 + 1 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{\dots} - 18x\sqrt{\dots} - 18x$$

$$81x^2 - 21x + 2 = (18x - 2)\sqrt{\dots}$$

$$81x^4 - 2 \cdot 3^5 \cdot 7x^3 + 441x^2 = (322x^2 - 72x + 4)\sqrt{\dots}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



377

$$3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 + 3x + 1 + 1 - 81x^2 - 18x - (18x + 2) \sqrt{\dots}$$

$$9x + 81x^2 = (18x + 2) \sqrt{\dots}$$

$$9x(9x + 1) = 2(9x + 1) \sqrt{\dots}$$

$$81x^2 = 2(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 - 9x = 2\sqrt{\dots} \quad (\text{cancel } (9x+1))$$

$$9x(9x+1) = 2\sqrt{\dots} \quad (\text{cancel } (9x+1))$$

$$81x(81x^2 - 18x + 1) = (3x^2 - 3x + 1)(81x^2 + 18x + 1)$$

$$x^3y^7 - 2x^2y^3 + xy^2 = (x^2y^2 + 2xy + 1)$$

$$+ 3y^7 - 2x^2y^3 + xy^2 = 3x^4y^2 + 6x^2y + 3x^2 + 3x^3y^2 + 6x^2y + 3x + x^2y^2 + 2xy + 1$$

$$x^3(y^7 - 6y - 3y^2) + 3y^2 - 2xy^2 - 3 - 6y - y^2$$

$$+ x(y^2 - 3 - 2y) - 3x^2y^2 - 1 = 0$$

$$x^3(3^8 - 3^3) - x^2(2 \cdot 3^6 - 3 - 2 \cdot 3^3 - 3^4) + x(3^4 - 3^3) - 35 \cdot x^4 - 1 = 0$$

$$- 35 \cdot x^4 - 1 = 0$$

$$3^5 \cdot x^7 + 3^3 \cdot 3^4(3^4 - 1) - x^2 \cdot 3(2 \cdot 3^5 - 3 - 2 \cdot 3^2 - 1) + x \cdot 3^2(3^2 - 1) = 0$$

$$3^5 \cdot x^7 + 3^7 \cdot 80 - x^2 \cdot 3 \cdot 740 + x \cdot 3^2 \cdot 8 - 1 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 81x^2 + 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 18x - (18x + 2) \sqrt{\dots}$$

$$81x^2 - 9x = 2(9x + 1) \sqrt{\dots}$$

$$9x(9x + 1) = 2$$

$$28 \cdot 9 + 79 = 338$$

$$9x = 2 \sqrt{\dots}$$

$$81x^2 = 6x^2 - 12x + 4$$

$$45x^2 + 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 25 = 144 + 400 = 544$$

$$786 - 27 - 18 - 1 = 740$$

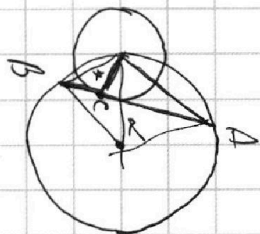
$$= 486 - 46 = 440$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO = \sqrt{r^2 + \left(\frac{13}{24}\right)^2 r^2}$$

$$OB = \sqrt{r^2 + \left(\frac{13}{24}\right)^2 r^2}$$

$$AO^2 = 43^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 13^2 - AO^2}{2 \cdot 13^2} = 1 - \frac{AO^2}{2 \cdot 13^2} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{AO^2}{2 \cdot 13^2} \left(2 - \frac{AO^2}{2 \cdot 13^2}\right)}$$

$$OB^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{OB^2}{2 \cdot 13^2} \Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{\frac{OB^2}{2 \cdot 13^2} \left(2 - \frac{OB^2}{2 \cdot 13^2}\right)}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{x}{2 \cdot 13}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos \delta$$

$$\cos \delta = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 13^2} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{2 \cdot 13^2}} = \sqrt{1 - \frac{AO^2}{2 \cdot 13^2} - \frac{OB^2}{2 \cdot 13^2} + \frac{AO^2 \cdot OB^2}{2 \cdot 13^2 \cdot 2 \cdot 13^2}}$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{AO^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \cdot 13^2 - AO^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{OB^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$\sin \beta = \frac{OB^2}{2 \cdot 13^2}$$

$$\sin \delta = \frac{x}{2 \cdot 13}$$

$$\frac{x}{2 \cdot 13} = \frac{OB^2}{2 \cdot 13^2} - \frac{AO^2 \cdot OB^2}{4 \cdot 13^4} + \frac{AO}{2 \cdot 13} - \frac{OB^2 \cdot AO}{4 \cdot 13^3}$$

$$x \cdot 2 \cdot 13^2 = OB^2 \cdot 2 \cdot 13^2 - AO^2 \cdot OB^2 + AO \cdot 2 \cdot 13^3 - OB^2 \cdot AO \cdot 2 \cdot 13^2 - AO^2 \cdot AO$$

$$\left(2 - \frac{AO^2}{2 \cdot 13^2}\right) \cdot \left(2 - \frac{OB^2}{2 \cdot 13^2}\right)$$

$$x \cdot 2 \cdot 13^2 = (OB^2 + AO) \cdot 2 \cdot 13^2 - AO \cdot OB^2$$

$$x \cdot 2 \cdot 13^2 = (OB^2 + AO) \cdot (2 \cdot 13^2 - AO \cdot OB^2)$$

$$\cos \delta = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 13^2} = \sqrt{1 - \frac{AO^2}{2 \cdot 13^2} - \frac{OB^2}{2 \cdot 13^2} + \frac{AO^2 \cdot OB^2}{4 \cdot 13^4}}$$

$$4 \cdot 13^4 - 2x^2 = 4 \cdot 13^4 - 2AO^2 - 2OB^2 + AO^2 \cdot OB^2 - 13^2$$