



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

УС.

$$\begin{aligned}
 ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} & \Rightarrow & \quad ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10} & \Rightarrow & \quad abc \geq 2^{14} \cdot 7^{10} \\
 bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} & \Rightarrow & \quad bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17} & \Rightarrow & \quad abc \geq 2^{17} \cdot 7^{17} \\
 ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} & \Rightarrow & \quad ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37} & \Rightarrow & \quad abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow abc \geq 2^{14} \cdot 7^{10}, abc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}, abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$

Минимальное возможное значение abc можно представить в виде:  $abc = 2^x \cdot 7^y \Rightarrow$

$$\begin{cases}
 x \geq 14 \\
 x \geq 17 \\
 x \geq 20 \\
 y \geq 10 \\
 y \geq 17 \\
 y \geq 37
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x \geq 20 \\
 y \geq 37
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Если  $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$ ; тогда найдутся значения a, b, c:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{17} \cdot 7^{17}} = 2^3 \cdot 7^{20} \\
 b &= \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = 1 \\
 c &= \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^6 \cdot 7^{27}
 \end{aligned}$$

$$ab = 2^3 \cdot 7^{20}$$

x, y - целые натур. т.к. a, b, c - натур

При этом:

$$abc \geq 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37}$$

$$\begin{cases}
 x \geq \frac{14+17+20}{2} \\
 y \geq \frac{10+17+37}{2} \\
 x \geq 20 \\
 y \geq 37
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x \geq 25,5 \\
 y \geq 32 \\
 x \geq 20 \\
 y \geq 37
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x \geq 26 \\
 y \geq 37
 \end{cases}
 \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Тогда найдутся значения a, b, c:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{2^{26} \cdot 7^{37}}{2^{17} \cdot 7^{17}} = 2^9 \cdot 7^{20} = a \\
 b &= \frac{2^{26} \cdot 7^{37}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = 2^6 = b \\
 c &= \frac{2^{26} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^{12} \cdot 7^{27} = c
 \end{aligned}$$

Минимальное значение abc - это  $2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

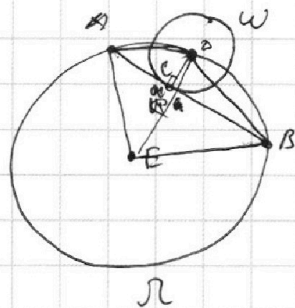
1  2  3  4  5  6  7

ЛМФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.



$D, E$  - центры  $\omega$  и  $\Omega$ , соответственно  
 Треугольн  $AD, DB, EA, EB, ED$ :

Рассмотрим 4-угольник  $ADBE$  индольно:

$DC \perp AB$  по св.  
 касательной  $AB$   
 $\Rightarrow DC$  - высота на  $AB$

По условию:  $\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$

$DC = 1$   $\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$

Пусть  $BC = x$ . Тогда  $AC = 7x$

$\Rightarrow \Omega$  - описанная окружность для  $\triangle ADB$

$\Rightarrow$  Площадь  $\triangle ADB$ :  $S = \frac{AD \cdot DB \cdot AB}{4R}$ , где

$R = AE = ED = EB = 5$ . Также же:  $S = \frac{DC \cdot AB}{2}$

$AD = \sqrt{1 + (7x)^2}$ ,  $DB = \sqrt{1 + x^2}$ ,  $AB = 8x$

$$\frac{AD \cdot DB \cdot AB}{4R} = \frac{DC \cdot AB}{2}$$

$$AD \cdot DB = 2DCR = 2 \cdot 1 \cdot 2R = 4R$$

$$AD \cdot DB = \sqrt{1 + (7x)^2} \cdot \sqrt{1 + x^2} = 2 \cdot 5 = 10$$

$$(1 + 49x^2)(1 + x^2) = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 21904 =$$

Замечка:  $t = x^2 \geq 0$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

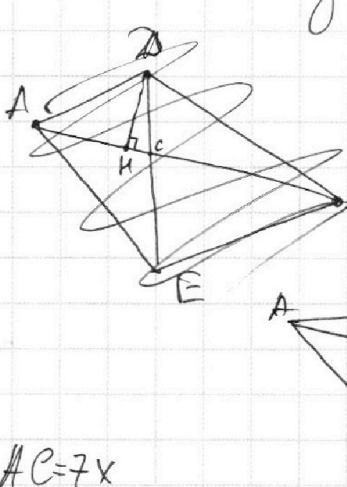
Замечка:  $t = x^2 \geq 0$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 3088 = 16 \cdot 193$$

$$= 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 21904 =$$

$$= 16 \cdot 1369 = 16 \cdot 37^2 = (4 \cdot 37)^2 = 148^2$$



$$\begin{array}{r} \times 99 \\ 49 \\ \hline 891 \\ 396 \\ \hline 4851 \\ 4 \\ \hline 19404 \\ + 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{193} \\ 13 \\ \hline 98 \\ 498 \\ \hline 588 \\ 24 \\ \hline 3088 \\ 24 \\ \hline 3088 \\ - 3088 \\ \hline 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$\left[ t = \frac{-50 + 148}{2 \cdot 49} = \frac{98}{2 \cdot 49} = 1 \right. \Rightarrow X^2 = 1 \Rightarrow X = 1$$

$$\left[ t = \frac{-50 - 148}{2 \cdot 49} < 0 \right.$$

$$AB = 7x + x = 8x = 8$$

Ответ:  $AB = 8$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Замена переменных:  $a = 2x^2 - 5x + 3$

$$b = 2x^2 + 2x + 1.$$

$$2 - 7x = 2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1) = a - b \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{a} - \sqrt{b} &= a - b \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= (a - \sqrt{a}) - (b - \sqrt{b}) \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} &= a - \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{b} \\ 2\sqrt{a} - \sqrt{b} &= a - \sqrt{a} \end{aligned}}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \text{ ①} \\ b \geq 0 \text{ ②} \\ \sqrt{a} = \sqrt{b} \text{ ③} \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \text{ ④} \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно:

①  $a \geq 0$

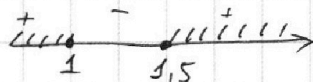
$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$2\left(x - \frac{5-1}{4}\right)\left(x - \frac{5+1}{4}\right) \geq 0$$

$$\frac{1}{2}(x-1)(x-1,5) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty)$$



②  $b \geq 0$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$$

Т.к.  $2 > 0$ , то

$$b > 0 \text{ всегда} \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\text{④ } \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 1$$

④  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

$$\sqrt{b} = 1 - \sqrt{a}$$

$$b = a - 2\sqrt{a} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \geq 0$$

③  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$   
Т.к.  $\sqrt{a} \geq 0$   
 $a = b$   
Т.к.  $\sqrt{b} \geq 0$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1.$$

$$\begin{aligned} 7x &= 2 \\ x &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 1$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$\begin{cases} 3 - 7x \geq 0 \\ 4(2x^2 - 5x + 3) = 9 + 49x^2 - 42x \end{cases} \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



④ Продолжение

$$\begin{cases} 7x \leq 3 \\ 8x^2 - 20x + 12 = 9 + 49x^2 - 42x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{7} \\ 41x^2 - 62x - 3 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно:

$$41x^2 - 62x - 3 = 0$$

$$D = 62^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 976 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

Умноживаем:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty) \\ x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82} \\ x = \frac{2}{7} < 1 < 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} \\ x = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Проверка того, что корни входят в промежутки

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \vee 1,5$$

$\vee$   
 $0$

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82}$$

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} \vee -1$$

$$22 - 4\sqrt{61} \vee -82$$

$$-4\sqrt{61} \vee -104$$

$$104 \vee 4\sqrt{61}$$

$$26 \vee \sqrt{61}$$

$$26 > 20 > \sqrt{61} \quad \text{т.к. } 400 > 61$$

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} > -1$$

$$11 + 2\sqrt{61} \vee 61,5$$

$$2\sqrt{61} \vee 50,5$$

$$\sqrt{61} \vee 25,25 = \frac{101}{4}$$

$$61 \vee \frac{101^2}{16}$$

$$976 < 1020,5$$

$$\frac{4 + 2\sqrt{61}}{41} < 1,5$$

$$22 \vee 4\sqrt{61}$$

$$5,5 < 6 < \sqrt{61}$$

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} < 0$$

Handwritten calculations for discriminant and root verification:

$$62 \times 62 = 3844$$

$$4 \times 3 \times 41 = 492$$

$$3844 + 492 = 4336$$

$$\sqrt{4336} = 65,8$$

$$4 \times 65,8 = 263,2$$

$$263,2 \approx 264$$

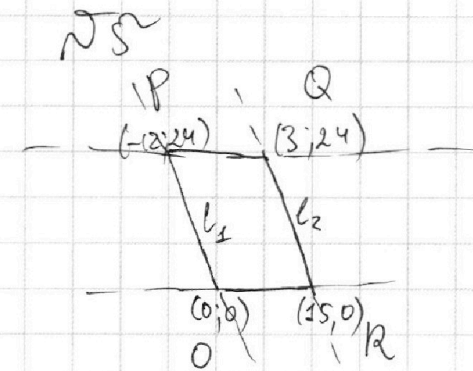
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$l_1$  - прямая через  $PO$ .

ур-е прямой  $l$  из графика:

$$l_1: y = -2x$$

Аналогично

для  $l_2$ :  $l_2 \parallel l_1$ , то  
 $y_{l_2} \text{ выг: } -2x + b = 0$   
 $-2 \cdot 15 + b = 0$   
 $b = 30$

$$l_2: y = -2x + 30$$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 30 \\ 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 30 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2x_1 \in [0, 30] \\ 0 \leq y_1 \leq 24; 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 42 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \\ 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24; 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 30 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \\ y_1 + 2x_1 \in [0, 30] \end{cases} \Leftrightarrow$$

Если точка  $M(x, y)$  принадлежит параллелю  $PQRO$ , то:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 24 \\ y \leq -2x + 30 \\ y \geq -2x \end{cases} \quad 2) x \in [-2; 15]$$

Для точек  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ :

$$\begin{cases} y_1 \geq 0; y_2 \geq 0 \\ y_1 \leq 24; y_2 \leq 24 \\ y_1 \leq -2x_1 + 30 \\ y_2 \leq -2x_2 + 30 \\ y_1 \geq -2x_1 \\ y_2 \geq -2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ -2x_1 \leq y_1 \leq 30 - 2x_1 \\ -2x_2 \leq y_2 \leq 30 - 2x_2 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 30 \\ 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12 \\ 0 \leq 2x_1 + y_1 \leq 30 \end{cases}$$~~

~~$x_1 = \text{целое}$  и  $x_1 \in [-12; 15]$~~

Далее переберём значения  $A(x_1, y_1)$  и посчитаем кол-во подходящих  $B(x_2, y_2)$

$x_1 = -12$ :  $y_1 \in [24; 24]$

$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 - 2x_2 \leq y_2 \leq 30 - 2x_2 \\ 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + R \end{cases}$

$2x_2 + y_2 = 2(x_1 + y_1) + y_1 + 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

Г. - точка

Рассмотрим отдельно первое ур-е:

$$ax - y + 10b = 0$$

(1)  $ax + 10b = y$  - ур-е прямой.

Рассмотрим отдельно второе ур-е:

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \quad (2)$$

$(x+8)^2 + y^2 \leq 1$  - верно для точек, лежащих ~~внутри~~ принадлежащих окр-ти <sup>ω<sub>1</sub></sup> радиуса 1 с центром в т. Г. ~~(-8; 0)~~;  $(x+8)^2 + y^2 \geq 1$  - для точек вне этой окр-ти и на ее границе.

$x^2 + y^2 \leq 4$  - верно для точек, принадлежащих окр-ти <sup>ω<sub>2</sub></sup> радиуса 2 с центром в (0; 0);  $x^2 + y^2 \geq 4$  - для точек вне этой окр-ти и на ее границе.

Решение системы (2) - это точка

$(x_0; y_0)$  - решение системы (2), если:

т.  $(x_0; y_0)$  ~~лежит~~ принадлежит  $\omega_1$  и не лежит внутри  $\omega_2$

или принадлежит  $\omega_2$  и не лежит внутри  $\omega_1$ .

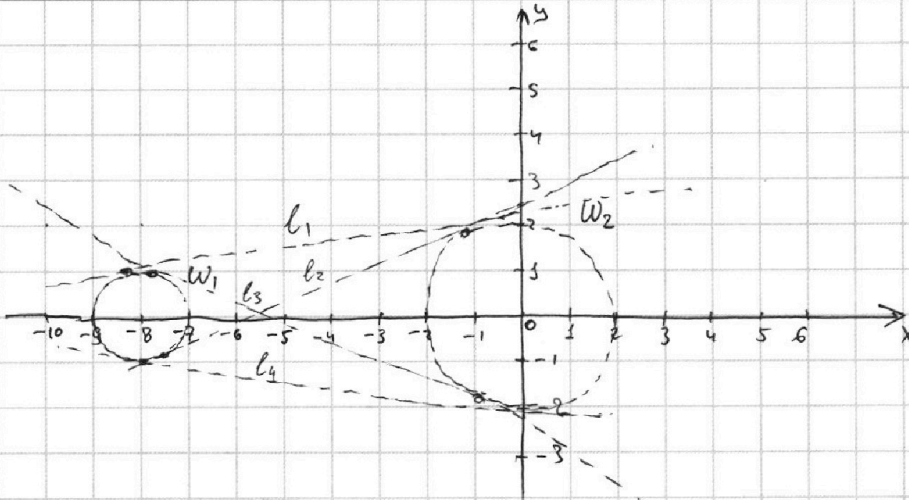
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



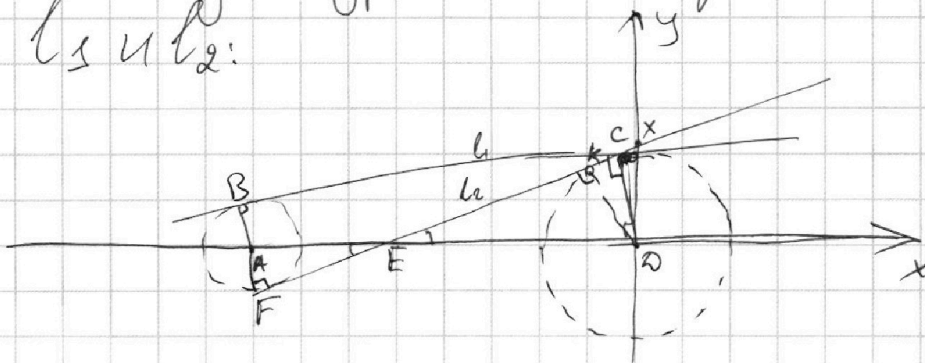
Исходная система:

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (3) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Система (3) имеет ~~ровно~~ ровно 2 решения только если прямая  $y = ax + 10b$  касается обеих окружностей (точки касания - решения системы)

Общих касательных к 2-м окружностям можно провести 4 (см. рис:  $l_1, l_2, l_3, l_4$ ). <sup>параллельно</sup> ~~Собираем все прямые~~ ~~и все~~

Найдём уравнение прямой  $l_1, l_2, l_3, l_4$ :  
 $l_1$  и  $l_2$ :



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AE + ED = 8$$

$$AF = 1$$

$$ED \text{ с к} = 5$$

$\angle CED = \angle AEF$  как вертикальные  
углы

~~$\angle CED = \angle AFE = \angle DCE = 90^\circ$~~   
по св. касательной

$$\Delta CED \sim \Delta FEA$$

$$\frac{ED}{AE} = \frac{CE}{AF} = 5 \Rightarrow ED = 5AE$$
$$AE + 5AE = 8$$
$$AE = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$ED = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

~~$\Delta CED \sim \Delta FEA \Rightarrow \frac{ED}{AE} = \frac{CE}{AF} = 5$~~   
 ~~$\Delta CED \sim \Delta FEA \Rightarrow$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

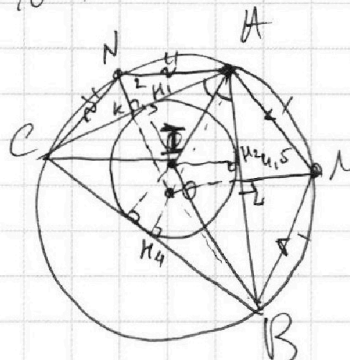
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



р/б - равнобедренный

1. Т. O - центр описанной окр-ти для  $\triangle ABC$ ,  $R$  - её радиус
2. Т. I - центр вписанной окр-ти для  $\triangle ABC$ ,  $r$  - её радиус.
3. Т.к.  $UCN = VAN$ , то  $AN = CN$   
 $UAM = UBM$ , то  $AM = BM$

4. Пусть  $NK$  и  $ML$  - высоты из т. N и т. M на AC и AB, соответственно. Тогда по усл.  $NK = 2$ ,  $ML = 4,5$ .

5. Из 3)  $\triangle CNA$  и  $\triangle AMB$  - р/б.  $\Rightarrow$   
 $NK$  и  $ML$  - серединные перпендикуляры к AC и AB соответственно  $\Rightarrow$  Третье  $NK$  и  $ML$  пересекаются в т. O по св. описанной окр-ти.

6.  $OM = ON = R = NK + OK = ML + OL$

7. Опустим из т. I высоты  $IK_1$  и  $IK_2$  на AC и AB соответственно.  $IK_1 = IK_2 = r$

8.  $AO = OM = OB \Rightarrow \triangle AMB = \triangle AOB \Rightarrow ML = OL \Rightarrow OM = 2ML = 9$   
 Аналогично,  $OK = 4$

~~8.  $IK_2 = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} R = IK_1 = r$~~

8.  $AI = 2OK_1$  (сл. р.с.)  $\Rightarrow OK_1 = \frac{1}{2} AI$

9.  $OK_1 + OK + OL = 3r \Rightarrow 2R + OL = 3r + 6,5$   
 $2R + \frac{1}{2} AI = 3r + 6,5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2R + \frac{1}{2}AI = 6,5 + 3n$$

$$2R + 0,5n = 6,5 + 3n$$

$$2,5n = 2R - 6,5$$

*Нужно найти:*  
 $AI = n - ?$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $ab: 2^{14} 7^{10} \Rightarrow \min ab = 2^{14} 7^{10}$

$bc: 2^{17} 7^{17} \Rightarrow \min bc = 2^{17} 7^{17}$

$ac: 2^{20} 7^{37} \Rightarrow \min ac = 2^{20} 7^{37}$

$$abc^2 = 2^{31} \cdot 7^{27} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$= 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$a = 2^8 \cdot 7^{15}$

$b = 2^6 \cdot 7^5$

$c = 2^{12} \cdot 7^{22}$

$2x^2 + 2x + 1$

$D = 4 - 4$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$$

$$2(x - \frac{5-1}{4})(x - \frac{5+1}{4})$$

$$2(x - 1)(x - 1.5)$$

$bc_{\min} = 2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} = 2^{18} \cdot 7^{17}$

$$abc^2 = 2^{14+8+20} \cdot 7^{10+15+37}$$

$$= 2^{42} \cdot 7^{62}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$a^2 - 6ab + b^2$

$D = 36 - 4 = 32$

$D = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2$

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a^2 + ab} \cdot \frac{a+b}{a-7b}$$

$$\frac{-7ab + b^2}{-7ab - 7b^2}$$

$$\frac{8b^2}{8b^2}$$

$$(a - \frac{6 - \sqrt{32}}{2}) (a - \frac{6 + 4\sqrt{2}b}{2}) (a - \frac{6 + 4\sqrt{2}b}{2})$$

$$(a - 3 + 2\sqrt{2}b) (a - 3 - 2\sqrt{2}b)$$

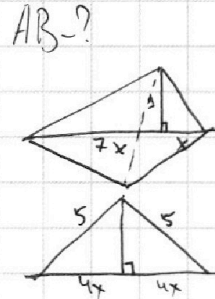
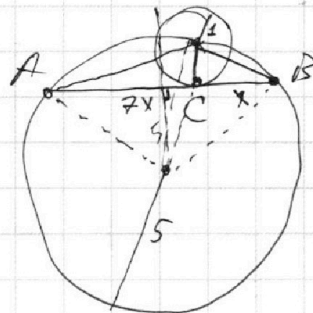
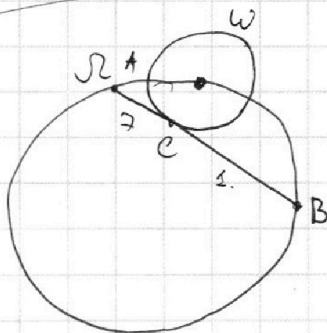
$$\frac{a+b}{(a-7b)(a+b) + 8b^2}$$

$8b^2: a+b ?$

$8b^2 = (a+b)k$

$a+b=8$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

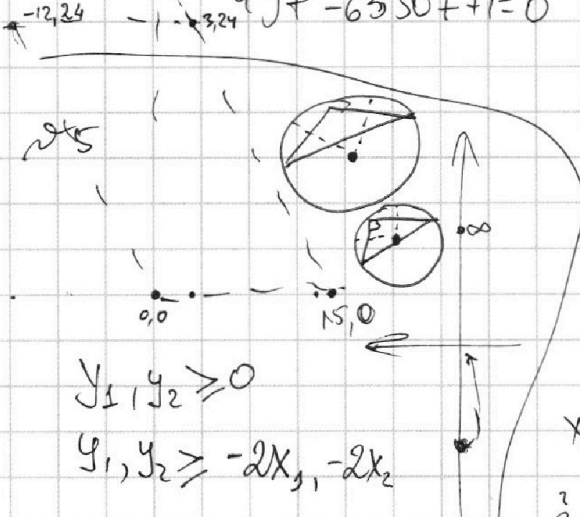


$$4x = \frac{\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}}{20}$$

$$D = 6350^2 - 4 \cdot 49 = 60229$$

$$400x^2 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

$$49t^2 - 6350t + 1 = 0$$



$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \geq -2x_1, -2x_2$$

$$y_1, y_2 \leq 24$$

$$y_1, y_2 \leq -2x_1 + 30, -2x_2 + 30$$

$$3k + b = 24$$

$$5k + b = 0$$

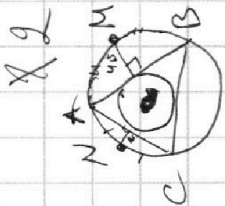
$$12k = 24$$

$$k = 2$$

$$b = 30$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

7  
9  
5  
2



$$\frac{1}{10} \frac{10}{10} \frac{10}{10}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 161} \\ 48 \\ \hline 113 \\ 452 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1084 \overline{) 1084} \\ 1084 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$5049$$

$$\begin{array}{r} 237 \\ \times 237 \\ \hline 1659 \\ 474 \\ \hline 56169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 243 \\ \hline 729 \\ 972 \\ 486 \\ \hline 59049 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 56 \\ \hline 336 \\ 336 \\ \hline 3136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 369236 \\ \times 369236 \\ \hline 2215416 \\ 7383636 \\ 13906364 \\ 25629656 \\ 46133364 \\ \hline 135843636 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 247 \\ \times 247 \\ \hline 1729 \\ 988 \\ \hline 61009 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 94 \\ \times 94 \\ \hline 376 \\ 882 \\ \hline 8836 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 217 \\ \times 217 \\ \hline 1519 \\ 434 \\ \hline 47089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 287 \\ \times 287 \\ \hline 2009 \\ 2296 \\ 574 \\ \hline 82369 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 247 \\ \times 247 \\ \hline 1729 \\ 988 \\ \hline 61009 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 94 \\ \times 94 \\ \hline 376 \\ 882 \\ \hline 8836 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 156 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3636 \\ \times 3636 \\ \hline 2215416 \\ 7383636 \\ 13906364 \\ 25629656 \\ 46133364 \\ \hline 135843636 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 637 \\ \times 637 \\ \hline 3929 \\ 1111 \\ \hline 4069 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 283 \\ \times 283 \\ \hline 1578 \\ 526 \\ \hline 69169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 253 \\ \times 253 \\ \hline 1518 \\ 506 \\ \hline 64009 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 243 \\ \hline 1518 \\ 506 \\ \hline 64009 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 243 \\ \hline 1518 \\ 506 \\ \hline 64009 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 729 \\ \times 729 \\ \hline 506 \\ 486 \\ \hline 59049 \end{array}$$

12  
~~13~~  
~~14~~  
~~15~~  
16  
17

1000

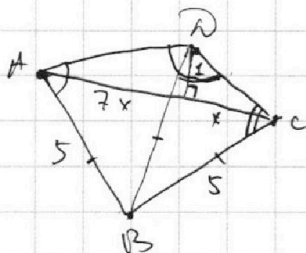
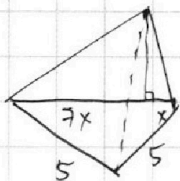
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

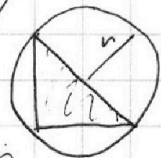
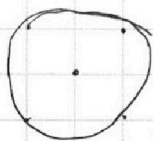


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle BC$$

~~$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$~~

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8x = 4x$$

$$S_{ADC} = \frac{abc}{4R} ?$$



$$r = \sqrt{2}$$

$$S = 2$$

$$\frac{abc}{4R} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{2}} = 2$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2}}{4 \cdot 5}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 49 \\ 4 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2500 \\ - 196 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$D = 50^2 - 4 \cdot 49 = 2500 - 196 = 2304 = 48^2$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 42 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$4x = \frac{\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}}{20}$$

$$80x^2 = \sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}$$

$$6400x^2 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

$$49x^4 - 6350x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{-50 + 48}{2 \cdot 49} = -\frac{1}{49}$$

$$x^2 = \frac{-50 - 48}{2 \cdot 49} =$$

$$49t^2 - 6350t + 1 = 0$$

$$D = 6350^2 - 4 \cdot 49$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{6350} \\ 6350 \\ \hline 3175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1905 \\ 3810 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60325 \\ - 50 \\ \hline 60325 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ \hline 2415 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -103 \\ -106 \\ \hline -32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -32 \\ 25 \\ \hline -75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -75 \\ 75 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 229} \quad \overline{) 19} \\ 57 \\ \hline 32 \\ 19 \\ \hline 132 \\ 114 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 635 \\ 635 \\ \hline 3175 \\ 1905 \\ 3810 \\ \hline 60325 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60325 \\ - 196 \\ \hline 60229 \quad \overline{) 17} \\ - 58 \\ \hline 22 \\ - 22 \\ \hline 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N}$$

П.к.  $abc$  - натуральное, то  $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$

Если  $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ , то: ~~abc~~  $abc$  подходит значениям:

$$\begin{matrix} 2^{26} & 7^{32} \\ \hline a & = & \frac{abc}{bc} \\ \hline 2^{18} & 7^{17} \\ \hline b & = & \frac{abc}{ac} \\ \hline 2^{20} & 7^{37} \\ \hline c & = & \frac{abc}{ab} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} ab &= 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &= 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{abc}{bc} = \frac{2^{26} \cdot 7^{32}}{2^{18} \cdot 7^{17}} = 2^8 \cdot 7^{15} \\ b &= \frac{abc}{ac} = \frac{2^{26} \cdot 7^{32}}{2^{20} \cdot 7^{37}} \\ c &= \frac{abc}{ab} = \end{aligned}$$

~~Минимальные значения~~

$$ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37}$$

$$ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$$

$$abc \geq 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

№1.

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$abc: 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow abc \geq \text{НОК}(2^{14} \cdot 7^{10}, 2^{17} \cdot 7^{17}, 2^{20} \cdot 7^{37})$$

$$abc: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\text{НОК}(2^{14} \cdot 7^{10}, 2^{17} \cdot 7^{17}, 2^{20} \cdot 7^{37}) = 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

При  $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$ :  $a = \frac{abc}{bc} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{17} \cdot 7^{17}} = 2^3 \cdot 7^{20}$

возможна следующая значения  $a, b, c$ :  $b = \frac{abc}{ac} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = 1$

$$c = \frac{abc}{ab} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^6 \cdot 7^{27}$$