



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



218
12
24
84x
12
12x
8

$$\sqrt{169 - 144x^2} = 119x^2 - 14$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

$$\frac{16}{192}$$



3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

$$3(x+1)^2 - 3x$$

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\frac{191x^2 + 11x + 1}{11x^2 + 6x + 1} = \frac{11x^2 + 6x + 1}{11x^2 + 6x + 1}$$

$$\frac{24}{124} = \frac{96}{48}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3(x-1)^2 - 1$$

$$1 - 3 \cdot 3x$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

$$x^2 - 4x + 1$$

$$2x^2 - 4x + 1$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\frac{959}{1918} = \frac{x}{236}$$

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 \quad (2x-1)/(x-1)$$

$$x^2 - 3x + 1, (x-2)/(x-1)$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

$$x^2 - 3x + 2$$

$$(x-2)/(x-1) + 3x + 2x^2$$

4x - 14x - 4x = 1

$$\frac{692}{1384} = \frac{149}{298}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{15} \cdot 7^{17} \quad bc : 2^{14} \cdot 7^{18} \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1} \cdot k_1 \quad k_1 \not\equiv 2; 7$$

$$b = 2^{y_1} \cdot 7^{y_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{z_1} \cdot 7^{z_2} \cdot k_3$$

$$ab = 2^{x_1 + y_1} \cdot 7^{x_2 + y_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \dots = 2^{15} \cdot 7^{17}$$

$$x_1 + y_1 \geq 15$$

$$x_2 + y_2 \geq 17$$

аналогично: $y_1 + z_1 \geq 14 \quad y_2 + z_2 \geq 18 \quad x_1 + z_1 \geq 23$

$$x_2 + z_2 \geq 39$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 \geq 15 \\ y_1 + z_1 \geq 14 \\ x_1 + z_1 \geq 23 \end{cases}$$

~~$ac = \frac{ab \cdot bc}{b} = \frac{2^{15} \cdot 7^{17} \cdot 2^{14} \cdot 7^{18}}{2^{y_1} \cdot 7^{y_2} \cdot k_2} = 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

процп. все вычисления

~~$2x_2 + 4y_2 + 2z_2 \geq 13 + 39 + 17$ но он не больше 39.~~

~~$x_2 + y_2 + z_2 \geq 39 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 39$~~

~~$ab \cdot c = 2^{x_1 + y_1 + z_1} \cdot 7^{x_2 + y_2 + z_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$~~

~~$\Rightarrow 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 \geq 15 \\ y_1 + z_1 \geq 17 \\ x_1 + z_1 \geq 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + z_2 \geq 18 \\ x_2 + z_2 \geq 35 \end{cases}$$

$$2x_1 + 2y_1 + 2z_1 \geq 55$$

$$2x_2 + 2y_2 + 2z_2 \geq 48$$

$$x_1 + y_1 + z_1 \geq 27.5$$

$$x_1 + y_1 + z_1 \geq 23$$

$$x_2 + y_2 + z_2 \geq 39$$

$$\Rightarrow abc = 2^{x_1 + y_1 + z_1} \cdot 4^{x_2 + y_2 + z_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$

$$\approx 2^{23} \cdot 4^{39}$$

Это выражение формулируется как

$x_1 = 10$

$x_2 = 11$

$y_1 = 5$

$y_2 = 0$

$z_1 = 13$

$z_2 = 18$

$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$ $b = 2^5$ $c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: 7

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b \div m \quad a^2 - 4ab + b^2 = a+2ab-9ab+b^2$$
$$= (a+b)^2 - 9ab \div m$$

$$\div m \quad \Rightarrow \quad 9ab \div m$$

then $a \div m$ и $b \div m$, но a и b

$$a+b \div m, \text{ но } a \text{ и } b \div m \Rightarrow$$

$$a \text{ и } b \div m \Rightarrow a \div m \quad m \leq 9$$

$$\bullet \text{ для } m=9 \quad a=4 \quad b=5$$

$$a+b=9 \quad a^2 - 4ab + b^2 = -99$$

$$- \frac{9}{99} \text{ сокн. } \text{до } - \frac{1}{11}$$

$$\text{Ответ: } m=9$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$BC = 7x$ $AC = 14x$ $\odot H$ - перпендикуляр к AB из центра O

$BM = H$

$4H = BM = 2x$

$CM = 5x$

$WL \perp OM$

$\Rightarrow h^2 + (2x)^2 = 2x^2$

$(h+7)^2 + (5x)^2 = 269$ / мы можем

парам. существуют CM - точка W и радиус

краски перпендикулярно к OM

$h+7$; $5x$ и 73

$h^2 + 144x^2 = 269$ $h = \sqrt{269 - 144x^2}$

$h^2 + 14h + 49 + 25x^2 = 269$

$119x^2 - 49 = 269 - 144x^2$

$119x^2 - 49 = 14\sqrt{269 - 144x^2}$

~~119x^2 - 49 = 2\sqrt{269 - 144x^2}~~

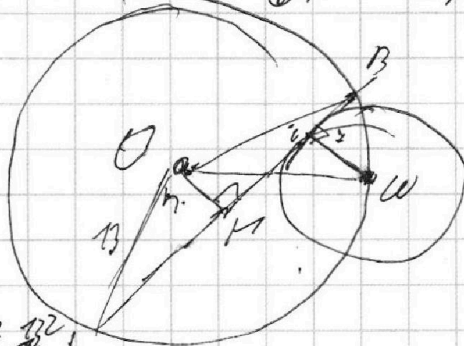
$289x^4 - 238x^2 + 49 = 646 - 546x^2$

$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$

$x^2 = \frac{-338 \pm \sqrt{338^2 + 627 \cdot 289 \cdot 4}}{2 \cdot 289} = \frac{769}{289}$

$x = \frac{27}{17}$ $AB = \frac{13}{17} \cdot 24 = \frac{312}{17}$

7
Знамен



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$
$$3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1 + \sqrt{3x^2-27x+2}$$
$$= \sqrt{3x^2-27x+2}$$
$$81x^2 - 18x + 1$$

$$1) (3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1) = 1-9x$$

$$\Rightarrow 1-9x = (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1}) \cdot$$

$$= (\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\cdot (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})$$

\Downarrow

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2-6x+2} = 1-9x$$

$$12x^2 - 24x + 8 = 3x^2 - 36x + 4$$

$$9x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$2) \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

Возведем в m^2 $m=2$ $m=1$

$$2\sqrt{3x^2+3x+1} = 9x$$

$$42x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 69 \cdot 4}}{2 \cdot 69} = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{276}$$

Ответ: $x = \frac{12 \pm 4\sqrt{48}}{276}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

Возьмем все уравнения вида
 $2x + y = k$. Заметим, что
 такая прямая параллельна
 сторонам OP и QR паралл. \Rightarrow
 для всех k от O (прямая OP)
 до Q (прямая QR)
 если мы берем две точки x_1, y_1

x_2, y_2 так, что

$$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 14, \text{ то есть}$$

$$2x_2 + y_2 = k_2 \quad \text{и} \quad 2x_1 + y_1 = k_1, \text{ то}$$

мы можем взять любые две точки

линии A и B , которые лежат

$$\text{на } 2x + y = k_1 \quad \text{и} \quad 2x + y = k_2$$

для каждой прямой в параллельном

семействе k целых точек (это следует из того, что каждая прямая покрывает единичную сетку точек)

и если k_1 и k_2 различны, то здесь k_1 и k_2 - разный шаг

при переходе черепашки. Условно на рисунке 14 - это количество шагов в 2 точки. 26 - это шаг от начала - 25^2 . Ответ: всего шаг $10 \cdot 26^2 + 9 \cdot 25^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (пр. 7)

$$y = 3b - ax$$

$$f(x) = (x^2 + (3b - ax)^2 - 1) / (x^2 + (3b - ax - 1)^2 - 1) \leq 0$$

эта $f(x)$ непрерывна. Заметим, что если она в какой-то $x \in \mathbb{D}$, то это значит, что логично искать интервал на котором она ≤ 0

(пусть в x_0 она $f(x) < 0$, тогда по опред. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ (или может это означать, т.к. она непрерывна.)

существ. $\delta > 0$ так, что для любого x

$$x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$$

возьмем $\varepsilon < -f(x_0)$ тогда сущ.

δ , что на отрезке $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow$$

если $f(x)$ для точечных решений то это можно еще так ~~записать~~

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2 + (3b - ax)^2 - 1)}_{g(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + (3b - ax - 1)^2 - 1)}_{q(x)} = 0$$

имеет 2 корня и те нули $f(x) = 0$

где $g(x)$ и $q(x)$ — параб. с ~~отриц.~~ отрицат. ~~знаками~~ знаками $x^2 + (1+a^2)$ — они сопряжены ~~и~~ и ~~имеют~~ имеют ~~два~~ два корня x_1 и x_2



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2/6 $\{ \Rightarrow 22ax - 192b + 129 = 0$ всегда (т.к. это

линейная комбинация и если у нас 2 корня,
то все числа - те корни)

$$\Rightarrow a = 0 \quad 22a - 192b = 0 \quad b = \frac{129}{192}$$

~~дискриминант $\Delta = 192^2 - 4 \cdot 22 \cdot 129 > 0$~~
дискриминант $\Delta(x)$ или $a=0$
находим $256b^2 - 64b^2 + 4$ ~~> 0~~

$\Rightarrow y$ ($g(x)$) 2 корня и y ($q(x)$) одно

число y ($g(x)$) и ($q(x)$) по определению

корня, но это не верно

~~y ($g(x)$) 2 корня и y ($q(x)$) одно~~

$$D(g(x)) = (2ka)^2 - 4(1+a^2)(k^2-1) = 0$$

$$4k^2a^2 - 4k^2a^2 = 4k^2 + 4 + 4a^2$$

$$4a^2 - 4k^2 + 4 = 0 \quad a^2 - k^2 + 1 = 0$$

$$D(q(x)) = (2a - 2ak)^2 - 4(2+a^2) \cdot$$

$$(k^2 + 128 - 22k) = 1576a^2 - 96a^2k + 4a^2k^2$$

$$- 4a^2k^2 - 512a^2 + 48a^2k - 4k^2 - 512 + 4ak$$

$$64a^2 - 48a^2k - 512 - 4k^2 + 48k = 0$$

$$16a^2 - 12a^2k - 128 - k^2 + 12k = 0$$

$$18a^2 - 12a^2k - 129 + 12k = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a^2 - k^2 + a = 0$ *№6 стр. 4*

$16a^2 - 72a^2k - 72b - k^2 + 43k = 0$

$$x^2 + y^2 = 1 = x^2 + (y - 72)^2 - 76 = 0$$

$$y^2 - 1 = (y - 72)^2 - 76$$

$$y^2 - 1 = y^2 - 24y + 720$$

$$2: 4y = 729$$

$$y = \frac{729}{24} \Rightarrow y \text{ не целое}$$

должно только $xy \Rightarrow$ не имеет решений $\Rightarrow a = 0$

Ответ: $y = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~6 стр.~~ 26 стр. 2
 но на интервале (x_1, x_2) $g(x) < 0$ или > 0
 на $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ $g(x) > 0$ или < 0
 $Q(x)$ меняет < 0 и > 0 на тех же

интервалах \Rightarrow если $g(x)$ корни x_1 и x_2 ,
 то $g(x)$ между корнями $(x_1$ и $x_2)$ имеет
 другой знак $f(x)$ где $g(x)$ и $Q(x)$ и
 разные знаки и $f(x) < 0$.

если $g(x)$ не имеет корней,
 то тогда $g(x)$ и $Q(x)$ не могут
 быть 2 корнями т.к. если $g(x)$

2 корня то это x_1 при котором

$$Q(x_1) < 0 \text{ и } x_2 \quad Q(x_2) > 0 \text{ и}$$

тогда либо $f(x_1) < 0$ либо $f(x_2) < 0$

\Rightarrow либо $g(x)$ и $f(x)$ общие

корни, либо $g(x)$ и $f(x)$ имеют по 1 корню
 или $g(x)$ и $f(x)$ имеют общие корни x_1 и x_2 , то $g(x) - Q(x) = 0$
 $g(x) = x^2 + a^2x^2 + 6b^2ax + 64b^2 - 7$
 $= g(x_1) - Q(x_1) = 0$
 $= g(x_2) - Q(x_2) = 0$

$$Q(x) = x^2 + a^2x^2 + 64b^2 + 144 - 16abx - 192b$$

$$Q(x) - g(x) = 144 - 192b + 24ax = 0$$

$$144 - 192b + 24ax = 0 \text{ при } x_1 \text{ и } x_2$$