МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x+3$, пятый член равен $(x^2+2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y+8x$ при условии

$$\begin{cases} |x-3y| \leqslant 3, \\ |3x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть d – разность этой арифмет. прогр.,

тогда $2d = (x^2+2x)^2 - 3x - 3$ и $4d = 3x^2 - (x^2+2x)^2$ – из условия;

$2(x^2+2x)^2 - 6x - 6 = 3x^2 - (x^2+2x)^2$;

$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0 \mid :3$;

$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$;

$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = -1; \\ x^2+2x-2=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

(1) $x^2+2x-2=0$;

$D = 4 + 4\cdot 2 = 12$, $D > 0$

$x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$;

Получаем: $x = -1$; $-1 \pm \sqrt{3}$.

Ответ: -1; $-1+\sqrt{3}$; $-1-\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} |x-3y| \le 3 \\ |3x-y| \le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 \le x-3y \le 3 \quad (1); \\ -1 \le 3x-y \le 1; \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \times (-3)$: $\quad -9 \le 9y-3x \le 9$;

$+(2)$; $\quad -10 \le 8y \le 10$;

$$-\frac{5}{4} \le y \le \frac{5}{4}$$

$(2) \times 3$: $\quad -3 \le 9x-3y \le 3$

$+ (1) \times (-1)$: $\quad -6 \le 9x-3y+3y-x \le 6$

$$-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$$

$\cancel{9x+8y \le \frac{3}{4}\cdot 4 + 8\cdot\frac{5}{4} =}$

$8x+4y \le \frac{3}{4}\cdot 8 + 8\cdot\frac{5}{4}\cdot 4 = 11$;

при $x = \frac{3}{4}$ и $y = \frac{5}{4}$:

$\left|\frac{3}{4} - \frac{15}{4}\right| = 3$;

$\left|3\cdot\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right| = 1$; , зн-т такие x и y удовл. условию. Зн-т мы доказали, что наиб. возможное знач. нужн. выраж. это 11 и привели пример таких x и y, при которых это выпол.

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$

$B = m^2 n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$

Заметим, что ~~если~~ $75q^2 \vdots 3$, $75q^2 \not\vdots 3^2$ или $75q^2 \vdots 3^3$ но $75q^2 \not\vdots 3^4$ (второй случай получается при $q=3$). Теперь, если $(m+n) \not\vdots 3$, то и $(m+n-9) \not\vdots 3$ и $A \not\vdots 3$, если $(m+n) \vdots 3$, но $(m+n) \not\vdots 9$, то и $(m+n-9) \vdots 3$ но $(m+n-9) \not\vdots 9$, и тогда $A \vdots 9$, но $A \not\vdots 27$. Если $(m+n) \vdots 9$, то $(m+n-9) \vdots 9$ $A \vdots 81$. Значит есть 3 варианта: 1) $A \not\vdots 3$, 2) $A \vdots 9$, $A \not\vdots 27$, 3) $A \vdots 81$, но при этом получаем, что ~~$A \not\vdots 75q^2$~~ $A \neq 75q^2$, т.к. $75q^2 \vdots 3$ но $\not\vdots 9$ или $75q^2 \vdots 27$ но $\not\vdots 81$.

Значит $A = 13p^2$; Если $p = 3$, то $A = 117 = (m+n) \cdot (m+n-9)$; $(m+n)^2 - 9(m+n) - 117 = 0$; Пусть $(m+n) = x$, $x \in \mathbb{N}$

$x^2 - 9x - 117 = 0$. $D = 81 + 4 \cdot 117 = 549$, $D > 0$;

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{549}}{2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{61}}{2}.$$

Заметим, что x, котор. мы получ. $\notin \mathbb{N}$; Значит такого быть не может. Значит $p \neq 3$.

$(m+n)(m+n-9) \vdots 13p^2$;

НОД$((m+n);(m+n-9))$ = НОД$((m+n);9) = 1$ – т.к. $p \neq 3$.

Итого получаем 2 случая:

1) $m+n = p^2$, $m+n-9 = 13$; $m+n = 22 = p^2$ – не мож. быть.

2) $m+n = 13$, $m+n-9 = p^2$; $p^2+9 = 13$, $p = 2$;

(случаи, где одна из скобок равна 1 невозм., т.к. ~~$m \in N$ и $n \in N$ $m+n \geq 1+1 = 2$~~)

Если $m+n-9 = 1$, то $m+n = 10 < 13p^2$ и тем более $m+n \neq 1$. При $m+n = 13$ и $p = 2$;

$B = mn(m+n-3) = mn \cdot 10 = 75q^2$. Зн т

т.к. $10mn \vdots 2$, то $75q^2 \vdots 2 \Rightarrow q = 2$;

$300 = 10mn$; $mn = 30$, $m+n = 13$;

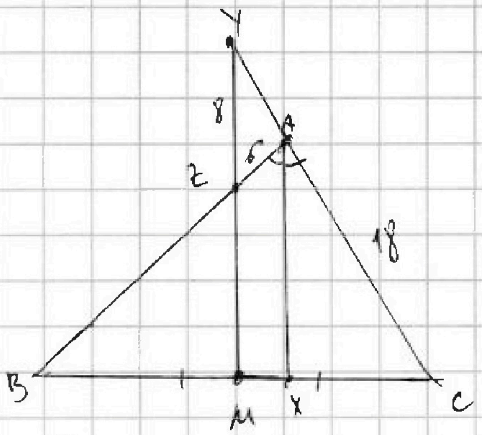
Получаем решения $(m=3; n=10)$, $(m=10; n=3)$. Ответ: $(3;10)$; $(10;3)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Решение:

$\angle BZM = \angle BAY$, т.к. $MZ \parallel AX$, AB — секущ.

$\angle BZM = \angle AZY$; $\angle AYZ = \angle CAX$, т.к. $MZ \parallel AY$, AC — сек.

$\angle AZY = \angle BZM = \angle BAY = \angle CAY = \angle AYZ$, из этого ΔAZY — равнобед. т.к. углы при осн. равны. Из этого следует: $AY = AZ = 6$. По теореме Менелая для ΔABC и прям. MZ: $\frac{MC}{BM} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$; $\frac{BZ}{6} \cdot \frac{6}{24} = 1$; $BZ = 24$

$AB = 24 + 6 = 30$; По теореме косинусов для ΔZAY и стороны YZ: $YZ^2 = AZ^2 + AY^2 - 2\cos\angle ZAY \cdot ZA \cdot AY$;

$64 = 72 - 72\cos\angle ZAY$; $\cos\angle ZAY = \frac{1}{9} = -\cos\angle BAC$, т.к. $\angle ZAY$ и $\angle BAC$ — смеж. $\cos\angle BAC = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для ΔBAC и стороны BC: $BC^2 = AB^2 + AC^2 -$

$- 2\cos\angle BAC \cdot AC \cdot AB$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$BC^2 = 30^2 + 18^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot 30;$

$BC^2 = 900 + 324 + 2 \cdot 2 \cdot 30;$

$BC^2 = 1344;$

$BC = 8\sqrt{21};$

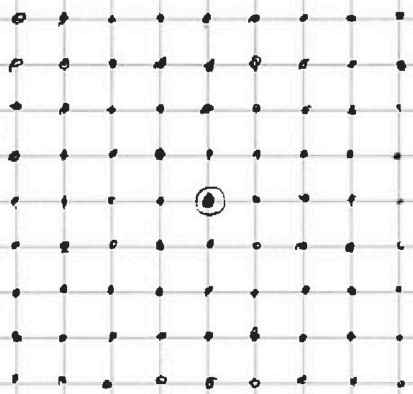
Ответ: $8\sqrt{21}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Посчитаем сначала кол-во способ. перек. 2 ~~клетки~~ точки, если одна из них – ~~это центр~~. ~~клетка~~ точка. Вторую ~~клетку~~ точку мы можем выбрать $81-1=80$ способами,

Но при этом, ~~повертев~~ поворач. такую раскраску мы можем получить ещё 3, т.е. 1 возможный ~~вар.~~ способ. покраски содержит в себе 4 одинак. покрас. Зн-т таких способов покраски: $\frac{80}{4}=20$.

Теперь рассмотрим случай, при кот. 2 точки симметричны относ. центра квадрата. Каждой точке есть единств. ~~пара~~ втор. точка, с которой у неё образует пара. Зн-т всего пар: $\frac{80}{2}=40$. Из такой пары поворотами получается только 1 другая пара точек. Зн-т различных раскрас. $\frac{40}{2}=20$ (ведь из 1 раск. мы можем получ. 2 пары).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

И наконец рассмотрим случай, когда ни одна из точек яв-ся центром квадрата, и точки не симм. относ. центра квадрата. Выбрать пер. точку не яв-ся центром: 80 - способов. Выбрать втор. точку не яв-ся центром, первой точкой и симм. первой точке: $81-3=78$. Итого пар: $\frac{80 \cdot 78}{2} = 80 \cdot 39$ (делим на 2, т.к. неважно выбрать снач. точку A, потом B или B, потом A, что яв-ся одним и тем же). Из каждой такой пары можно получить ещё 3 пары поворотами. Итого $\frac{80 \cdot 39}{4} = 780$ — раскрасок в таком случае

Раскрасок всего: $780+20+20=820$.

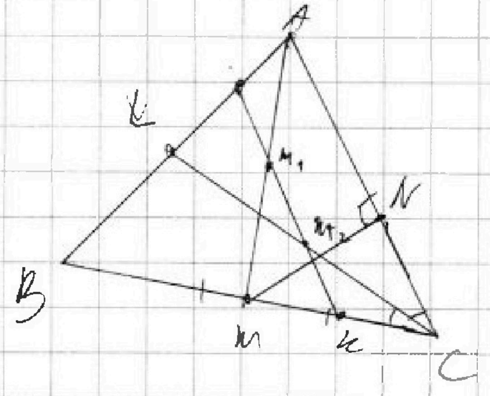
Ответ: 820.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что прямая центров окружностей Ω и ω перпендик. их общей хорде PQ, а т.к. $PQ \perp AC$ (т.к. $PQ \parallel$ высоте из B) А зн-т что линия центров (прямая, соедин. середины отрезк AM и CL) парал. AC. Пусть сер. AM – M_1, сер. CL – M_2, т.к. $M_2M_1 \parallel AC$ ~~и M_1 – сер. AM~~, то $M_1M_2 \cap BC = K$, $M_1K \parallel AC$ и M_1 – сер. AM, то K – сер. MC. $M_2K \parallel AC$, то M_2K – сред. лин. в ΔCML, то $ML \parallel M_2K \parallel AC$. Зн-т. $ML \parallel AC$. Т.к. $ML \parallel AC$, и M – сер. BC, то L – сер. AB. Т.к. CL – и мед. и биссек., то ΔACB – равнобед. $AC = BC$.

$\angle ANM = 90^\circ$, т.к. AM – диаметр окружн. Ω.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $AC = BC = a$; $AN = 8$, $NC = a - 8 \Rightarrow a \geq 8$.

$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$,

$AM = \frac{1}{2}\sqrt{200 + a^2}$, $MC = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$;

$AM^2 - AN^2 = MN^2$ – по теор. Пифагора для $\triangle AMN$.

$MC^2 - NC^2 = MN^2$ – по теор. Пифагора для $\triangle MNC$.

$AM^2 - AN^2 = MC^2 - NC^2$,

$50 + \cancel{\frac{1}{4}a^2} - \cancel{64} = \cancel{\frac{a^2}{4}} - a^2 + 16a - \cancel{64}$

$a^2 - 16a + 50 = 0$; $D = 256 - 200 = 56$, $D > 0$;

$a = \frac{16 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 8 \pm \sqrt{14}$, т.к. $a > 8$, то

$a = 8 + \sqrt{14} = AC = BC$.

Ответ: $8 + \sqrt{14}$; $8 + \sqrt{14}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \le 3 \\ |3x-y| \le 1 \end{cases}$$

$-3 \le x-3y \le 3$

$-1 \le 3x-y \le 1$

$-3 \le 3x-3y \le 3$

$-3 \le 3y-x \le 3$

$-6 \le 8x \le 6$

$\boxed{-3 \le 4x \le 3}$

$-3 \le 3y-x \le 3$

$-1 \le y-3x \le 1$

$-4 \le 4y-4x \le 4$

$-13 \le 4y+8x \le 13$

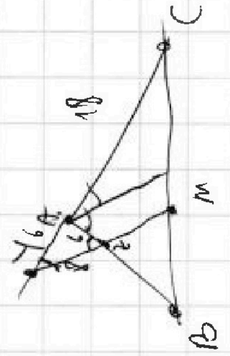
$4y+8x=13$

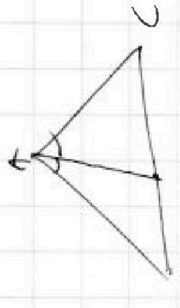
$x=\frac{3}{4}$

$4y+8\cdot\frac{3}{4}=13$

$4y=7$

$y=\frac{7}{4}$





$(m+n)^2-9(m+n)=A=(m+n)(m+n-9)$ $B=mn(m+n-3)$

если $m=1$; $A=1+2n+n^2-9-9n$

n^2-7n-8

$(n+1)(n-8)$

$n \mid n-2$

$x \le \frac{3}{4}$

$\frac{4n^2+4n+1-1}{4}$ $2n^2m$

$(2n+1)^2$

$-9 \le 3x-3y \le 9$

$-9 \le 3y-3x \le 9$

$-1 \le 3x-y \le 1$

$-10 \le 8y \le 10$

$-\frac{5}{4} \le y \le \frac{5}{4}$

$\frac{3}{4}-\frac{21}{4}=-\frac{18}{4}$

$\frac{(2n+1)^2-1}{4}$

$\boxed{5+6=11 \quad y=\frac{5}{4};\ x=\frac{3}{4}}$

$\frac{8}{4}+\frac{9-1}{4}=2+2=4$

$4+\frac{8\cdot 6}{2}=4+24=28$

$\frac{3}{4}-\frac{15}{4}=-3$

$\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=1$

$\frac{(2n+4)(2n-2)}{2}=2n(n-1)$

$\frac{((2n+1)^2-1)((2n+1)-3)}{2\cdot 4}$

$D=81+117\cdot 4=629$

$\frac{9+23}{2}$

$m+n=16$

$m+n=-7$

$23\cdot 23=529$

$117\cdot 4=468$, $468+81=549$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$3x+3+2d = x^4+4x^3+4x^2$

$2d = x^4+4x^3+4x^2-3x-3;$

$x^4+4x^3+4x^2+4d = 3x^2;$

$4d = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = -x^4-4x^3-x^2;$

$-x^4-4x^3-x^2 = 2x^4+8x^3+8x^2-6x-6$

$3x^4+12x^3+9x^2-6x-6=0;$

$x^4+4x^3+3x^2-2x-2=0;$

$x^4+4x^3+3x^2-2x-2 \,|\, x+1$; x^3+3x^2-2

$(x^3+3x^2-2)(x+1)=0;$

$x^3+3x^2+0x-2 \,|\, x+1$; x^2+2x-2

$(x+1)^2(x^2+2x-2)=0;$

$D = 4+2\cdot4 = 12;$

$x = \frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2} = -1\pm\sqrt{3};$

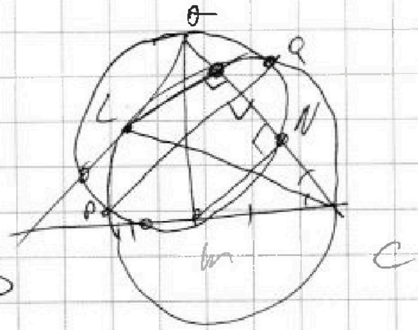
$\boxed{x=-1}$

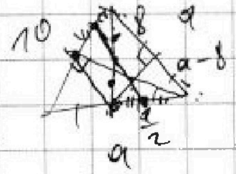
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





$\frac{a^2}{4} - a^2 + 16a - 64$

$\frac{7}{4}a^2 + 50 - 64$

$a^2 - 16a + 50 = 0$,

$D = 256 - 200 = 56$, $D > 0$,

$a = \frac{16 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 8 \pm \sqrt{14}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!