МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2+2\sqrt{3}tx+4t^2-4=0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2-2ab+b^2+15a-15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM=MN=NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB=CD$. Найдите AB, если $BC=12$, $\cos(2\angle CAN)=-\frac{1}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED+DO$, если известно, что $BE=10$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x+y-2|}=1.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$x^2+2\sqrt{3}tx+4t^2-4=0$, 2 действ. корня , $x_1\cdot x_2>0$

$D=(2\sqrt{3}t)^2-4\cdot(4t^2-4)>0$ – т.к 2 корня (различных)

$(2\sqrt{3}t)^2-4(4t^2-4)>0 \Leftrightarrow 4\cdot3t^2-16t^2+16>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3t^2-4t^2+4>0 \Leftrightarrow 4>t^2 \Leftrightarrow -2<t<2$

$D=4\cdot3t^2-16t^2+16=4(4-t^2)$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-2\sqrt{3}t+\sqrt{4(4-t^2)}}{2}=-\sqrt{3}t+\sqrt{(4-t^2)} \\ x=\dfrac{-2\sqrt{3}t-\sqrt{4(4-t^2)}}{2}=-\sqrt{3}t-\sqrt{4-t^2} \end{array}\right.$$

~~1. $\begin{cases}-\sqrt{3}t+\sqrt{4-t^2}>0\\-\sqrt{3}t-\sqrt{4-t^2}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{4-t^2}>\sqrt{3}t\\-\sqrt{4-t^2}>\sqrt{3}t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4-t^2>3t^2\\4-t^2>3t^2\end{cases} \Rightarrow$~~

~~$4-t^2>3t^2 \Leftrightarrow 4>4t^2 \Leftrightarrow t^2-1<0 \Leftrightarrow -1<t<1$~~

~~2. $\begin{cases}-\sqrt{3}t+\sqrt{4-t^2}<0\\-\sqrt{3}t-\sqrt{4-t^2}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4-t^2<3t^2\\4-t^2<3t^2\end{cases} \Rightarrow t^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t>1\\t<1\end{array}\right.$~~

$(-\sqrt{3}t+\sqrt{4-t^2})(-\sqrt{3}t-\sqrt{4-t^2})=3t^2-4+t^2=4t^2-4>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t>1\\t<1\end{array}\right.$

$$\begin{cases}-2<t<2\\ \left[\begin{array}{l}t>1\\t<1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<t<-1\\1<t<2\end{array}\right.$$

Ответ: $t\in(-2;-1)\cup(1;2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$a+b=40$, a и b - натуральные

$a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5$, p - простое число

$a^2-2ab+b^2+15a-15b=(a-b)^2+15(a-b)=$

$=(a-b)(a-b-15)=17p^5$

~~1. a>~~ Т.к. $a+b=40$, a и b - нат. числа $\Rightarrow a_{min}=1$, $b_{min}=1$

$a_{max}=39$, $b_{max}=39$

1. $a>b \Rightarrow a-b>0$

$(a-b)(a-b-15)=17\cdot p^5>0 \Rightarrow a-b-15>0$

$a-b\le a_{max}-b_{min}=39-1=38 \Rightarrow a-b\le 38$

$a-b\le 38 \Leftrightarrow a-b-15\le 23$

$\underset{\le 38}{(a-b)}\underset{\le 23}{(a-b-15)}=17\cdot p^5$, p - простое

I $\begin{cases} a-b=17\cdot p^n \\ a-b-15=\cancel{17}\,p^{5-n}\end{cases}$ или II $\begin{cases} a-b=p^n \\ a-b-15=17\cdot p^{5-n}\end{cases}$, $n\le 5$

I. $a-b\le 38 \Rightarrow a-b=17\cdot 1$, $n=0$

$a-b=17\cdot 2$, $n=1$, $p=2$

$a-b\ne 17\cdot 3$, т.к. $17\cdot 3>38$

$a-b=17 \Rightarrow a-b-15=17-15=2=p^5 \Rightarrow p=\sqrt[5]{2}$ - не может быть по условию

$a-b=34 \Rightarrow a-b-15=34-15=19=p^4 \Rightarrow p=\sqrt[4]{19}$ - не может быть по условию

II $a-b-15\le 23 \Rightarrow a-b-15=17\cdot 1$, $n=0$

$a-b-15\ne 17\cdot 2$, т.к. $17\cdot 2>23$

$a-b-15=17 \Rightarrow a-b=32=p^5 \Rightarrow p^5=32 \Leftrightarrow p=2$ - может быть

~~a-b-15=1~~ $\begin{cases} a-b=32 \\ a+b=40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=72 \\ b=a-32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=36 \\ b=4\end{cases}$

2. $b > a \Rightarrow a - b < 0$

$\underbrace{(a-b)}_{<0}(a-b-15) = 17 \cdot p^5 > 0 \Rightarrow a-b-15 < 0$

$a - b \geq a_{min} - b_{max} = 1 - 39 = -38 \Rightarrow a - b \geq -38$

$a - b \geq -38 \Leftrightarrow a - b - 15 \geq -53$

$\underbrace{(a-b)}_{\geq -38}\underbrace{(a-b-15)}_{\geq -53} = 17 \cdot p^5$, p - простое

I $\begin{cases} a-b = -17 \cdot p^n \\ a-b-15 = -p^{5-n} \end{cases}$ или II $\begin{cases} a-b = -p^n \\ a-b-15 = -17p^{5-n} \end{cases}$, $n \leq 5$

I $a - b \geq -38 \Rightarrow a - b = -17$, $n = 0$

$a - b = -34$, $n = 1, p = 2$

~~$a - b = -51$, $n = 1$, $p = 3$~~

~~$a - b \neq -17 \cdot 4$, т.к. $-17 \cdot 4 < -38$~~

$a - b \neq -17 \cdot 3$, т.к. $-17 \cdot 3 < -38$

$a - b = -17 \Rightarrow a - b - 15 = -17 - 15 = -32 = -p^5 \Leftrightarrow p^5 = 32 \Leftrightarrow p = 2$ - может быть

$\begin{cases} a - b = -17 \\ a + b = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 23 \\ b = 40 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11{,}5 \\ b = 28{,}5 \end{cases}$ - невозможно, т.к. a и b - натуральные

$a - b = -34 \Leftrightarrow a - b - 15 = -34 - 15 = -49 = -p^4 = -16$; $-49 \neq -16$ (т.к. $p = 2$)

II $a - b - 15 \geq -53 \Rightarrow a - b - 15 = -17$, $n = 0$

$a - b - 15 = -2 \cdot 17$, $n = 1, p = 2$

$a - b - 15 = -3 \cdot 17$, $n = 1$, $p = 3$

$a - b - 15 \neq -4 \cdot 17$, т.к. $-4 \cdot 17 < -53$

$a - b - 15 = -17 \Leftrightarrow a - b = -2 = -p^5 \Leftrightarrow p = \sqrt[5]{2}$ - невозможно, т.к. p - нат. число

$a - b - 15 = -34 \Leftrightarrow a - b = -19 = -p^4 \Leftrightarrow p^4 = 19 \neq 16$ $(19 \neq 2^4)$

$a - b - 15 = -51 \Leftrightarrow a - b = -36 = -p^4 \Leftrightarrow p^4 = 36 \neq 81$ $(27 \neq 3^4)$

Значит, подходит только 1 пара чисел a и b: $\begin{cases} a = 36 \\ b = 4 \end{cases}$

Ответ: $(36; 4)$

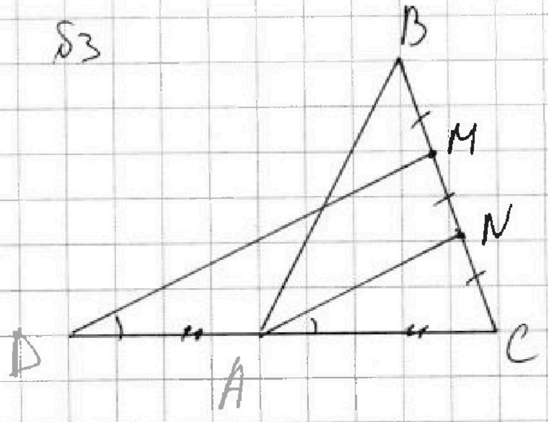
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3



Дано: $\triangle ABC$, $M, N \in BC$, $BM = MN = NC$, $D \in AC$, $AN \parallel MD$, $AB = CD$, $BC = 12$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$

Найти: AB

Решение: 1) $CN = NM$; $AN \parallel DM \Rightarrow$ $\Rightarrow CA = AD$ — по теореме Фалеса

2) $AB = CD = \frac{1}{2} AC$

3) $BC = 12 \Rightarrow CN = \frac{1}{3} BC = 4$.

4) Т.к. $\cos(2\angle CAN) < 0 \Rightarrow 2\angle CAN > \cancel{180}\ 90^\circ$

$\cos(2\angle CAN) = -\cos(180^\circ - 2\angle CAN) \Rightarrow \cos(180^\circ - 2\angle CAN) = \frac{1}{4}$

5) $\angle CAN = \angle CDM$ как накрест лежащие при $AN \parallel DM$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

Ученики, сидящие за 1й партой всегда видят хорошо. Если пуста 2я парта, то за 1й и 3й партой ученики видят хорошо не зависимо от их роста. В остальных случаях ученики должны сидеть по росту (от меньшего к большему ~~начиная~~ от доски).

~~Пусть~~ Назовем ряды A, B и C. Пусть пустая парта на ряду C, тогда на ряду A ~~могут и~~ сидят какие то 3 ученика, т.е на ряду A могут сидеть любые 3 из 8 учеников, причем, единственным образом (по росту) ⇒ на ряд A можно посадить C_8^3 ~~учеников~~ способами, тогда на ряд B можно посадить ~~любого из оставшихся~~ любых 3 из оставшихся 5 учеников, причем, единственным образом, т.е. C_5^3 способами. ~~На оставшийся ря~~ На ряду C будут сидеть оставшиеся 2 ученика, пусть это ученики a и b. Всего на этом ряду их можно рассадить 3! = 6 способами, но 2 из них не подходят по условию: пусть a меньше b, o - пустое место ⇒ a и b не могут сидеть в порядке ~~a → b (от доски) ⇒ т.е. не могут сидеть~~ a-b-o и o-a-b (от доски).

Значит, всего учеников можно рассадить $C_8^3 + \cancel{C_8^3}\, C_5^3 + 4$ способами. Заметим, что если свободная парта окажется на ряду A или на ряду B ⇒ кол-во способов рассадки учеников не изменится. Значит, всего учеников можно рассадить $(C_8^3 + C_5^3 + 4)\cdot 3$ способами

$$(C_8^3 + C_5^3 + 4)\cdot 3 = \left(\frac{8!}{3!\cdot 5!} + \frac{5!}{3!\cdot 2!} + 4\right)\cdot 3 = \frac{8!}{2\cdot 5!} + \frac{5!}{2\cdot 2!} + 12 =$$

$$= 6\cdot 7\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 5 + 12 = 2(12\cdot 7 + 15 + 6) = 210$$ – способов

Ответ: 210 способов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

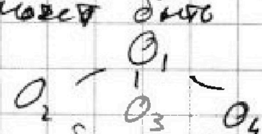
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Представим задачу в виде графа (дороги - ребра, деревни - вершины). По условию из любой вершины можно попасть в любую, причем единственным способом => граф связный, в графе нет циклов.

~~Пусть те в~~ Обозначим те вершины, степень которых больше 1: A_1, A_2, A_3, A_4 (по условию таких вершин 4). Остальные вершины (со степенью 1) обозначим $B_1, B_2 \dots B_n$. Заметим, что если B_i и B_j соединены ребром, то ~~граф~~ они изолированы от остального графа (степень вершин B_i и B_j - 1 => т.к. они уже соединены ребром, то они не могут быть соединены с другими вершинами) => граф не связен - противоречие => Никакие 2 вершины B_i и B_j не соединены. Значит, ~~в~~ любая вершина B_i соединена с какой-то ~~вершиной A_i~~ из вершин A_1, A_2, A_3, A_4, причем, только с одной.
Рассмотрим вершины A_1, A_2, A_3 и A_4. Временно „выкинем" вершины B и ребра, соединяющие B_i и A_j.
В графе из вершин A_1, A_2, A_3 и A_4 нет циклов, т.к. циклов не было в изначальном графе => ~~этот~~ граф - дерево.
Заметим, что дерево из 4х вершин может быть всего 2х видов: $O_1 - O_2 - O_3 - O_4$ или



, причем, в обоих случаях сумма степеней вершин будет 6.
Значит, для связи между собой вершин A_1, A_2, A_3, A_4 требуется 3 ребра ~~сумма~~ (или сумма степеней вершин 6). Пусть сумма степеней ~~всех вершин графа — S~~, вершин A — S, а сумма степеней вершин, необходимых для связи между собой вершин A — S_A ($S = 3+4+5+7 = 19$; $S_A = 6$ - нашли ранее).
Заметим, что сумма степеней вершин B — S_B: $S_B = S - S_A$, т.к. $S = S_A + S_B$ (т.к. вершины A ~~связаны~~ соединены только между собой и с вершинами B). Значит, $S_B = 19 - 6 = 13$. Сумма степеней вершин B - 13, а степень каждой вершины = 1 => всего 13 вершин B. Значит, всего в графе $13 + 4 = 17$ вершин.

Ответ: 17 деревень на острове.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x+y-2|}=1$

1. Пусть $x+y-2\geq 0$

ОДЗ: $\begin{cases}2x+2y-x^2-y^2\geq 0\\ x+y-2\geq 0\\ 1-x-y+2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(x+y)-(x+y)^2+2xy\geq 0\\ x+y\geq 2\\ x+y\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)(2-x-y)\geq -2xy\\ 2\leq x+y\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2xy\geq (x+y)(x+y-2)\\ 2\leq x+y\leq 3\end{cases}$

$2\leq x+y\leq 3$, x и y - целые $\Rightarrow$ $x+y$ - целое $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=2\\ x+y=3\end{array}\right.$

1) $x+y=2$

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-x-y+2}=1 \Leftrightarrow \cancel{\sqrt{(x+y)(2-(x+y}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy}+\sqrt{3-(x+y)}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2\cdot 2-2^2+2xy}+\sqrt{3-2}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2xy}=0 \Leftrightarrow xy=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right.$

$\begin{cases}x=0\\ x+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}$; $\begin{cases}y=0\\ x+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$

2) $x+y=3$

$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy}+\sqrt{3-(x+y)}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2\cdot 3-3^2+2xy}+\sqrt{3-3}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2xy-3}=1 \Rightarrow$

$2xy-3=1 \Leftrightarrow 2xy=4 \Leftrightarrow xy=2$

$\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-y\\ (3-y)y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3-y\\ y^2-3y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=2\end{array}\right.\\ x=3-y\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\end{array}\right.$

$y^2-3y+2=0$, $D=9-4\cdot 2>0$

По т. Виета: $\begin{cases}y_1+y_2=3\\ y_1\cdot y_2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y_1=1\\ y_2=2\end{cases}$

2. $x+y-2\le 0$

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}+\sqrt{1+x+y-2}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy}+\sqrt{x+y-1}=1$

ОДЗ: $\begin{cases}2x+2y-x^2-y^2\ge 0\\ 1+x+y-2\ge 0\\ x+y-2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2xy\ge(x+y)(x+y-2)\\ x+y\ge 1\\ x+y\le 2\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2xy\ge(x+y)(x+y-2)\\ 1\le x+y\le 2\end{cases}$

$1\le x+y\le 2$, x и y – целые $\Rightarrow$ $x+y$ – целое $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l}x+y=1\\ x+y=2\end{array}\right.$

1) $x+y=1$

$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy}+\sqrt{x+y-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2\cdot 1-1+2xy}+\sqrt{1-1}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2xy+1}=1 \Rightarrow 2xy+1=1 \Leftrightarrow 2xy=0 \Leftrightarrow xy=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right.$

$\begin{cases}x=0\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$; $\begin{cases}y=0\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$

2) $x+y=2$

$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy}+\sqrt{x+y-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2\cdot 2-2^2+2xy}+\sqrt{2-1}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2xy}+1=1 \Leftrightarrow xy=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases} \text{ или } \begin{cases}y=0\\ x=2\end{cases}\right)$

Ответ: $(0;2)$; $(2;0)$; $(2;1)$; $(1;2)$; $(0;1)$; $(1;0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

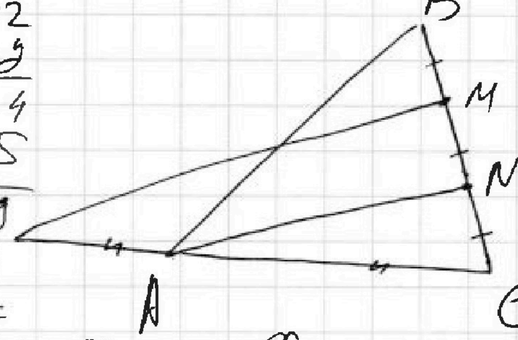
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$12 \times 9 = 84$

$84 + 15 = 99$

$99 + 6 = 105$



$BM = MN = NC$

$AN \parallel ND$

$AB = CD$

$BC = 12$

$\cos 2\angle CAN = -\frac{1}{4}$

$C_8^2 \cdot 4 + C_8^3 + C_3^3$

$\frac{8!}{2! \cdot 6!}$

a a b o

b o o a

o b a b

1. $CA = AD$ по т. Фалеса

$AB = CD = 2CA$

C_8^6

$CN = 4$

1 3 1 4

4 3 2 5

5 6 3 6

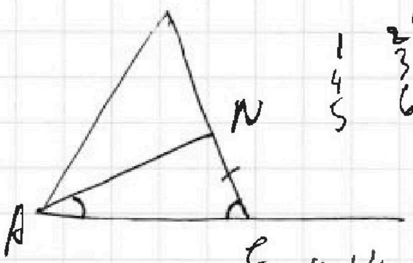
$16a^2 - a^2 = 15a^2$

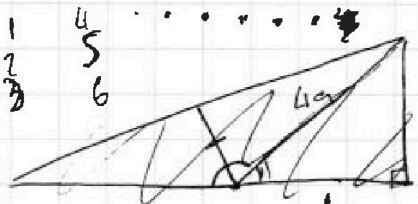
a o b

b o a

a b o

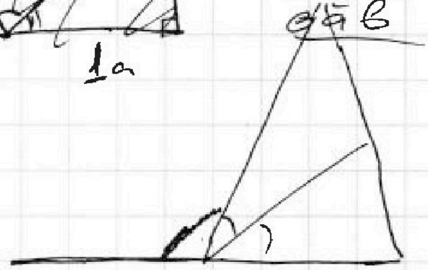
a a b

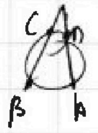




414

207

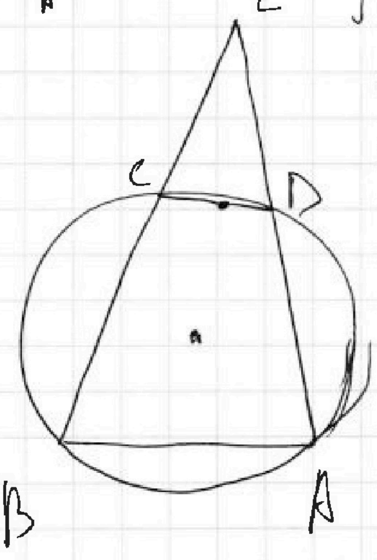




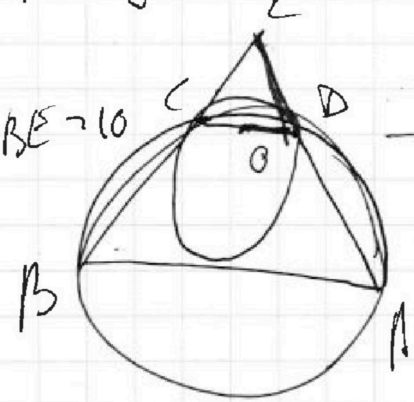
$\sqrt{15a^2 + (x+a)^2} = 4 + y$

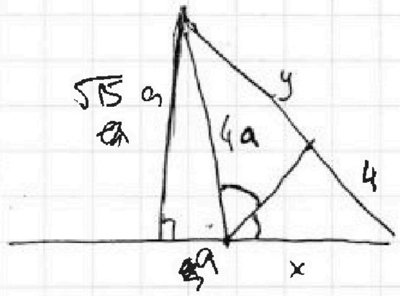
$\frac{4a}{x} = \frac{y}{4}$

$16a = xy$



$BE = 10$





$+ 1 \cdot 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(a-b)(a-b-15)=17p^5$

<40

$17 \quad p^5$

$17p \quad p^4$

$17p^2 \quad p^3$

$17p^3 \quad p \quad 17$

$a+b=40 \Rightarrow a<40$

$a-b=40-b<40 \quad b<40$

$a-b-15=40-b-15<25$

$(a-b)(a-b-15)$

$<40 \quad <25$

17 или p^4

1) $a-b-15=17 \Rightarrow a-b=32$

$a-b=p^5=32, \ p=2$

2) $a-b=17$

$a-b-15=p^5 \Rightarrow 2=p^5$ - не может быть

3) $a-b=34, \ p=2$

$a-b-15=19 \neq 2^4$

1. $a>b$

$a>b+15$

2. $b>a$

$38+15=53$

$(a-b)(a-b-15)$

$\geq -40 \quad \geq -53$

≥ -38

$a-b=-b+a>-40$

$<40 \ <40 \ >-40$

$a<40$

$b<40$

$a-b<0$

17

34

51

$42:4$

-34

1) $a-b=-17$

$a-b-15=-32=-p^5, \ p=2$

2) $a-b=-34, \ p=2$

$a-b-15=-49 \neq -2^4$

$51-15=$

$=41-5=36$

3) $a-b-15=-17 \Rightarrow a-b=-2 \neq -p^5$

4) $a-b-15=-34 \Rightarrow a-b=-19 \neq -p^4$

5) $a-b-15=-51 \Rightarrow a-b=-36 \neq -p^3$

$17 \cdot 3 = 51$

$40{,}0 - 11{,}5 = 28{,}5$

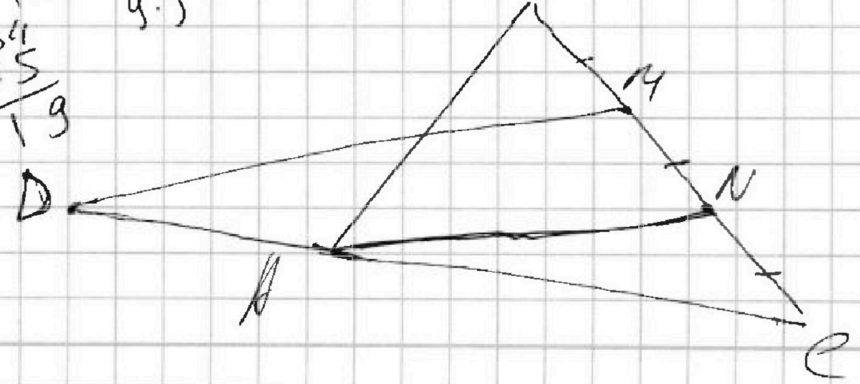
$\begin{cases} a-b=32 \\ a+b=40 \end{cases}$

$36 \quad -4$

$AB=CD$

$34-15=19$

$9 \cdot 9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

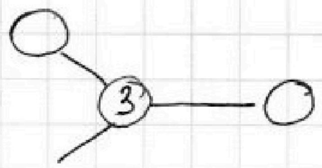
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Из любой в любую по 1 маршруту => нет циклов

4 деревни: A: 3, 4, 5, 7 , ост. - по 1 : B

дерево

Ск. всего деревень?



A — B, B, B

$A_1 - A_2 - A_3 - A_4$ — 6

Всего : 17 деревень

$3+4+5+7-1-2-2-1 = 1+5+7$ = B

$-3-3$

- типа B

A_1 — 6: A_2, A_3, A_4

A_1: A_2, A_3 — A_4 — то же самое

$6 \neq 5 > 4$

$4 < 5 < 6$

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x+y-2|} = 1$

1. $x+y-2 \geq 0$

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-x-y+2 \geq 0 \\ x+y-2 \geq 0 \end{cases}$$

$2(x+y) \geq x^2+y^2$

$\Leftrightarrow 3 \geq x+y$

$x+y \geq 2$

$\Leftrightarrow$ ~~x+y+x+y~~

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+y=2 \end{array}\right.$

$\sqrt{4-4} + \sqrt{1-1} = 1$

$\sqrt{2+2-1-4}$

$\sqrt{1-|1+2-2|} = 1$

$\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)} = \sqrt{(x+y)(2-x-y)}$

1. $x+y=2$

$2xy \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq 0$

-2 -1 1 2

$2(x+y)-(x^2+y^2)$

$2(x+y)-(x+y)^2+2xy$

$(x+y)(2-x-y)+2xy \geq 0$

$(x+y)(2-x-y) \geq -2xy$

$(x+y)(x+y-2) \leq 2xy$

$3 \quad 1 \leq 2xy$

$2(x+y)-((x+y)^2-2xy)$

$xy \geq 1{,}5$

$\sqrt{2(x+y)-(x+y)^2+2xy} + \sqrt{3-(x+y)} = 1$

$\sqrt{2\cdot 2-4+2xy} + \sqrt{3-2} = 1$

$\sqrt{2xy} = 0 \Leftrightarrow x=0$ или $y=0$

2. $x+y=3$

$\sqrt{2\cdot 3-9+2xy} + \sqrt{3-3} = 1$

2.1 $\sqrt{2xy-3} = 1$

$2xy-3 = 1 \Leftrightarrow 2xy = 4$

$y(3-y)=2$

$y^2-3y+2=0$

$y=2$

$y=1$

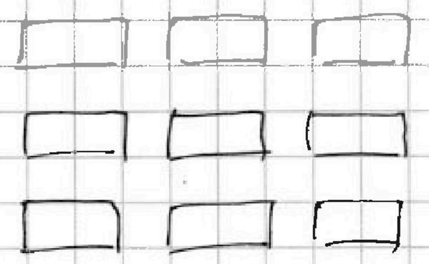
$\begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ $x=3-y$

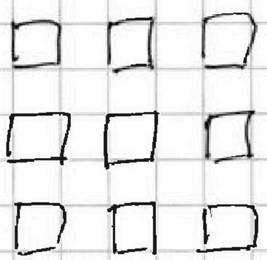
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

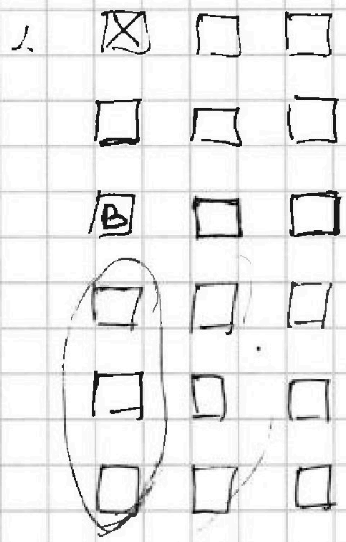
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





1. 1я парта
2. парта перед ним пуста
3. перед ним сидит меньшего роста

8 уч.
все разного роста



$\left(\frac{9!}{6!\cdot 3!}+\frac{6!}{3!\cdot 3!}\right)\cdot 3! = \frac{9!}{6!}+\frac{6!}{3!}$ = неверно

$(C_9^3 + C_6^3)\cdot 3!$

а	а	о
в	о	а
о	в	в

$(C_8^3 + C_5^3 + 3)\cdot 3!$

$\left(\frac{8!}{3!\cdot 5!}+\frac{5!}{2!\cdot 3!}+3\right)\cdot 3!$

$\frac{8!}{5!}+\frac{5!}{2!}+3\cdot 3!$

$7\cdot 8\cdot 9 + 4\cdot 5\cdot 6 = 24(7\cdot 3+5) = 24\cdot 26 = 13\cdot 2\cdot 6\cdot 4$

$13\cdot 3\cdot 6$

$69\cdot 6 = 414$

$6\cdot 7\cdot 8 + 3\cdot 4\cdot 5 + 3\cdot 3\cdot 2 = 6(7\cdot 8+10+3) = 6(56+10+3) = 6\cdot 69 = 414$ способов