



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Рассмотрим } x = -5 \text{ } q^2 = \sqrt{(-5+1)} = 2.$$

$$a_7 = \sqrt{\frac{13(-5) - 35}{(-4)^3}} = \sqrt{\frac{100}{4^3}} = \frac{5}{4}$$

$$a_{13} = 5 - x = 10$$

$$a_{15} = \sqrt{(13(-5) - 35)(-5+1)} = 20.$$

$$a_{13} = a_7 \cdot q^6 = \frac{5}{4} \cdot 2^3 = 10 \text{ - верно.}$$

$$a_{15} = a_{13} \cdot q^2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ - верно.}$$

Таким образом,  $x = -5$  также подходит.

Ответ:  $x = \{-5; 3\}$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$(x - 20)(x - 3) = 0$$

$$\text{Если } x = 20 \quad q^2 = \sqrt{21}, \quad a_7 = \sqrt{\frac{13 \cdot 20 - 35}{21^3}} =$$

$$= \frac{15}{21} \sqrt{\frac{1}{21}}, \quad a_{13} = 5 - 20 = -15.$$

$$\text{Но тогда } a_{13} = a_7 \cdot q^6 = \frac{15}{21} \sqrt{\frac{1}{21}} \cdot \sqrt{21^3} >$$

$$> 0 > -15 = a_{13}. \text{ Противоречие.}$$

$$\text{Если } x = 3 \quad q^2 = \sqrt{3+1} = 2, \quad a_7 = \sqrt{\frac{13 \cdot 3 - 35}{4^3}} =$$

$$= \frac{1}{4}. \quad a_{13} = 5 - x = 2 = \frac{1}{4} \cdot q^6 = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2.$$

$$a_{15} = a_{13} \cdot q^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_{15} = \sqrt{(13 \cdot 3 - 35)(3+1)} = 4. \text{ Итак, } x = 3 \text{ подходит.}$$

$$2) \quad x < -1$$

$$\sqrt{(13x - 35)(x + 1)} = (5 - x) \sqrt{-1 - x}$$

$$\sqrt{-1 - x} (5 - x - \sqrt{35 - 13x}) = 0$$

$$5 - x = \sqrt{35 - 13x} \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 35 - 13x.$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

~~$$x^2 + 3x - 10 = 0$$~~ 
$$(x + 5)(x - 2) = 0.$$

$$x = 2 \text{ не подходит, так как } x < -1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$a_1, a_2, \dots$

Пусть  $q$  — множитель геометрической прогрессии  
 $(a_{i+1} = q \cdot a_i)$ .  $a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}} \Rightarrow x \neq -1$ .

Тогда  ~~$a_{15}$~~   $a_{15} = a_7 \cdot q^8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{13x-15}{(x+1)^2}} \cdot q^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

Если  $13x-15=0$  ( $x = \frac{15}{13}$ ), то  $a_{13} = a_7 \cdot q^6 =$   
 $= \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^2}} \cdot q^6 = 0$ . Но ~~так~~ в таком случае

$a_{13} = 5 - \frac{15}{13} \neq 0$ . Противоречие  $\Rightarrow$   ~~$13x-15=0$~~

$$13x-15 \neq 0$$

$$\text{Тогда } q^8 = \frac{a_{15}}{a_7} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$$

$$\text{Но есть } q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)^2} = a_{15} = a_{13} \cdot q^2 = (5-x) \sqrt{|x+1|}$$

(1)  $x > -1$ :

$$\sqrt{x+1} (5-x - \sqrt{13x-35}) = 0$$

$$5-x = \sqrt{13x-35} \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 13x - 35$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4y \geq \overset{22}{11} \Rightarrow y \geq 7,5.$$

$$y < -1 \text{ и } y \geq 7,5 \Rightarrow y \in \emptyset.$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0 \right), \left( \frac{1-2\sqrt{10}}{2}; 12; 0 \right).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Систему решаем методом:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 & (1) \\ a - b + 5 = 2ab & (2) \end{cases} / +$$

$$a^2 + b^2 + (a - b + 5) = 2ab + 7$$

$$(a - b)^2 + (a - b) - 2 = 0$$

$$(a - b - 1)(a - b + 2) = 0$$

$$1) a - b - 1 = 0$$

$$a = b + 1$$

$$(2) b + 1 - b + 5 = 2(b + 1)b$$

$$3 = b^2 + b$$

$$b^2 + b - 3 = 0 \quad D = 1 + 12 = 13$$

$$b_{\text{кор}} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0 \quad - \text{не подходит}$$

$$b_{\text{кор}} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} > 0 \quad - \text{подходит. Тогда } \sqrt{4-x} = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

$$4-x = \frac{13 - 2\sqrt{13} + 1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad - \text{удовлетв. ОДЗ}$$

$$2) a - b + 2 = 0$$

$$a = b - 2$$

$$(2) b - 2 - b + 5 = 2b(b - 2)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b^2 - 2b = \frac{3}{2}$$

$$b^2 - 2b - \frac{3}{2} = 0 \quad D = 4 + 6 = 10.$$

$$\text{Ср. } b = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} < 0 \quad \text{— не подходит.}$$

$$b = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} > 0 \quad \text{— подходит.}$$

$$\text{Тогда } \sqrt{4-x} = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 4-x = \frac{10 + 4\sqrt{10} + 4}{4} =$$

$$= \frac{7 + 2\sqrt{10}}{2} \quad x = 4 - \frac{7 + 2\sqrt{10}}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2} \quad \text{— подходит.}$$

$$\text{ОДЗ } (4 > 0 > \frac{1 - 2\sqrt{10}}{2} > -3)$$

$$\frac{1 - 2\sqrt{10}}{2} > -3 \Leftrightarrow 7 > 2\sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{49} > \sqrt{40}$$

$$\text{Корень } x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ также } \in [-3; 4]:$$

$$-3 < 0 < \frac{1 + \sqrt{13}}{2} < \frac{1 + \sqrt{49}}{2} = 4.$$

$$(x; y; z) = \left( \frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 1 \right)$$

$$2) \quad -1 \leq y < 12:$$

$$|y+1| + 3|y-12| = -2y + 37 \leq 13 \Leftrightarrow y \geq 12,$$

$$\text{т.е. } y \geq 12 \text{ и } y < 12 \Rightarrow y \in \emptyset.$$

$$3) \quad y < -1:$$

$$|y+1| + 3|y-12| = -4y + 35 \leq 13$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \leq \sqrt{169} = 13.$$

$$1) \quad y \geq 12$$

$$\cancel{y+1+3y-36} \quad |y+1| + 3|y-12| =$$

$$= y+1 + 3y-36 = 4y-35 \leq 13 \Leftrightarrow y \leq 12.$$

$$y \geq 12 \text{ и } y \leq 12 \Rightarrow y = 12:$$

$$|12+1| + 3|12-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$\sqrt{169-z^2} = 13 \Rightarrow z = 0.$$

$$(1) \quad \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12} =$$

$$= 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x}$$

$$\text{ОДЗ: } x \in [-3; 4].$$

$$\text{Пусть } a = \sqrt{x+3} \geq 0, \quad b = \sqrt{4-x} \geq 0.$$

$$\text{Тогда } a^2 + b^2 = x+3 + 4-x = 7.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

$$\text{Пусть } f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3.$$

Очевидно, что  $4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$   
имеет решение, ~~тогда~~ <sup>когда</sup>  $f(t) = p$  имеет решение  
на отрезке  $[-1; 1]$ .

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(2t - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(t)$  возрастает ~~на~~ на  $D(f)$ .

Значит,  $f(t)$  на отрезке  $[-1; 1]$  примет  
все значения от  $f(-1)$  до  $f(1)$ .

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4, \quad f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10.$$

Значит, при  $p \in [-4; 10]$   $f(t) = p$  будет  
иметь корни на  $[-1; 1]$  ~~невозможно~~.

Очевидно, что при  $p < -4$  или  $p > 10$

$f(t) = p$  будет иметь корни, но не на отрезке  $[-1; 1]$

Ответ:  $p \in [-4; 10]$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

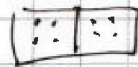
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 Всего клеток  $200 \cdot 250 = 50000$

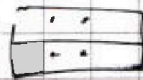
Назовём симметрии относительно центра, вертикальной ср. лин., горизонтальной ср. лин., центральной, вертикальной, горизонтальной.

Для вертикальной симметрии:

достаточно выбрать четыре <sup>клетки</sup> ~~точки~~ в левой половине прямоугольника, а остальные клетки определят в правой половине — это  $C_{25000}^4$  способов.



Аналогично, для горизонтальной симметрии можно выбрать 4 точки в верхней половине прямоугольника —  $C_{25000}^4$ .



Для центральной симметрии также достаточно 4-х точек в левой половине, а остальные точки определят —  $C_{25000}^4$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

Пусть  $(a-c) \cdot (b-c) = p^2$  ( $p$  - простое),

$a > b \Rightarrow a-c > b-c$ , то есть существуют

два случая:

$$1) \begin{cases} a-c = p^2 & (1) \\ b-c = 1 & (2) \end{cases} \quad 2) \begin{cases} a-c = -1 & (1') \\ b-c = -p^2 & (2') \end{cases}$$

Поскольку  $p$  - простое,  $p^2 = p \cdot 1 = (-1) \cdot (-p^2) =$   
 $= p \cdot p = (-p) \cdot (-p)$  - всего 4 способа разложения  $p^2$

на 2 простых множителя (но  $p \cdot p$  и  $(-p) \cdot (-p)$  не подходят, так как  $a-c \neq b-c$ ).

$$1) \text{ Тогда } (a-c) - (b-c) = p^2 - 1 \Leftrightarrow a-b = p^2 - 1.$$

$$\text{Если } p \equiv 2 \pmod{3} \quad p^2 - 1 \equiv 2^2 - 1 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Если } p \equiv 1 \pmod{3} \quad p^2 - 1 \equiv 1^2 - 1 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Если } p \equiv 0 \pmod{3} \quad p^2 - 1 \equiv 0^2 - 1 \pmod{3} \equiv 2 \pmod{3}$$

Так как  $3 \nmid (a-b) \nmid 3$ , то  $(p^2 - 1) \nmid 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}$ . Единственное простое, кратное

трём,  $\Rightarrow$  то число 3  $\Rightarrow p = 3$ .

$$a = b + p^2 - 1 = b + 8.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ \_ \_  
ИЗ  
\_ \_ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12}, \quad 2$$

$$= 2\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2 + 12,25}$$

$$2\sqrt{\frac{47}{4}} = \sqrt{47}$$

Точно убывает при  $x > \frac{1}{2}$

$$\sqrt{x+3} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12} + \sqrt{4-x}$$

$$x \in [-3; 4]$$

$$a = \sqrt{x+3}$$

$$b = \sqrt{4-x}$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a^2 + b^2 = 7$$

$$a - b = -2$$

$$2ab = 3$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab =$$

$$= 4 + 6 = 10$$

$$t_1 = -2$$

$$t_2 = 1$$

24

$$\sqrt{x+3} = -2 + \sqrt{4-x}$$

$$a + b = \sqrt{10}$$

$$a - b = -2$$

$$0, \sqrt{5}$$

$$0, 0$$

$$-1, \sqrt{2}$$

$$-1, \sqrt{8}-2$$

$$-2, 1$$

$$-2, \sqrt{6}-2$$

$$a = \frac{\sqrt{10} + 2}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{10} - 2}{2}$$

$$2a = \frac{\sqrt{10} - 2}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{10} + 2}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b^2 = 560 \Leftrightarrow b^2 + b + 8 = 560$$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$(b + 24)(b - 23) = 0$$

Если  $b = 23$   $a = 23 + 8 = 31$ .

Из (2)  $c = b - 1$ .  $c = 22$ .

Если  $b = -24$   $a = -24 + 8 = -16$ .

$$c = ~~24 - 1~~ - 24 - 1 = -25$$

Аналогично, в случае 2) получим, что

$$a - b = (a - c) - (b - c) = -1 - (-p^2) = p^2 - 1,$$

откуда  $p = 3$ ,  $b \cdot a = b + 8$ . ~~И~~ Здесь так же

$$(b + 24)(b - 23) = 0.$$

Но из ~~(1)~~ (1')  $c = a + 1$ .

Если  $(a; b) = (31; 23)$ , то  $c = 32$ .

Если  $(a; b) = (-16; -24)$ , то  $c = -15$ .

Таким образом, существуют 4 такие тройки:

Ответ:

$$(31; 23; 32), (-16; -24; -15), (31; 23; 22), (-16; -24; -25).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если раскраска имеет как минимум 2 вида симметрии, то очевидно, имеет и вращения.  
Тогда фигур  $C_{12500}^2$ .

Значит, всех ~~видов~~ способов

$$C_{25000}^2 + C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 =$$
$$= 3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$

Ответ:  $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$



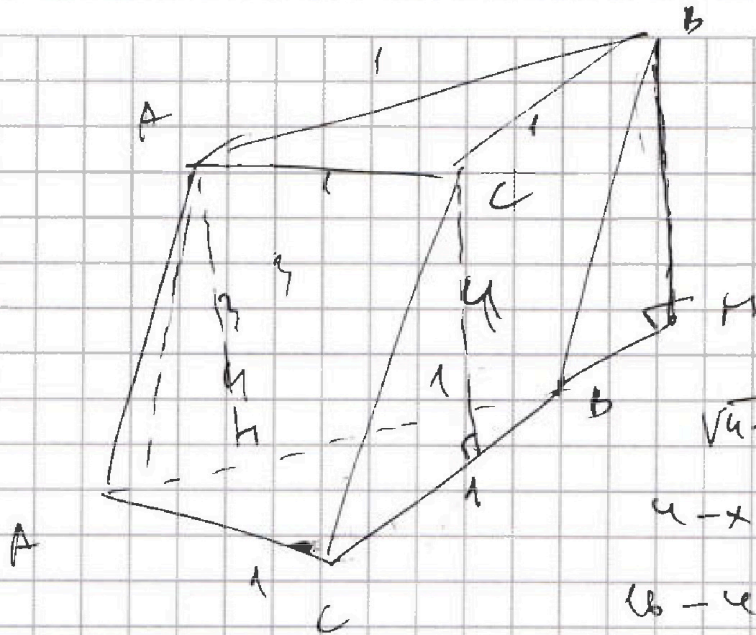


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{4-x} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

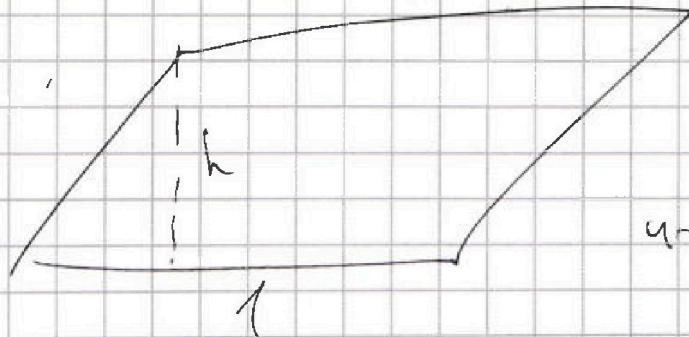
$$4-x = \frac{(4-2\sqrt{13})^2}{4}$$

$$4b - 4x = 14 - 2\sqrt{13}$$

$$4x = 2 + 2\sqrt{13}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

Двусторонки по 2  
 1



$$h = 4$$

$$1 - 2\sqrt{10} \approx -6$$

$$7 \approx 2\sqrt{10}$$

$$4-x =$$

$$\frac{1-66}{2} = -\frac{56}{2} = -28$$

$$4 = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} > \sqrt{7}$$

$$2 + \sqrt{10} > 2\sqrt{7}$$

$$4 + 2\sqrt{10} + 10 > 28$$

$$2\sqrt{10} > 14$$

$$\sqrt{10} > 7$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-65 - 35 = 100$$

$$260 - 25 = \dots$$

$$560 =$$

$$\frac{25}{16}$$

$$a - b = p^2 + 1, \quad x = -5.$$

$$a = b + p^2 + 1$$

$$560 = a + b^2 = b^2 + b + p^2 + 1$$

$$b^2 + b + p^2 = 559$$

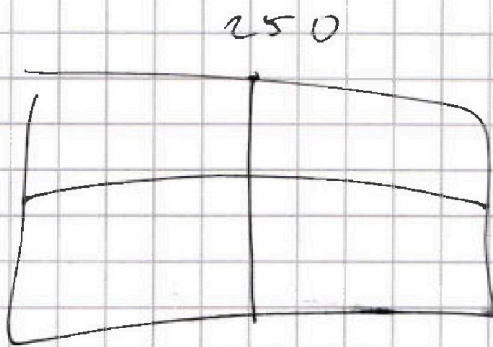
$$35 - 13x$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 24 \\ \hline 92 \\ 46 \\ \hline 552 \end{array}$$

Всего 50000 человек

200



или

11 x 200

$$\sqrt{x+1} (5-x - \sqrt{35-13x}) = 0$$

$$a - b + 5 = 2ab \quad q^2 = \sqrt{x+1}, \quad x < 1$$

$$a^2 + b^2 = 7$$

$$(5-x) \sqrt{x+1} = \sqrt{35-13x} (x+1)$$

$$\sqrt{(-1-x)(35-13x)} = 5-x \sqrt{-1-x}$$

2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{15} = a_7 \cdot q^8 = a_7 \cdot (x+1)^2$$

$$b = 2ab(b-1)$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^2 = \sqrt{x+1}$$

$$b^2 + b - 3 = 0$$

$$q^4 = \sqrt[4]{x+1}$$

$$D = 13 \quad b = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(5-x) \sqrt{x+1} = \sqrt{13x-35} (x+1)$$

$$x \neq -1 \quad \sqrt{x+1} (5-x - \sqrt{13x-35}) = 0$$

$$x \neq -1$$

$$\begin{cases} a-b+5=2ab \\ c^2+b^2=7 \end{cases}$$

$$x^2 - 10x + 25 - 13x + 35 = 0$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$D = 529 - 240 = 289 = 17^2$$

$$(a-b-1)(a-b+2) = 0$$

$$a = b+1$$

$$2x + (x-20)(x-3) = 0$$

$$b = 2b(b-1)$$

$$1) \quad x = 0$$

$$\text{Ответ: } x = 3$$

$$a = b-2 \quad \sqrt{\frac{225}{215}} = \frac{15}{21} \sqrt{\frac{1}{21}} \quad a$$

$$3 = 2b(b-1) \quad b^2 + b - 3 = 0$$

$$b^2 - 2b - \frac{3}{2} = 0 \quad 5-x = -15$$

$$D = 4 + 6 = 10 \quad q^6 = -\sqrt{21}$$

$$\begin{matrix} q^2 = 2 \\ q^2 = 2 \end{matrix}$$

$$2) \quad x = 3 \quad a_7 = \sqrt[4]{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4}$$

$$5-x = 2 \quad q^6 = 8 \quad a_{15} = 4$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \leq 13$$

~~\*\*\*\*~~

$$y \geq 12$$

$$4y - 35 \leq 13$$

$$4y \leq 48$$

$$y \leq 12$$

$$y = 12$$

$$-1 < y < 12$$

$$-2y + 37 \leq 13$$

$$y \geq 12$$

$$y < -1$$

$$-4y + 35 \leq 13$$

$$y \geq \frac{22}{4} = 5.5$$

$$x^2 - x - 12$$

Остается  $y = 12$

$$|12+1| + 3|12-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$z=0$        $\sqrt{169} + 5 =$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2+x+12}$$

$$= 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$a = \sqrt{x+3} \quad b = \sqrt{4-x}$$

$$\text{Обз: } x \in [-3; 4]$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a^2 + b^2 = 7$$

$$(a+b)^2 = 7 + 2(a-b)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{точка минимума}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 3 + \frac{3}{2} = -3.5$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$p \in [-4; 10]$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (2\cos^2 x - 1) \cos x - 2\cos x \sin^2 x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x - \cos x(1 + 2\sin^2 x) = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x(3 - 2\cos^2 x) = -3\cos x \end{aligned}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x) &= \cos x (4\cos^2 x - 3) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$3 \cos 2x = 6 \cos^2 x - 3$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$t = \cos x$$

$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$  — когда уравнение имеем корни на  $[-1; 1]$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \quad t = -\frac{1}{2}$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0 \quad t = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 36}}{24} = -\frac{1}{2}$$

$$D = \{44 - 144 = 0\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_4 = \sqrt{\frac{13x - 35}{(x+1)^3}} = \cancel{a} q^4 = a q^4 \quad a_1 = a$$

$$a_{13} = a q^{12} = 5 - x$$

$$a_{15} = a q^{14} = \sqrt{(13x - 35)(x+1)}$$

$$\frac{a}{t^3} \cdot q^4 = a_6$$

$$t^4 = q^4$$

$$t = q^{\frac{4}{3}}$$

$$q^7 = (x+1)^2 = q = (x+1)^{\frac{2}{7}}$$

$$a (x+1)^{\frac{24}{7}} = 5 - x$$

$$q^8 = (x+1)^2$$

$$q^4 = x+1$$

$$x = q^4 - 1$$

$$q = \sqrt[4]{x+1}$$

$$q^4 - 1 = 5 = a q^{12}$$

$$q^4 - 4 = a q^{12}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Только верт  $C_{2500}^4 - C_{1250}^2$

Верно  $C_{2500}^4 - C_{1250}^2$

верно  $50000 \cdot 49998 \cdot 49996 \cdot 49994 - C_{1250}^2$

То есть верно  $(C_{2500}^4 - C_{1250}^2) \cdot 2 + K - C_{1250}^2 +$

$+ C_{1250}^2 = 2 \cdot C_{2500}^4 - 2 \cdot C_{1250}^2 + 50000 \cdot 49998 \cdot 49996 \cdot 49994$

~~49998~~ 49994

$K = C_{2500}^4 = \frac{25000 \cdot 24999 \cdot 24 \dots}{3}$

$3 C_{2500}^4 - 2 C_{1250}^2$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 23 \\ \hline 72 \\ + 48 \\ \hline 552 \end{array}$$

$3 C_{2500}^4 - 2 C_{1250}^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$1) a-c = p^2$$

$$b-c = 1$$

$$c = -p^2 + a = b - 1$$

$$a = b + p^2 - 1$$

$$c = a - p^2 = b - 1$$

$$a = b + p^2 - 1$$

$$a - b = p^2 - 1$$

$$a - c = p^2$$

$$b - c = 1$$

$$c = a - p^2 = b - 1$$

$$a - b = p^2 - 1$$

$$a - b = 9 - 1 = 8$$

$$a = b + 8$$

$$b^2 + b = 55200$$

$$b_1 = \frac{-1 + 47}{2} = 23 \quad D = 1 + 2208 = 2209 = 47^2$$

$$b_2 = -24$$

$$\begin{array}{r} 2233 \overline{) 7} \\ - 21 \phantom{0} \\ \hline 13 \phantom{0} \\ - 13 \phantom{0} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2) a - c = -1$$

$$b - c = -p^2$$

$$a + 1 = b - p^2$$

$$a = b - p^2 - 1$$

$$p = 3$$

$$a = b + 2$$

$$b^2 + b - 558 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 558 = 2233$$

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{2233}}{2}$$

$$a - c = -1$$

$$b - c = -p^2$$

$$a - b = p^2 - 1$$

$$p = 3$$

$$\begin{array}{r} 2209 \overline{) 47} \\ - 17 \phantom{0} \\ \hline 50 \phantom{0} \\ - 34 \phantom{0} \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2209 \overline{) 13} \\ - 13 \phantom{0} \\ \hline 90 \phantom{0} \\ - 78 \phantom{0} \\ \hline 29 \end{array}$$



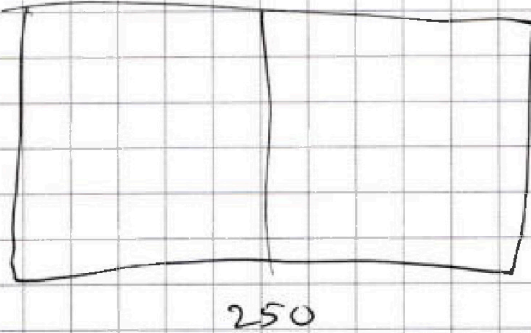


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



50.000

Однозначно правильно!

Относительно

~~2~~  $C^4_{25000}$

1) Цвета

Горизонтально  $C^4_{25000}$

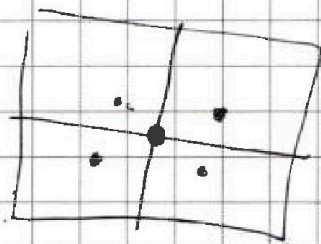
2) Сп. линии

~~4~~ Относительно цвета.

25000 50000 · 49998 · 49996 · 49994

Количество повторений: Сколько можно

все виды симметрии



Две линии выбрать:

~~4~~  $C^2_{12500}$

$C^2_{12500}$

$C^2_{12500}$

~~4~~

Верх - гориз

$C^2_{12500}$

Верх - цвет

$C^2_{12500}$

~~4~~

Гориз - цвет

$C^2_{12500}$

Одним

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a + b^2 = 560$   $13^2 = 400 - 40 = \dots$

Квадраты 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529

$$(a-c)(b-c) = ab - c(a+b) = p^2 - ac^2$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$1) (a-c) = p^2$$

$$b-c = 1$$

$$c = a - p^2 = b + 1$$

$$a - b = p^2 - 1$$

$$a = b + 2$$

$$c = b + p^2 = b + 1$$

$$a = b + 2 + b^2 = 560$$

$$b^2 + b - 558 = 0$$

$$D = 2233$$

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{2233}}{2}$$

$$2) a - c = -1$$

$$b + c = -p^2$$

$$a = c - 1 \quad c = a + 2$$

$$c = b + p^2 = a + 1$$

$$a = a$$

$$a - b = p^2 - 1$$

$$p^2 - 1 \neq 3 \text{ или } p = 2$$

$$a - b = 3 - 1 = 2$$

$$\begin{array}{r} 558 / 2 \\ 279 / 3 \\ 93 / 3 \\ 31 / 31 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 558 \\ \hline 2232 \\ -2233 / 7 \\ 21 \quad | \quad 319 \\ -13 \quad | \\ \hline 63 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 + b^2 + (a-b) + 5 - 2ab - 7 = 0$$

$$(a-b)(a-b+1) - 12 = 0.$$

$$t = a-b.$$

$$t(t+1) - 12 = 0$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$t_1 = -4$$

$$t_2 = 3$$

$$a^2 + b^2 = 7$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a = 2\sqrt{-x^2 + x + 12}$$

$$-x^2 + x + 12 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - x - \frac{47}{4} = 0$$

~~$$\sqrt{x+3} = \sqrt{4-x} + 5 ?$$~~

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{-x^2 + x + 12}$$