



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Класс a_n - n -член ариф.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = d, \text{ тогда}$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = d^8, \text{ то есть}$$

$$d^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{\frac{(13x-35)(x+1)^4}{(13x-35)}} = \sqrt{(x+1)^4}$$

$$= (x+1)^2 \Rightarrow d^8 = (x+1)^2 \quad d^2 = \sqrt{x+1}$$

Тогда $\frac{a_{15}}{a_{13}} = d^2 \Rightarrow a_{15} = d^2 \cdot a_{13}$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x) \cdot \sqrt{x+1}$$

и если $x > -1$, то $x+1 > 0 \Rightarrow 13x-35 \geq 0$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = (5-x)\sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} (\sqrt{13x-35} - (5-x)) = 0$$

$$\sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x = -1, \text{ но } x > -1$$

$$\sqrt{13x-35} = 5-x \Rightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 13x-35 = 25 - 10x + x^2 \Rightarrow x^2 - 23x + 60 = 0 \\ (x-20)(x-3) = 0 \\ x = 20 \text{ или } x = 3 \end{cases}$$

$$x = 3 \quad a_7 = \sqrt{\frac{13 \cdot 3 - 35}{(3+1)^3}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \sqrt{\frac{1}{4^2}} = \frac{1}{4}$$

$$a_{13} = 5 - 3 = 2$$

$$a_{15} = \sqrt{(13 \cdot 3 - 35)(3+1)} = \sqrt{4 \cdot 4} = 4$$

$$d = \sqrt{2}$$

$$\text{но } 5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \\ x = 3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x \neq -1$, так $x+1 \neq 0$ ознам.
Еще $x < -1$

$$\sqrt{(3x-35)(x+1)} = (5-x)\sqrt{-x-1}$$

$$\sqrt{(35-13x)(x+1)} = (5-x)\sqrt{-x-1}$$

$$-x-1 > 0 \Rightarrow 35-13x \geq 0$$

$$\sqrt{-x-1} (\sqrt{35-13x} - (5-x)) = 0$$

$$\sqrt{-x-1} = 0 \quad \text{но } -x-1 > 0 \Rightarrow \text{нет таких}$$

$$\sqrt{35-13x} = 5-x \Rightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 35-13x = 25-10x+x^2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$x=5 \quad a_2 = \sqrt{\frac{13 \cdot 5 - 35}{(5+1)^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{30}{6^3}} = \sqrt{\frac{5}{6^2}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$a_{13} = 5-5=0, \text{ но тогда}$$

все члены выражения равны 0

$$x=-2 \quad a_2 = \sqrt{\frac{13(-2)-35}{(-2+1)^3}} =$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = 2 \quad x = -5$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$x=5 \quad x=-2$$

т.к. $5-x \geq 0$, то оба корня

Ответ ~~$x=5$~~ ~~$x=-2$~~ ~~$x=3$~~

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x+5)(x-2) = 0 \quad x = -5 \quad x = 2, \text{ но } x < -1 \Rightarrow x = -5$$

$$x = -5 \quad a_2 = \sqrt{\frac{13(-5)-35}{(-5+1)^3}} = \sqrt{\frac{-100}{-4^3}} = \sqrt{\frac{25}{4^2}} = \frac{5}{4}$$

$$a_6 = \frac{5}{4}$$

$$a_{13} = 5 - (-5) = 10$$

$$d = \sqrt{2}$$

$$a_{15} = \sqrt{(13(-5)-35)(-5+1)} = \sqrt{100 \cdot 4} = 20$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = 2 / a = \sqrt{\frac{B \cdot 2 - 36}{(2+x)^3}} = \sqrt{\frac{9}{3^3}} \text{ не выполняется} \Rightarrow$$

только $x = -5$

Ответ $x = -5$ и $x = 3$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\text{Рассмотрим } |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169 - z^2}$$

Т.к. $z^2 \geq 0$, то $-z^2 \leq 0 \Rightarrow 169 - z^2 \leq 169$; т.к. функция $y = \sqrt{169 - z^2}$ возрастает при $z \in [0; +\infty)$, то $\sqrt{169 - z^2} \leq \sqrt{169} = 13$
 $169 - z^2 \geq 0$ в смысле.

Значит правая часть уравнения ≤ 13 .

Рассмотрим какие значения может принимать y :

Если $y > 12$, то $y+1 > 13 \Rightarrow |y+1| = y+1 > 13$,
 $3|y-12| > 0$, т.к. $(y-12) > 0$. Тогда левая часть уравнения $|y+1| + 3|y-12| > 13 + 0$, но правая часть ≤ 13 уравнения меньше 13 $\Rightarrow y \leq 12$.

Т.к. $y \leq 12$, то $y-12 \leq 0 \Rightarrow |y-12| = 12-y$

$$\text{Ищем } |y+1| + 3(12-y) = \sqrt{169 - z^2}$$

$$|y+1| + 36 - 3y = \sqrt{169 - z^2}$$

Рассмотрим модуль $|y+1|$

При $y+1 \geq 0$ $y \geq -1$ имеем $(y+1) + 36 - 3y = \sqrt{169 - z^2}$

$$37 - 2y = \sqrt{169 - z^2} \Rightarrow 2y = 37 - \sqrt{169 - z^2}, \text{ т.к.}$$

$$\sqrt{169 - z^2} \leq 13, \text{ то } -\sqrt{169 - z^2} \geq -13 \Rightarrow 37 - \sqrt{169 - z^2} \geq$$

$$\geq 24; \quad 2y = 37 - \sqrt{169 - z^2} \Rightarrow 2y \geq 24 \Rightarrow y \geq 12, \text{ а т.к.}$$

мы знаем, что $y \leq 12$, то $y = 12$ (12+120)

При $y+1 < 0$ $y < -1$ имеем $-(y+1) + 36 - 3y = \sqrt{169 - z^2}$

$$35 - 4y = \sqrt{169 - z^2}, \text{ но } y < -1 \Rightarrow -4y > 4 \Rightarrow 35 - 4y > 39$$

~~т.к. левая~~ а правая часть $\sqrt{169 - z^2} \leq 13$, значит $\sqrt{169 - z^2} \leq 13 < 39 < 35 - 4y$ и уравнение не имеет решений \Rightarrow Единственное решение $y = 12$. Тогда имеем:

$$|y+1| + 3|y-12| = |12+1| + 3|12-12| = 13 \Rightarrow 13 = \sqrt{169 - z^2}$$

возведем обе части в квадрат (они неотриц.) $\Rightarrow 169 = 169 - z^2 \Rightarrow z = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит $y=12$, $z=0$ — единственное решение 2-ого уравнения в этой системе, подставим их в 1-ое уравн:

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{4-x-0} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}, \text{ возведем в квадрат}$$

$$x+3 + (4-x) + 25 + 10\sqrt{x+3} - 10\sqrt{4-x} - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} =$$

$$= 4(x+3)(4-x)$$

$$\cancel{32 + 10\sqrt{x+3} - 10\sqrt{4-x} - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 4(x+3)(4-x)}$$

$$2\sqrt{12+x-x^2} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

Пусть $a = \sqrt{x+3}$ $b = \sqrt{4-x}$, тогда $5 = (x+3) + (4-x)$

$$-2 = a^2 + b^2 - 2 \quad \text{или} \quad 2\sqrt{x} \quad 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 2ab$$

$$a - b + (a^2 + b^2 - 2) = 2ab$$

$$a - b + a^2 - 2ab + b^2 = 2$$

$$(a-b) + (a-b)^2 = 2$$

Пусть $t = a - b$ или

$$t + t^2 = 2 \Rightarrow t = 1 \quad t = -2 \quad \text{поэтому } a - b$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x+4} = 1$$

$$a - b = 1$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1$$

$$\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{4-x}$$

$$x+3 = 1 + 2\sqrt{4-x} + (4-x)$$

$$2x-2 = 2\sqrt{4-x} \quad (x-1) \geq 0$$

$$4x^2 - 8x + 4 = 4(4-x)$$

$$4x^2 - 12x - 12 = 0$$

$$4(x-3)(x+1) = 0$$

$$4x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$a - b = -2$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = -2$$

$$\sqrt{x+3} + 2 = \sqrt{4-x}$$

$$x+3 + 4\sqrt{x+3} = 4-x$$

$$4\sqrt{x+3} = 1-2x \quad 1-2x \geq 0$$

$$16(x+3) = 1-4x+4x^2$$

$$0 = 4x^2 - 20x - 47$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4(-47)4}}{2 \cdot 4} =$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{16(25+47)}}{8} = \frac{20 \pm 4\sqrt{72}}{8}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{5 \pm 2\sqrt{18}}{2} = 2,5 \pm \sqrt{18}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x - 12 \geq 0 \quad x + 3 \geq 3 \quad 4 - x \geq 0$$

$$\text{т.к. } \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < \frac{1 - 3}{2} = -1, \text{ тогда}$$

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} - 1 < -2, \text{ т.к. } x - 12 \geq 0$$

$$\text{значит остается } x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2} < \frac{1 + 3}{2} = 2 \Rightarrow 4 - x \geq 0$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2} > \frac{1 + 1}{2} = 1 \Rightarrow x - 12 \geq 0$$

$$\text{значит } x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ - корни}$$

$$\text{Ответ } \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, 12; 0 \right) \quad (2,5 - \sqrt{18}, 12; 0) \quad \left\| \begin{array}{l} * \text{ тройки} \\ (x, y, z) \end{array} \right.$$

$$x = 2,5 \pm \sqrt{18}$$

$$1 - 2x \geq 0 \quad 4 - x \geq 0 \quad x + 3 \geq 0$$

$$\text{т.к. } 2,5 + \sqrt{18} > 2,5 + 3 = 5,5, \text{ тогда}$$

$$4 - (2,5 + \sqrt{18}) < 0 \Rightarrow \text{это не корни}$$

$$x = 2,5 - \sqrt{18}$$

$$2,5 - \sqrt{18} < 2,5 - 3 < 0 \Rightarrow$$

$$4 - x \geq 0 \text{ и } 1 - 2x \geq 0,$$

$$2,5 - \sqrt{18} > 2,5 - 5 = -2,5 \Rightarrow$$

$$(2,5 - \sqrt{18}) + 3 > 0,5. \text{ Значит}$$

$$x = 2,5 - \sqrt{18} \text{ - корни}$$



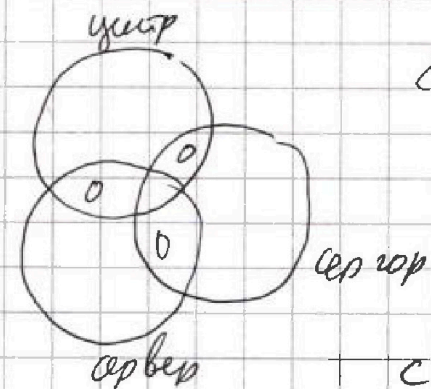
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

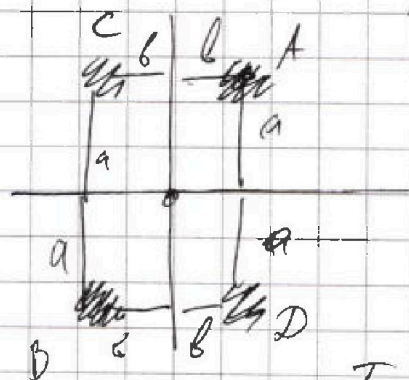
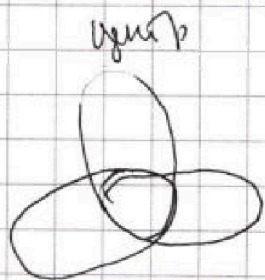
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. Рассмотрим как много было симметрий эти многогранники показывая какой сим. областью тут или knob варианты



Если есть центр симм. и есть какая средняя, то есть и вторая симметрия "средней", т.к.

Из центральной симметрии нуль — центр имеет т.к. стороны равны, то центр является миним. сегм.



Нуль есть 2 центр сим. клеткам с расстоянием до средних линий a и b .

Т.к. есть симметрия от средней линии, то есть точка

метка C симметрична отнюдь от точек A и B , (нуль A относительно верт. разницы нет) Тогда симметричная от центра клетки D закрепится, и симметричная A и B от средней линии т.к. расстояние между симметриями a и b .

Выбрав выше пару точек, все 8 отмеченных будут симметричны относительно средней линии. Значит если есть сим. центр и средняя то это симметрия также относительно 2 средней точки, тогда нет вариантов или фигура и средняя гор по без верт и knob, поста или 0.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

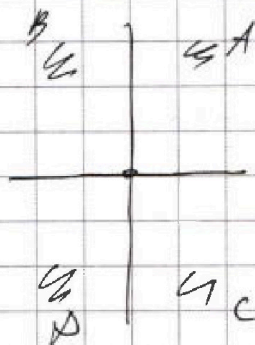
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Сколько по и среднее количество, так также можно~~
~~- выбрать пар: 45~~
 Посчитаем сколько вариантов обладают всеми
 видами симметрии.

Если есть точка клетка А то есть 2 симметрии
 по ее оти линий и 1 оти центра
 То есть образуется четверно клетка



Выбираем Разделим все поле
 на такие четверки клеток
 симметричные оти центра
 и линий их
 $\frac{250 \cdot 200}{4}$ необходимо

выбрать из них 2. то есть
 вариантов

$$\frac{250 \cdot 200}{4} \cdot \frac{(250 \cdot 200 - 1)}{4} = C_{\frac{250 \cdot 200}{4}}^2$$

Тогда всего вариантов

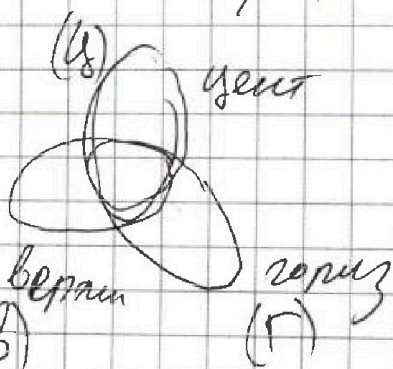
$$y = \frac{(250 \cdot 200)(250 \cdot 200 - 2)(250 \cdot 200 - 4)}{(250 \cdot 200 - 4)}$$

$$b = \frac{(250 \cdot 200)(250 \cdot 200 - 2)(250 \cdot 200 - 4)}{(250 \cdot 200 - 4)}$$

$$2^4 \frac{(250 \cdot 200)(250 \cdot 200 - 2)(250 \cdot 200 - 4)}{(250 \cdot 200 - 4)}$$

$$y \cap b \cap z = 250 \cdot 200 \cdot (250 \cdot 200 - 4)$$

Тогда $y \cup b \cup z = y + b + z - 2(y \cap b \cap z)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_{250-200}^4 = \frac{(250-200) \cdot (250-200-1) \cdot (250-200-2) \cdot (250-200-3)}{4!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{4!}$$

$$= \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{24} = 47520$$

Поставим центр сим:

Квадрат делится на пары симметричных отрезков
поделим по средней линии, тогда



Одна из сторон пары будет справа от него, а другая слева

Значит можно выбрать 4 различных места с одной стороны и оставшиеся отрезки симметрично отобразовать:

$$C_{250-200}^4 = C_{25000}^4 \text{ т.к. с одной стороны}$$

или 25000!

Аналогично симметрично средним числами

$$C_{25000}^4 \text{ т.к. точки делится на пары и}$$

из одной части в другой 25000 точек можно выбрать

Вариантов обладающих всеми этими свойствами

$$C_{250-200}^2 = C_{2500}^2 \text{ т.к. точки делится на пары ABCD}$$

в которых симметричны все пары точек



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 5

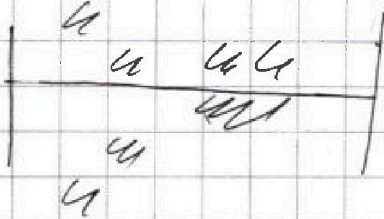
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На 12500 человек "черверки" из которого нужно выбрать 2
 группы по 1500
 человек

симметрией гор вариантов:

C_{25000}^4 т.к. необходимо выбрать 4 человека

из которых по оставшимся 4 будут
 выбраны симметричные и.
 столько же и верт. вариантов



Тогда

$$U = C_{25000}^4$$

$$U_{ABCD} =$$

$$V = C_{25000}^4$$

$$W = C_{25000}^4$$

$$U_{ABCD} = C_{12500}^2 \text{ т.к. все поле делит}$$

на 12500 "четверки" вида ABCD, тогда необходимо
 выбрать 2 четверки из 12500 (всего человек 50000).

Тогда $U_{LBUV} = U + V + W - 2U_{ABCD} =$

$$= C_{25000}^4 + C_{25000}^4 + C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 =$$

$$= 3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 =$$

$$= 3 \cdot \frac{25000 \cdot (25000-1) \cdot (25000-2) \cdot (25000-3)}{4!} - \frac{2 \cdot 12500 \cdot (12500-1)}{2}$$

$$\approx 3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Т.к. $(a-c)(b-c) = p^2$ p - простое число и $(a-c)(b-c)$ целые то они могут быть равны только $1, p, p^2, -1, -p, -p^2$ иначе это множители ~~не взаимно простых~~ или $-p^3$ не входящий в p^2 .

Рассмотрим чему может быть равно $a-c$:

1) $a-c = 1 \Rightarrow b-c = p^2$, тогда $(a-c) - (b-c) = 1 - p^2$
 $a-b = 1 - p^2$
 $a-b = (1-p)(1+p)$

Если $p \equiv 1 \pmod{3}$ или $p \equiv 2 \pmod{3}$, то $1-p$ или $1+p$ соответственно будут делиться на 3, но $a-b \not\equiv 3 \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}$ т.е. простое число $= 3$ и 0

$3 \Rightarrow a-b = 1 - p^2 = 1 - 3^2 = -8 \Rightarrow a = b - 8$, тогда пусть $b = x$
 $a = x - 8$
 $x^2 - 5x = 0$
 $x^2 + 8x - 56 = 0$
 $x^2 + 8x + 552 = 0$

Если $a = b - 8$ то $a < b$ не подходит.

~~$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 552}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{2208}}{2} = \frac{-8 \pm 47}{2} \Rightarrow b = -24 / b = 23$
 $a = -32 / a = 15$~~
 Проверим $b = 24, a = 32$, но $a > b$, не подходит
 $b = 23, a = 15$, но $a > b$, не подходит

2) $a-c = p \Rightarrow b-c = p$ тогда $(a-c) - (b-c) = p - p$
 $a-b = 0$, но тогда $a-b = 3$ не подходит

3) $a-c = p^2 \Rightarrow b-c = 1$ тогда $(a-c) - (b-c) = p^2 - 1$
 $a-b = p^2 - 1$
 $a-b = (p-1)(p+1)$

Если $p \equiv 1 \pmod{3}$ или $p \equiv 2 \pmod{3}$, то $p-1$ или $p+1$ соответ. делят на 3, но тогда $a-b \equiv 3$, значит $p \equiv 0 \pmod{3}$ т.е. простое число $= 3$ и 0 $3 \Rightarrow a-b = p^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решения для $a-b=8$ не подходят на то что a
 $a-b=8$ $a-b \neq 3$ $a > b$.~~

~~$a = b + 8$ подставляем в $a + b^2 = 560$~~

~~$b + 8 + b^2 = 560$~~

~~$b^2 + b - 552 = 0$~~

~~$\begin{cases} b = -24 \Rightarrow a = b + 8 = -16 \\ b = 23 \Rightarrow a = b + 8 = 31 \end{cases}$~~

~~$b = -24 \Rightarrow c = 25$~~

~~$p \neq 3$.~~

~~Если $a = -16$ $b = -24$ то $a + b^2 = 560$ верно $a > b$ верно
 $a - b \neq 3$ верно \Rightarrow~~

~~проверим условие для c :~~

~~$(-16 - c)(-24 - c) = p^2 = 9$~~

~~$(c + 16)(c + 24) = 9$~~

~~$c^2 - 16c - 24c + 16 \cdot 24 - 9 = 0$~~

~~$c^2 - 40c + 384 - 9 = 0$~~

~~$c^2 - 40c + 375 = 0$~~

~~$(c - 15)(c - 25) = 0$~~

~~$c = 15$ $c = 25$~~

~~значит~~

~~$a = -16$ $b = -24$ $c = 15$~~

~~$a = -16$ $b = -24$ $c = 25$~~

~~Если $a = 31$ $b = 23$ $a + b^2 = 560$ верно $a > b$ верно
 $a - b \neq 3$ верно \Rightarrow~~

~~Рассмотрим c :~~

~~$(31 - c)(23 - c) = p^2 = 9$~~

~~$(31 - c)(23 - c) = 9$~~

~~$713 - 23c - 31c + c^2 = 9$~~

~~$c^2 - 54c + 704 = 0$~~

~~$(c - 22)(c - 32) = 0$~~

~~$c = 22$ $c = 32$~~

~~значит~~

~~$a = 31$ $b = 23$ $c = 22$~~

~~$a = 31$ $b = 23$ $c = 32$.~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) $a-c = -1$ $b-c = -p^2$
 $(a-c) - (b-c) = -1 - (-p^2)$
 $a-b = p^2 - 1$, аналогично пункту 3) $p=3$
 $a-b = 3^2 - 1$
 $a-b = 8$ найдем c , получим варианты
 также же как и в пункте 3)

$b = -24$	$a = 16$	$b-c = 1 \Rightarrow c = -25$
$b = 23$	$a = 31$	$b-c = 1 \Rightarrow c = 22$

Проверка $-24 < -16$ $16 - (-24) \neq 3$
 $(-16 - (-25)) - (-24 - (-25)) = 9 - 1 = 9$

$31 > 23$ $31 - 23 = 8 \neq 3$
 $(31 - 22) - (23 - 22) = 9$

4) $a-c = -1$ $b-c = -p^2$
 $(a-c) - (b-c) = -1 - (-p^2)$
 $a-b = p^2 - 1$, аналогично пункту 3) получим
 $a-b = 8$ и 2 варианта для b

$a = -16$	$b = -24$	$a-c = -1 \Rightarrow c = -15$
$a = 31$	$b = 23$	$a-c = -1 \Rightarrow c = 32$

Проверка $-16 > -24$ $(-16 - (-15)) - (-24 - (-15)) = 9$
 $-16 - (-24) \neq 3$

$31 > 23$ $31 - 23 \neq 3$
 $(31 - 32) - (23 - 32) = 9$

5) $a-c = -p$ $b-c = p$
 $(a-c) - (b-c) = -p - (p) = 0 \Rightarrow a-b = 0$ Но $a-b \neq 3$ не
 может



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) $a - c = -p^2$ $b - c = -1$
 $a - b = -p^2 - (-1) = 1 - p^2$, но тогда $1 - p^2 < 0$, т.к.
 $p^2 \geq 2^2 = 4$ тогда $a - b < 0 \Rightarrow a < b$ противоречие

значит из всего 4 варианта:

		a	b	c
Ответ	1)	-16	-24	-15
	2)	31	23	32
	3)	-16	-24	-25
	4)	31	23	22.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(250 \cdot 200)(250 \cdot 200 - 2)(250 \cdot 200 - 4)(250 \cdot 200 - 6) \cdot 3}{16} \\
 &- \frac{2 \cdot (250 \cdot 200)(250 \cdot 200 - 4)}{32} = \frac{(250 \cdot 200)(250 \cdot 200 - 4)}{16} \\
 &\cdot \frac{((250 \cdot 200 - 2)(250 \cdot 200 - 6) \cdot 3 - 250 \cdot 200)}{16} = \\
 &= \frac{50000 \cdot (50000 - 4)}{16} \cdot (3(50000 - 2)(50000 - 6) - 1) \\
 &= \frac{50000 \cdot (50000 - 4) \cdot (7500000000 - 8 \cdot 50000 \cdot 3 + 36 - 1)}{16} \\
 &= \frac{50000 \cdot (50000 - 4) \cdot (3 \cdot 50000^2 - 24 \cdot 50000 + 35)}{16} = \\
 &= \frac{(50000 - 4) \cdot 50000 \cdot (74988000035)}{16} = \\
 &= 2499800000 \cdot 74988000035
 \end{aligned}$$

~~$m = 2134 - 55$~~

$$n = \sqrt{x+1}$$

$$\frac{m}{n^3}$$

7

15 $m \cdot n$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ _ _
ИЗ
_ _ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

a_n - n-ый член ариф.

$$a_7 = \frac{13x-35}{(x+1)^3}$$

$$a_{13} = 5-x$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

Пусть $m = \sqrt{13x-35}$ $n = \sqrt{x+1}$, тогда

$$a_7 = \frac{m^2}{n^3}$$

$$a_{15} = m \cdot n$$

Т.к. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = d$, то $\frac{a_{15}}{a_7} = d^8$

То есть $\frac{m \cdot n}{\frac{m^2}{n^3}} = d^8$

$$n^4 = d^8$$

$$n = d^2, \quad n > 0, \quad \text{т.к. } n = \sqrt{x+1}$$

Значит $a_{13} \cdot d^2 = a_{15}$

$$(5-x) \cdot n = d \cdot \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$(5-x) \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \quad | : \sqrt{x+1} \neq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
(из 7)

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x = p + 3$$

Решим на $[0; 2\pi)$ т.к. в функции

$y = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x$ имеет период $T = 2\pi$.

Тогда $(4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x)' =$

$$= 4 \cdot 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) + 6 \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) + 3(-\sin x) =$$

$$= -\sin x (12\cos^2 x + 12\cos x + 3) =$$

$$= -\sin x (2\cos x - 1)^2 \cdot 3$$

$$y' = 0 \quad \text{или} \quad -\sin x = 0$$

$$2\cos x - 1 = 0$$

$$x = \pi, 2\pi$$

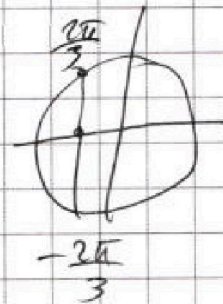
$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n$$

На $[0; 2\pi]$ это будут

$$0; \frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}$$

Значит наибольшее или наименьшее значения функции



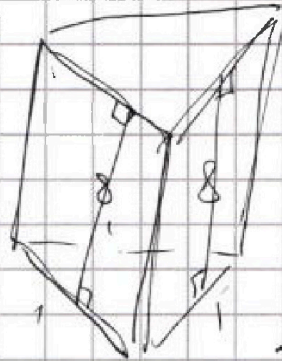
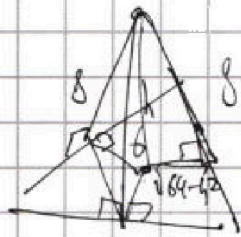
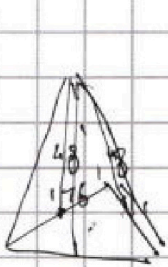


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

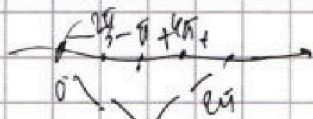


$$2\sin^2 x = 2 - 2\cos x$$

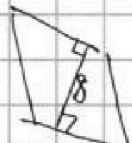
$$-2\sin^2 x = 2\cos x$$

$$\cos^2 x = \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 x - 1$$



$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$



$$\cos(2x+x) = 2\cos^2 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= \cos 2x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \cos x = 9\sin x$$

$$= (2\cos^2 x - 1) \cos x - \sin^2 x (2\cos x) = \begin{cases} p-3 \leq 13 \\ -\frac{1}{2} \leq p-3 \end{cases}$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x) =$$

$$\sin x = 0 \quad x = \pi$$

$$2\cos^2 x + 12\cos x + 12 = 0$$

$$4\cos^2 x + 6\cos x + 1 = 0$$

$$(2\cos x + 1)^2 = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

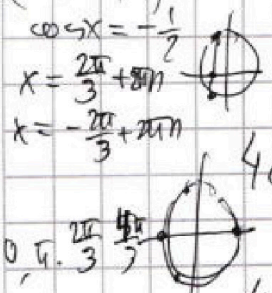
$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1 - (2 - 2\cos^2 x)) =$$

$$\cos x (4\cos^2 x - 3)$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x$$



$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$\begin{array}{l} 4+6+3=13 \quad 0 \\ -4+6-3=-1 \quad \pi \\ 4 \cdot (-\frac{1}{2})^3 + 6 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ = -\frac{4}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} = \frac{-4+12-12}{8} \\ = -\frac{4}{8} \\ = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x = p + 3$$

$$y = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x -$$

$$4 \cdot 3 \cos^2 x (\sin x) + 6 \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) + 3(-\sin x) =$$

$$= -\sin x (12\cos^2 x + 12\cos x + 3) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x = p + 3$$

$$\sqrt{x+3} = 2\sqrt{4-x} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x+3} \right)$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t = p + 3$$

$$\sqrt{x+3} \quad z=0$$

$$2t^2(2t+3)$$

$$x+3 + (4-x) + 4 + 2\sqrt{x+3(4-x)} + 10\sqrt{x+3}$$

$$4t^2(t-1) + 10t(t-1) + 13(t-1) = p$$

$$-10\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x+3(4-x)}$$

276a

$$32 - 2\sqrt{x+3} + 10\sqrt{x+3} - 10\sqrt{4-x} = 4\sqrt{x+3(4-x)}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$y > 12 \quad (y+1) + 3(y-2) \rightarrow 4y - 5 = \sqrt{16}$$

$$16y - z^2 = (4y - 5)^2$$

$$(x+3) + (4-x-z) - 2\sqrt{(x+3)(4-x-z)}$$

$$7-z = 2\sqrt{4x+12-3x-x^2-zx-3z} = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$7-z - 2\sqrt{-x^2+x-zx-3z+12} = 4(y-x-x^2+z)$$

$$7-z - 4y + 4x + 4x^2 - 4z = 2\sqrt{-x^2+x-zx-3z+12}$$

$$4x^2 + 4x - 4y - 5z + 7 = 2\sqrt{-x^2+x-zx-3z+12}$$

$$y \leq 12 \quad \text{или} \quad y > 12 \quad y+1 > 13 \quad |y+1| > 13$$

$$|y-12| = 12-y$$

$$|y+1| + 3(12-y) = \sqrt{169-z^2}$$

$$-13 \leq z \leq 13$$

$$|y+1| + 36 - 3y = \sqrt{169-z^2}$$

$$4 - 6 + 5 = 2a \quad 3/4 \quad 3/4$$

$$y \geq -1, \quad -2y + 37 = \sqrt{169-z^2}$$

$$2ab + b = a + d/3 \quad 3/4 \quad 3/4 \quad 3/4$$

$$y < -1, \quad -4y + 35 = \sqrt{169-z^2} \Rightarrow y, \quad \text{no} \quad y < -1 \quad -4y > 4$$

$$y \geq -1 \quad -2y + 37 = \sqrt{169-z^2} \quad \text{т.к.} \quad \text{no} \quad y < -1 \quad -4y > 4$$

$$-24 < 2y \quad 12 < y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 = a^2 + b^2 - 2$$

$$a - b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab$$

$$a - b + a^2 - 2ab + b^2 = 2$$

$$a - b + (a - b)^2 = 2$$

$$(a - b)(1 + a - b) = 2$$

$$t(1+t) = 2$$

$$t^2 + t = 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \quad (t-1)(t+2)$$

$$t = 1 \quad t = -2$$

$$1 \pm \sqrt{1-4}$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ \times 5 = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ \times 2 \end{array}$$

$$(x-10)^2 - 63$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 24 \\ 84 \\ 92 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4.4.4.11 \\ 22.72 \end{array}$$

$$x \quad \begin{array}{l} x^2 = p^2 \\ x - y = 3 \\ x - y = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 - p - p^2 \\ 1 + p^2 \end{array}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times 23 \\ 63 \\ 62 \\ 713 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25.15 \\ 178 \end{array}$$

$$1 \quad \begin{array}{l} a-c = p \\ b-c = p \end{array}$$

$$2 \quad \begin{array}{l} a-c = 1 \\ b-c = -p^2 \end{array}$$

$$3 \quad \begin{array}{l} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{array}$$

$$4 \quad \begin{array}{l} a-c = p \\ b-c = -p \end{array}$$

$$5 \quad \begin{array}{l} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{array}$$

$$6 \quad \begin{array}{l} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 704 = 4 \cdot 176 \\ 704/16 \\ -64 \quad 144 \\ 64 \end{array}$$

$$1) \quad a = 0$$

$$2) \quad a - b = 1 - p^2 = (1-p)(1+p)$$

$$\begin{array}{l} p = 3 \\ a - b = 1 - 3^2 = -8 \\ a = b - 8 \\ b = 8 + 1 \end{array}$$

$$3) \quad (p^2 - 1)$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 552}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 1-2208 \\ 2007 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -1 \pm \sqrt{\quad} \\ \times 47 \\ \times 49 \\ 1329 \\ 2205 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 = 46 \\ \times 13 \\ 1029 \end{array}$$



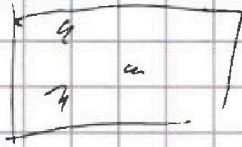
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

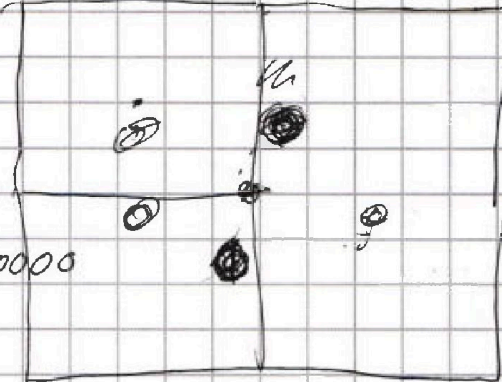
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t(t-4) \cdot (3(t-2)(t-6) - 1) = 25$$



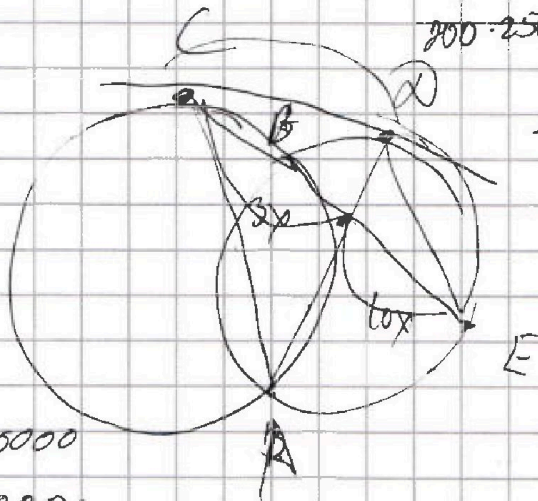
100



$$\begin{array}{r} 75.000.000 \\ - 120.000 \\ \hline 74.988.000 \end{array}$$

1200000

$$C_{200-250}^4$$



$$200 \cdot 250 \cdot (200 \cdot 250 - 2) \cdot (200 \cdot 250 - 4) \cdot (200 \cdot 250 - 8)$$

$$\begin{array}{r} 25.000.000 \\ - 20 \\ \hline 249.980.000 \end{array}$$

