



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a_1, a_2, a_3, \dots
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ - члены геом прогрессии

тогда $a_i = a \cdot b^{(i-1)}$ где b - шаг прогрессии

$$\text{тогда } \frac{a_{15}}{a_7} = \frac{a \cdot b^{14}}{a \cdot b^6} = b^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)} \sqrt{x+1}}{\sqrt{13x-15} \sqrt{x+1^3}}$$

или $13x-35 \neq 0$ 5

$$\text{то } (x+1)^2 = b^8$$

$$b^2 = \sqrt{x+1}$$

$$a_{13} = \frac{a_{15}}{b^2} = \frac{\sqrt{(13x-35)} \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{13-35x} = 5-x$$

$$x > 5 \quad x < 5$$

$$13-35x = 25+x^2-10x$$

$$x^2 + 25x + 12 = 0$$

$$D = 625 - 12 \cdot 4 = 577$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{577} - 25}{2} \text{ или}$$

$$\text{тогда } b = \sqrt{\frac{25 \pm \sqrt{577}}{2}}$$

$$\text{или } x = \frac{25 - \sqrt{577}}{2} \quad \text{т.к. } -12 - \frac{1 - \sqrt{577}}{2} < -1$$

$$\text{или } x = \frac{\sqrt{577} - 25}{2} > -1 \quad \text{т.к. } 577 > 23^2 = 529$$

$$\sqrt{577} - 25 > -2$$

$$\sqrt{577} > 23$$

$$\text{или } 13x-35=0 \quad \text{то } x = \frac{35}{13}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\sqrt{577} - 25}{2}$$

$$\text{тогда } a_7 = a_{15} = 0 = a_1$$

$$5-x = a_7 = 0$$

$$x = 5$$

противоречие

$$13x-35 \neq 0 \quad \text{т.к. } \frac{13x-35}{x+1}$$

$$x \neq -1$$

$$x+1 > 0$$

$$25^2 = 625$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

возьмем z как параметр

$$x + 3 > 0$$

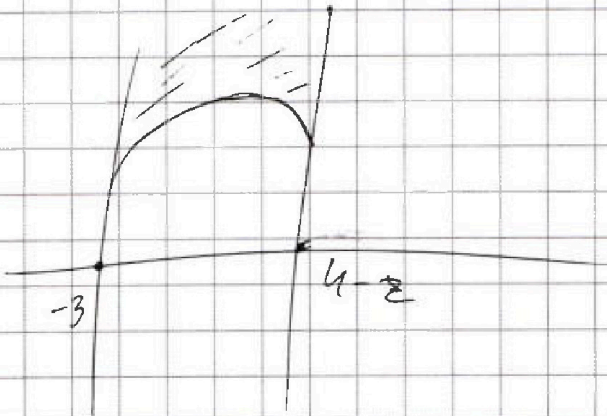
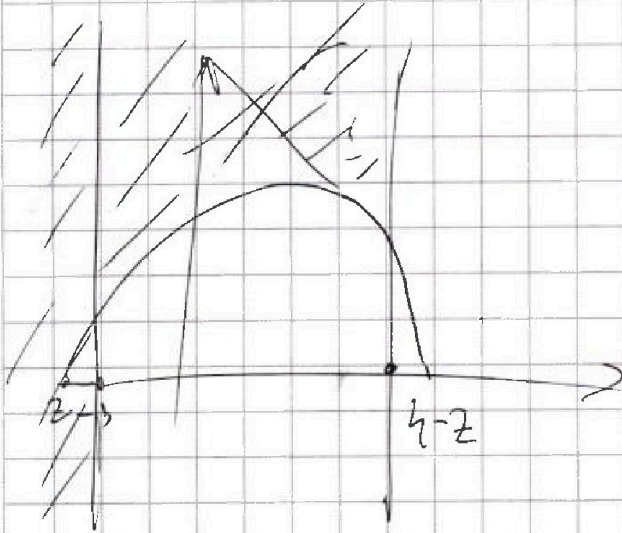
$$x > -3$$

$$4 - x - z > 0$$

$$x < 4 - z$$

$$y + x - x^2 + z > 0$$

$$y > x^2 - x - z$$



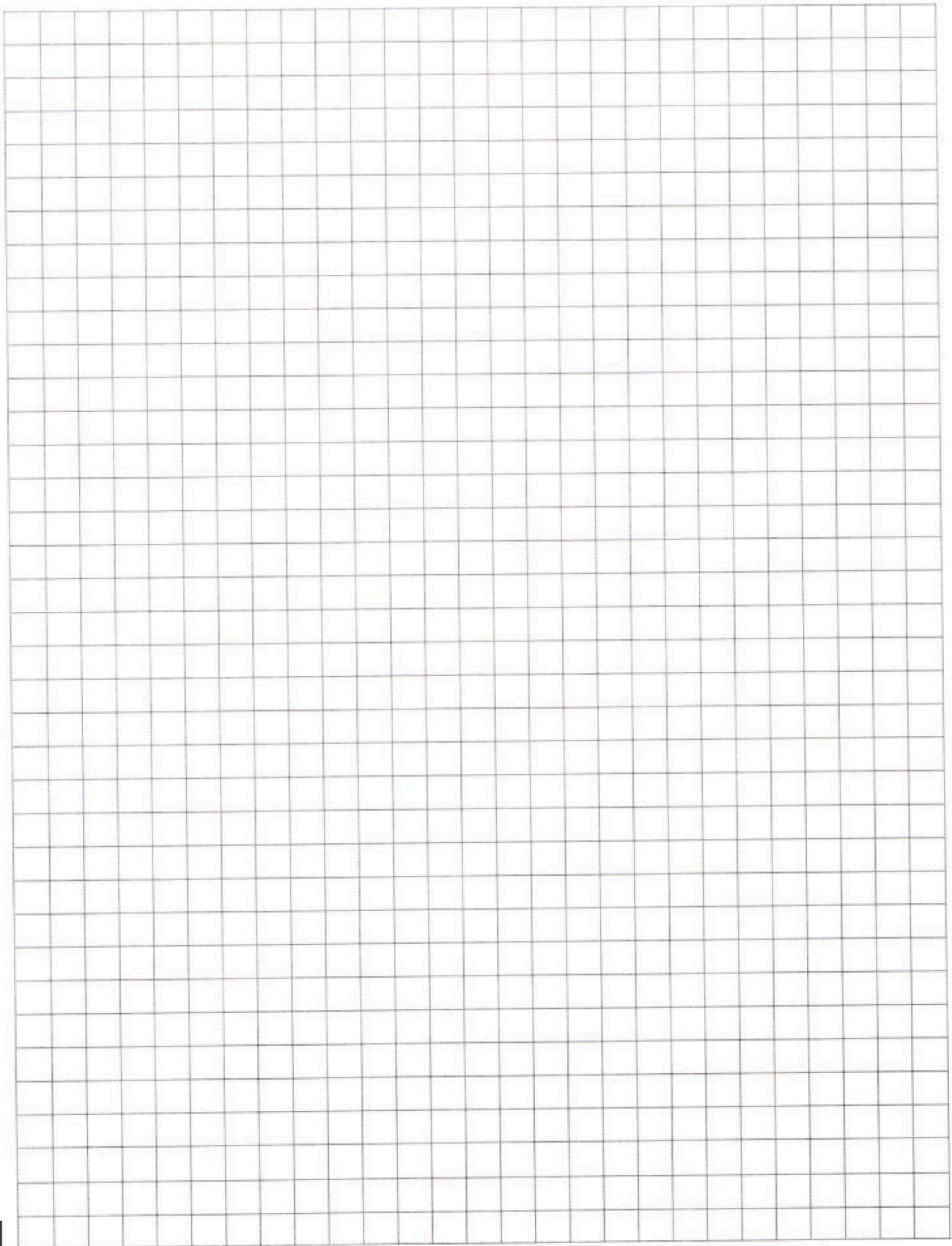


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^2 x - 3\sin^2 x + 6\cos x = p \quad \text{т.к. } \sin \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x + 6\cos^2 x = p + 3 \quad \text{т.к. } \eta = \sin^2 x + \alpha \cos^2 x$$

пусть $k = \cos x \quad k \in [-1; 1]$

и пусть $f(k) = 4k^3 + 3k + 6k^2 = 4\cos^3 x + 3\cos x + 6\cos^2 x = p + 3$

посмотрим на $f'(k) = 12k^2 + 12k + 3 = 12\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

т.к. $D = 36 - 3 \cdot 12 = 0 \quad D = 0 \quad x = k = \frac{-12}{12 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$
корень

Заметим что т.к. $f'(k) \geq 0$ наша функция $f(k)$ на любом

промежутке не убывает. Значит максимум и минимум функции достигается по крайней мере в тех отрезке по краям, а т.к. функция непрерывна то, все они проходят все значения между минимумом и максимумом \Rightarrow при $k \in [-1; 1], f(k) \in [f(-1); f(1)]$

Значит $f(-1) = -1 \cdot 4 + 6 \cdot 1 - 3 = -1; f(1) = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3 = 13$

$p + 3 = f(k) \in [-1; 13], p \in [-4; 10]$ - есть решение

Заметим что т.к. $12\left(k + \frac{1}{2}\right)^2$ - обнуляется только в 1 точке

то $f(k)$ - строго во строго возрастает и принимает любое значение
т.е. Значит у уравнения $f(k) = p$, где $p \in [-4; 10]$ ровно одно решение

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим что $f(k) = 4k^3 + 6k^2 + 3k$

тогда $f(k) = (k + \frac{1}{2})^3 \cdot 4 - \frac{1}{2}$

пусть $f(k) = p+3 \Rightarrow (k + \frac{1}{2})^3 \cdot 4 - \frac{1}{2} = p+3$

$k + \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p+3+\frac{1}{2}}{4}}$

$k \pm \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p+\frac{7}{2}}{4}}$

$k = \sqrt[3]{\frac{p+7}{8}} - \frac{1}{2}$

$\cos x = \sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$

$\sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} - \frac{1}{2} \in [-1; 1]$

$x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right) + 2\pi k \in \mathbb{Z}$

при $p \in [-4; 10]$

290 z - yovce

X =

Ответ: $x = 2\pi k$ при $p \in [-4; 10]$ есть решения

$x = 2\pi k \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right)$

$x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right) + 2\pi k$

Значит

$x = \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right) + 2\pi k$

$x = \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$

$x = 2\pi k - \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AD \cap CE = K$$

✓

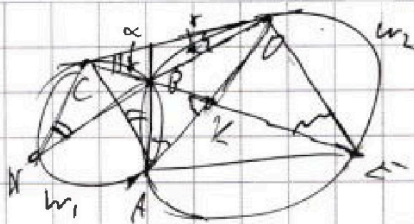


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AD \cap CE = K \quad \angle CB = \alpha$$

$$\frac{EK}{CK} = \frac{20}{3}$$

$$AB \cap CD = M$$

$$CM = MD \text{ т.к. } CM^2 = MD^2 \text{ как стороны}$$

точки уга и ив₂
т.к.

MEAB - равнобедренный
осев уга
и ив₂

2π

$$CB \cdot CE = CD^2 \text{ ст.1}$$

степень точки C отн w₂

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE} \quad \text{значит } \triangle CDB \sim \triangle CDE$$

$$\text{тогда } \frac{DB}{DE} = \sqrt{\frac{CB}{CE}} = \sqrt{\frac{CE}{CE - BE}} = \sqrt{1 - \frac{BE}{CE}}$$

$$KB \cdot KE = KB^2$$

$$\frac{10}{3} = \frac{KB \cdot KE}{KB \cdot CK} = \frac{KB \cdot AK \cdot BK \cdot CO}{KB \cdot KC}$$

$$\text{т.к. } \angle O \text{ кас к } w_2 \quad \angle CDB = \angle BDE$$

угр

$$\frac{DE}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot \frac{BD}{CO}$$

$$\frac{DE}{BCD} = \frac{BD}{CB}$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{CA}{\sin \alpha} = \frac{KE}{\sin \gamma}$$

$$\frac{CA}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \gamma}{AD} = \frac{CA}{AD} = \frac{CM}{MD} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{CD}{DE}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

11-параллельной

по формуле включения и исключений

Трое пустых клеток - a - симметрия отн прямой 11 стороны 200

8 клеток $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ условия} - b \text{ симметрия отн прямой 11 стороны 250} \\ 3 \text{ условия} - c \text{ симметрия отн. центр. угла} \\ \text{наставить в угол} \end{array} \right.$

$f(a), f(b), f(c)$ - кол-во вариантов \forall где выполняется a, b, c соответственно

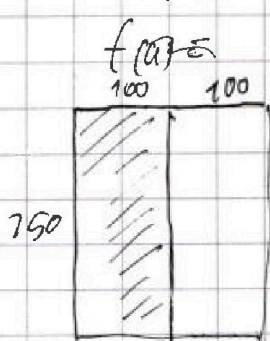
$f(a, b), f(b, c), f(c, a)$ - кол-во вариантов наставить в угол

где выполняется $f(a, b), f(b, c), f(c, a)$ соответственно

$f(a, b, c)$ - всего кол-во вар. наставить в угол где все 3 условия выполняются

тогда с ними будут найти $f(a) + f(b) + f(c) - f(a, b) - f(b, c) - f(c, a) + f(a, b, c)$

по формуле включения и исключений



Заметим что если мы возьмем n крайний прямой прямоугольник 100×250 , вписанное

то любой точке, удовлетворяющей условию $f(a)$ или $f(c)$ находится пара симметричных

ей. тогда a, b это b, c в этой паре 1 клетка

лежит в заштрихованном прямоугольнике и вторая

в другом, при этом пара однозначно задается по 1

клетке в заштрихованном прямоугольнике, тогда

$$f(a) = f(c) = C_{25000}^4$$

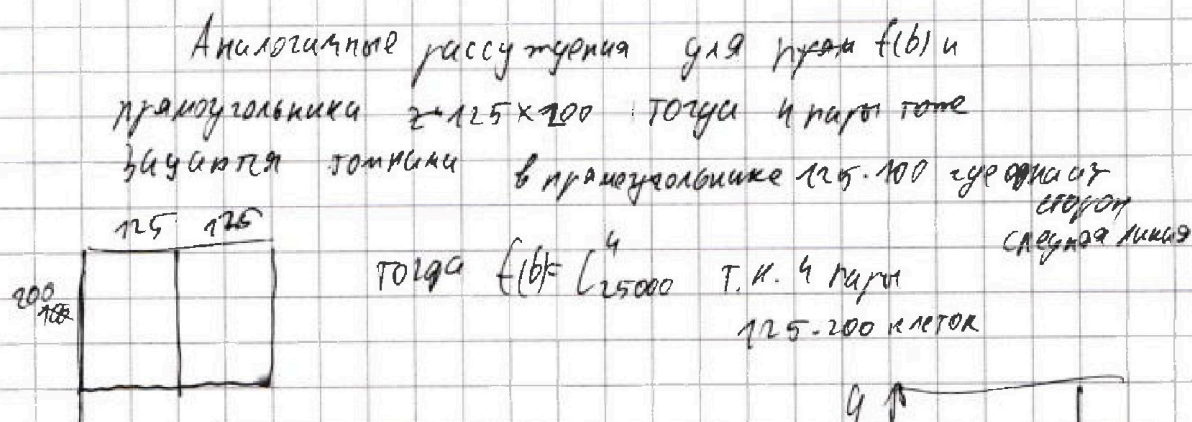
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

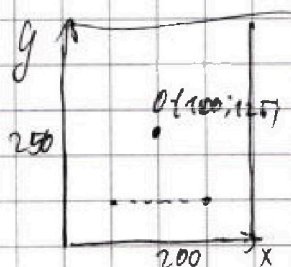
СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



x рассмотрим на $f(ac)$ и $f(bc)$ и $f(b)$

в факте в раскрасе из $f(ac)$



покрываем точку $A(x, y)$ то должны быть закраски

и $B(200-x, y)$ как симметричная от $x=100$

и $C(200-x, 250-y)$ как от симметричная от $O(100, 125)$

где O - центр прямоугольника

и $D(x, 250-y)$ как симметричная от C от $x=100$

Значит выполняется и в т.к. площадь

$$f(ac) = f(bc) \Leftrightarrow f(x, y) = f(x, 250-y)$$

отныне для раскрасок $f(bc)$

$A(x, y)$ закраски, $A(x, 250-y)$ закраски как

$B(200-x, 250-y)$ закраски как симметричной

$C(200-x, y)$ закраски как симметричной

D относительно $y=125$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 34

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда выполняется и то из 34 значений (x, y)

значений $x; 25(200-x; y)$

значит а выполняется

$$\text{тогда } f(a, c) = f(a, b, c)$$

Если выполняется $f(a, b)$ то есть значением А (x, y)

то значением В $(200-x; y)$ как симметричный А от

$x=100$, $(200-x; 250-y)$ как симметричный В относительно

$$y=125$$

значит если выполняется а и б, то и с

если б и с, то и а

если а и с, то и б

$$f(a, b) = f(b, c) = f(c, a) = f(a, b, c)$$

значит ответ: $3 \cdot C_{2500}^4 \cdot 2 \cdot f(a, b, c)$

+ $f(a, b, c)$. это заметим много если два значения

А (x, y) , то и значением В $(200-x; y)$, С $(x; 250-y)$, D $(200-x; 250-y)$

Для каждой точки А, В, С, D у нее есть симметричные ей от $x=100, 0$, $x, y=125$

А А (x, y) симметрична В $(200-x; y)$ от $x=100$

С от $y=125$

D от $(0, 0)$.

тогда метки

тогда $f(a, b, c) =$ при заметим что каждая из точек имеет свой метки

$$\text{тогда } f(a, b, c) = C_{12500}^2$$

		100	
125	I	II (100; 125)	3
125	IV	III	



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда ответ: $4 \cdot 3 \cdot C_{2500}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 =$
 $= 3 \cdot \frac{2500!}{4! \cdot 2496!} - 2 \cdot \frac{12500!}{2! \cdot 12498!}$

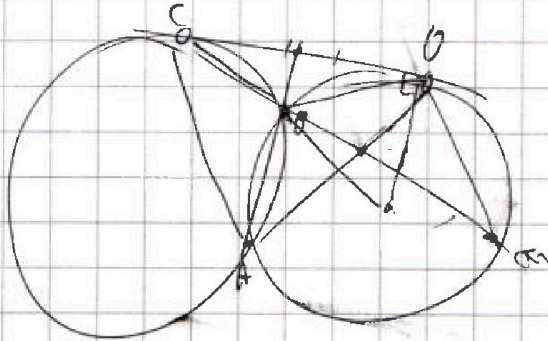


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AD \perp CO$

$$\frac{DE}{CO} = \frac{DB}{BC}$$

$$BC \cdot CE = DC^2$$

$$BC = \frac{DC^2}{EC}$$

$$\textcircled{2} \frac{DB \cdot EC}{DC^2} = \frac{DE}{DC}$$

$$DB \cdot EC = DC^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} (x+3) - (x-2) + 5 &= 2 \end{aligned} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \nmid 3 \\ (a - c)(b - c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

p - простое число
 $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Заметим что если $(a - c)(b - c) = p^2$

то т.к. $a - c$ - целое
 $b - c$ - целое то

$$\begin{cases} (a - c)(b - c) = p^2 \\ a > b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 1; b - c = p^2 \\ a - c = -1; b - c = -p^2 \\ b - c = 1; a - c = p^2 \\ b - c = -p^2; a - c = -1 \\ b - c = a - c = p \\ b - c = a - c = -p \\ b - c = -1; a - c = -p^2 \\ a > b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 - p^2; c = a + 1 \quad \times \\ a - b = p^2 + 1; c = a + 1 \quad \checkmark \\ a - b = p^2 - 1; c = b + 1 \quad \checkmark \\ a - b = p^2 + 1; c = a + 1 \\ a - b = 1 - p^2; c = b + 1 \quad \times \\ a = b; c = a - p \quad \times \\ a = b; c = a + p \quad \times \\ a > b \end{cases}$$

т.к. если $a > b$ то $a \neq b$

и т.к. $1 - p^2 < 0$ т.к. $p > 1 \Rightarrow p^2 > 1 \Rightarrow 1 - p^2 < 0 \Leftrightarrow p^2 - 1 > 0$

$a - b > 0$ если $a > b$ то эти системы равносильны

$$\begin{cases} \begin{cases} a - b = p^2 - 1 \\ c = a + 1 \\ b - c = b + 1 \\ a > c \end{cases} \quad \text{т.к. } b p^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b = p^2 - 1 \\ c = a + 1 \\ c = b + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a - b = p^2 - 1 \\ c = a + 1 \\ c = b - 1 \end{cases} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит где $a+b$ и a, b, c целые

$$\begin{cases} a \neq b \\ a-b \neq 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a+b^2 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b \neq 3 \\ a^2+b^2 = 560 \\ a-b = p^2-1 \\ \begin{cases} c = a+1 \\ c = b-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2-1 \neq 3 \\ a+b^2 = 560 \\ a-b = p^2-1 \\ \begin{cases} c = a+1 \\ c = b-1 \end{cases} \end{cases}$$

Заметим что если $p \neq 3$ то $\begin{cases} p \equiv 1 \pmod{3} \\ p \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \Leftrightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3}$

тогда a по $p^2-1 \neq 3 \pmod{3}$ противоречие значит $p \equiv 3$ тогда $p \neq 3$

тогда $a \equiv 10 \pmod{3}$
 $p^2-1 = 9-1 = 8 \pmod{3}$

$p \equiv \frac{p}{3} \pmod{3}$
 $\frac{p}{3} = 1 \pmod{3}$

$$\begin{cases} a+b^2 = 560 \\ a-b = 8 \\ \begin{cases} c = a+1 \\ c = b-1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

тогда $a = b+8$
 $a = b+8$

$$\begin{array}{r} 560 \\ -8 \\ \hline 552 \\ \times 4 \\ \hline 2208 \end{array}$$

$$\begin{cases} b^2+b+8 = 560 \\ c = a+1 \quad b+9 \\ c = b-1 \end{cases}$$

$$b^2+b+8 = 560 \Rightarrow b^2+b-552$$

$$D = 1 + 552 \cdot 4 = 2209 = 47^2$$

$$\sqrt{D} = 47 \quad b_{1,2} = \frac{-1 \pm 47}{2} = -24, 23$$

т.к. $b \neq$

$$\begin{cases} b = -24 \\ b = 23 \\ \begin{cases} c = b+9 \\ c = b-1 \end{cases} \end{cases}$$

тогда все трики это

$b = -24 \quad c = -15 \quad a = -16$

$b = -24 \quad a = -16 \quad c = -25$

$b = 23 \quad a = 31 \quad c = 22$

$b = 23 \quad a = 31 \quad c = 32$

Дни подходят т.к. переходят равносильно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Ответ~~

I $a = -16$ $b = -24$ $c = -15$

II $a = -16$ $b = 24$ $c = -25$

III $b = 23$ $a = 31$ $c = 22$

IV $b = 23$ $a = 31$ $c = 32$

Заметим что $a > b$

$$a - b = 8 \cdot 3$$

$$(a - c)(a - b) = -1$$

$$(a - c)(b - c) = -1 \cdot -9 = 3^2 \cdot 1 \text{ I и III}$$

$$(a - c)(b - c) = 1 \cdot 4 = 3^2 \cdot 1 \text{ II и IV}$$

и $a + b^2 = 560$ Значит все 4 варианта
показаны

Ответ: $a = -16$ $b = -24$ $c = -15$

$a = -16$ $b = 24$ $c = -25$

$a = 31$ $b = 23$ $c = 22$

$a = 31$ $b = 23$ $c = 32$



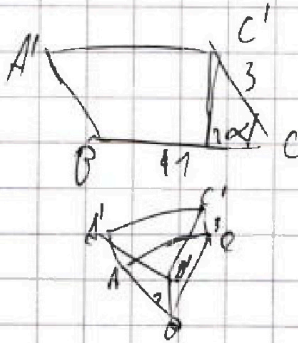
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Поэтому } S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta C'AC} = 4$$

$$\angle B'PC = 90^\circ = \angle C'CB$$

$$BB' = CC' = \frac{3}{1} = 3$$

$$4 = S_{\Delta C'AC} = BC \cdot \sin \alpha \cdot CC' = 1 \cdot \sin \alpha \cdot 3$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14-

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 6 \cos^2 x = p + 3$$

-1; 1

$$4 \cos^3 x + 36 \cos^2 x + 3 \cos x - (p+3) = 0$$



$$\begin{aligned} \cos x = 1 & \quad p \leq 10 & \quad \frac{2500}{4} \\ 13 - p - 3 = 0 & & \quad \frac{2996}{4} \\ -1 & \quad 6 - 7 = -1 & \quad p \geq -4 \end{aligned}$$

$$4p^3 + 6p^2$$

$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x - (p+3) = 0$$

$$x \in [1, 1]$$

0

$$f(x) = 4x^2 + 12x + 3$$

1/8 + 6

$$\frac{D}{4} = 36 - 36 = 0$$

$$x_1 = \frac{-12}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

$$4 + 3 - 6 \cos^2 x$$

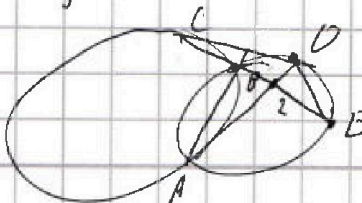
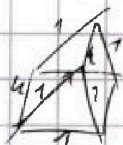
$$f(k) = 4k^3 + 3k + 6k^2 = (p+3)$$

$$\cos x = 1$$

$$\frac{-1}{2} \quad \Bigg/ \quad k + \frac{1}{2} = L$$

9 + 8

$$4k^3 + 3k + 6k^2 = \left(\frac{k+\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{12}{3} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right)^3 = 4k^3$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

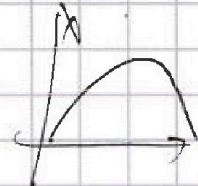
$$\cos 3x + 3 \cos 2x + \cos x = p$$

$$DB \cdot DN = CD^2$$

$$3 \cos^3 x - 4 \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + \cos x = p$$

$\frac{DE}{DB \cdot DN} = x+3$

$$3(\cos^3 x + 3 \cos^2 x - \cos^2 x - \cos x) = p$$



$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$\cos 3x = 3 \cos^3 x - 4 \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

~~-1~~

$$\cos \frac{3\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \pi = 3 \cos^3 \frac{\pi}{3}$$

$$-1 = 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 36 \\ \hline 68 \\ 4 \\ \hline 72 \\ 28 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$36 + 4 \cdot 2^4$$

$$D = 4$$

$$D = 4 \cdot \sqrt{17}$$

$$SD = \sqrt{7} \cdot 2$$

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + \cos x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 2 \cos x + 6 \cos^2 x = p + 3 \quad u = b + 1 p$$

$$\cos x = k$$

$$4k^3 - 2k + 6k^2 = p + 3$$

$$k(4k^2 + 6k - 2) = p + 3$$

$$x_{1,2} = -6 \pm$$

$z = 2$

$2x^3 - 5x^2 + 29x - 29 = 0$