



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



- [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
- [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
- [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
- [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
- [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
- [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11

Для выпуклого n -угольника сумма углов равна $180^\circ \cdot (n-2)$;

Углы многоугольника составляют арифметическую прогрессию. a_n — n член арифметической прогрессии, d — разность арифметической прогрессии; a_1 — первый член арифметической прогрессии.

$$a_1 = 143^\circ; \quad d = 2^\circ; \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$180^\circ (n-2) = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{n \cdot (2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$$180(n-2) = \frac{n \cdot (2 \cdot 143^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ)}{2} = n \cdot (143^\circ + n - 1) = n \cdot (142 + n)$$

$$180n - 360 = 142n + n^2; \quad n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$D = 38^2 - 4 \cdot 360 = 4 \cdot 19^2 - 4 \cdot 360 = 4 \cdot (19^2 - 360) =$$

$$= 4$$

$$n = \frac{38 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{38 \pm 2}{2} = 19 \pm 1 = \{18; 20\}$$

Наибольшее возможное n — 20.

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$x \ln 2^4 + y \ln 2^3 + z \ln(2^3 \cdot 3) = \ln(2 \cdot 3)$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 2 + \ln 3; (4x + 3y + 3z) \ln 2 - \ln 2 = (1 - z) \ln 3$$

т.к. $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 3z = 1 \\ 1 - z = 0 \end{cases}, \text{ иначе } (4x + 3y + 3z) \ln 2 - \ln 2 \neq (1 - z) \ln 3$$

из $1 - z = 0$ следует, что $z = 1$.

Тогда $4x + 3y + 3 = 1; 4x + 3y = -2; x = \frac{-2 - 3y}{4}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 1 = \frac{(2 + 3y)^2}{16} + y^2 + 1 \rightarrow \text{минимально.}$$

$$f(y) = \frac{(2 + 3y)^2}{16} + y^2 + 1; f(y) - \text{минимум} \Rightarrow f'(y) = 0$$

$$f'(y) = \frac{2 \cdot (2 + 3y) \cdot 3}{16} + 2y = \frac{12 + 18y + 32y}{16} = 0;$$

$$12 + 50y = 0; y = -\frac{12}{50} = -0,24$$

Тогда $\frac{(2 + 3y)^2}{16} + y^2 + 1 = \frac{(2 - 3 \cdot 0,24)^2}{16} + (0,24)^2 + 1 =$

$$= 0,1024 + 0,0576 + 1 = 1,16 - \text{минимальное значение } (x^2 + y^2 + z^2)$$

Ответ: 1,16



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_7\} = \{a_1, a_1+1, a_1+2, \dots, a_1+6\}; a_1 \in \mathbb{N}$$

p, q - простые; $p = a_1 + a_2 + \dots + a_7 - a_p$, где $a_p \in \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$

Тогда $a_p = a_1 + k_p$, где $k_p \in \mathbb{Z}$ и $k_p \in [0; 6]$.

$$p = a_1 + a_1 + 1 + \dots + a_1 + 6 - a_1 - k_p = 6 \cdot a_1 + 21 - k_p > 20$$

т.к. p - простое, $6 \cdot a_1 + 21 - k_p \not\equiv 3 \Rightarrow k_p \not\equiv 3$ и

$$6 \cdot a_1 + 21 - k_p \not\equiv 2 \Rightarrow 6 \cdot a_1 + 21 - k_p \equiv 1 \pmod{2};$$

$$k_p \equiv 0 \pmod{2}; k_p = \{2; 4\}.$$

Аналогично для q :

$$q = a_1 + a_2 + \dots + a_7 - a_q; a_q \in \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$$

$$a_q = a_1 + k_q; k_q \in \mathbb{Z} \text{ и } k_q \in [0; 6]$$

т.к. q - простое и $q > 20$:

$$q = 6a_1 + 21 - k_q; k_q = \{2; 4\}$$

$$p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) = 792 \quad \cancel{(6a_1 + 21 - k_p - 6a_1 + 21 + k_q) \cdot (6a_1 + 21 - k_p + 6a_1 + 21 + k_q)}$$

$$792 = (p - q)(p + q) = (6a_1 + 21 - k_p - 6a_1 + 21 + k_q)(6a_1 + 21 - k_p + 6a_1 + 21 + k_q) = (k_q - k_p)(12a_1 + 42 - k_p - k_q)$$

1) При $k_q = k_p$: $k_q - k_p = 0$, $(k_q - k_p)(12a_1 + 42 - k_p - k_q) = 0 \neq 792$
(противоречие)

2) $k_q = 2$; $k_p = 4$: $\begin{cases} (k_q - k_p) \cdot (12a_1 + 42 - k_p - k_q) < 0 \\ (k_q - k_p) \cdot (12a_1 + 42 - k_p - k_q) = 792 > 0 \end{cases}$
(Противоречие)

3) $k_q = 4$; $k_p = 2$: $\begin{cases} (k_q - k_p) \cdot (12a_1 + 42 - k_p - k_q) = 792 \\ (4 - 2) \cdot (12a_1 + 42 - 4 - 2) = 792 \\ (12a_1 + 42 - 6) = 396 \\ 2a_1 + 6 = 66 \\ a_1 + 3 = 33; a_1 = 30 \end{cases}$

Тогда $a_2 = 31$; $a_3 = 32$; $a_4 = 33$; $a_5 = 34$; $a_6 = 35$; $a_7 = 36$

$$M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$$

Ответ: $\{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14

Дано:

ABCD - трапеция;

$BD \cap AC = M$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

ω_1 - окр. впис. в $\triangle BMC$;

ω_2 - окр. впис. в $\triangle AMD$

~~l~~ l - прямая

$M \in l$;

$l \cap \omega_1 = X, Y$

$l \cap \omega_2 = Z, W$

I_1 - центр ω_1

I_2 - центр ω_2

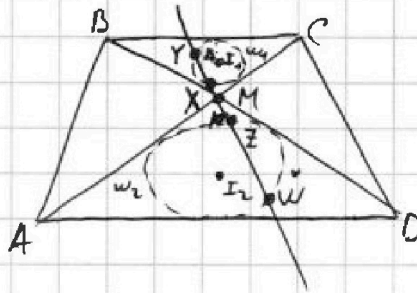
$$I_1 I_2 = \frac{13}{2}$$

$$MZ \cdot MY = 5$$

$r_1 = ?$

Решение:

r_1 - радиус окр. ω_1 ; r_2 - радиус ω_2



1) $I_1 \in$ биссектрисе $\angle BMC$

$I_2 \in$ биссектрисе $\angle AMD$

$\angle CMI_1 = \frac{1}{2} \angle CMB = \frac{1}{2} \angle AMD = \angle AMI_2$, тогда I_1, M, I_2 лежат на одной прямой.

$$I_1 I_2 = I_1 M + M I_2 ;$$

2) $\triangle BCM \sim \triangle AMD$ ($\angle BCA = \angle CAD$, накрест. лем.; $\angle CBD = \angle BDA$, накрест. лем.; $\angle BMC = \angle AMD$, верт.) по 3 углам; k - коэффициент подобия

$$k = \frac{BC}{AD} = 2 ; \text{ в подобных треугольниках}$$

$$k = \frac{r_1}{r_2} ; r_2 = \frac{r_1}{k} ;$$

3) $\triangle AMD$ ~~подобен~~ подобен $\triangle BMC$ отнес. к M с коэф. $-k$; ~~AMD~~ тогда $MX = k MZ$;

$$MY = k MW ;$$

$$MZ \cdot MY = k \cdot MX \cdot MY ; \text{ отрезок } I_1 I_2 \cap \omega_1 = T_1 ;$$

$$\text{отрезок } I_1 I_2 \cap \omega_2 = T_2 ; MT_1 = k MT_2 ;$$

$$MX \cdot MY = MT_1 \cdot (MT_1 + 2r_1)$$

$$4) I_1 I_2 = MT_1 + r_1 + MT_2 + r_2 = MT_1 + r_1 + \frac{MT_1 + r_1}{k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right) (MT_1 + r_1)$$

$$MT_1 = \frac{I_1 I_2}{1 + \frac{1}{k}} - r_1 ;$$

$$5) MX \cdot MY = \left(\frac{I_1 I_2}{1 + \frac{1}{k}} - r_1\right) \cdot \left(\frac{I_1 I_2}{1 + \frac{1}{k}} + r_1\right) = \frac{(I_1 I_2)^2}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2} - r_1^2 ;$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{(I_1 I_2)^2}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2} - MX \cdot MY} = \sqrt{\frac{13^2}{4 \cdot \frac{9}{4}} - 5} = \sqrt{\frac{169 - 45}{9}} = \frac{12}{3}$$

Ответ: $\frac{12}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{2}}{14} = 5 \quad \text{Обозначим } \frac{\sqrt{2}}{14} \text{ за } d, \text{ тогда } \sin \frac{3\sqrt{2}}{14} = \sin 3d,$$

$$\cos \frac{\sqrt{2}}{7} = \cos 2d$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{2}}{14} = 5 - 4 \sin(3d)$$

$$\sin 3d = \sin(d+2d) = \sin d \cos 2d + \sin 2d \cos d = \sin d \cos^2 d - \sin^3 d + 2 \sin d \cos^2 d$$

$$5 - 4 \sin(3d) = 5 - 4(3 \sin d \cos^2 d - \sin^3 d) = 5 - 4(3 \sin d - 4 \sin^3 d) =$$

$$= 5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d$$

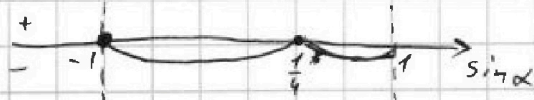
$$4 \cos \frac{\sqrt{2}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{2}}{14} = 4 \cos 2d - 5 \sin d = 4 - 5 \sin d - 8 \sin^2 d$$

Сравнивание $5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{2}}{14}$ и $4 \cos \frac{\sqrt{2}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{2}}{14}$ аналогично
сравниванию $5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d$ и $4 - 5 \sin d - 8 \sin^2 d$, аналогично
сравниванию 0 и $(4 - 5 \sin d - 8 \sin^2 d) - (5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d)$

$$4 - 5 \sin d - 8 \sin^2 d - (5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d) = -16 \sin^3 d - 8 \sin^2 d + 7 \sin d - 1$$

$$= -(\sin d - \frac{1}{4})(\sin d - \frac{1}{4})(\sin d + 1) \cdot 4^2$$

Воспользуемся методом интервалов для определения знака:



$$\text{При } \sin d \in (-1; \frac{1}{4}) \quad -4 + 7 \sin d - 8 \sin^2 d - 16 \sin^3 d < 0$$

$$\text{При } \sin d \in (\frac{1}{4}; 1) \quad -1 + 7 \sin d - 8 \sin^2 d - 16 \sin^3 d = 0$$

Проведем обратную замену:

$$\sin d = \sin \frac{\sqrt{2}}{14} \neq \frac{1}{4}; \quad \sin \frac{\sqrt{2}}{14} < \sin \frac{\pi}{6} < \frac{1}{4}.$$

$$\sin \frac{\sqrt{2}}{14} \neq -1$$

$$\sin \frac{\sqrt{2}}{14} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} < \frac{1}{4}, \text{ т.к. } \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) < 1, \text{ т.к. } 2(4-2\sqrt{3}) < 1, \text{ т.к. } 4\sqrt{3} >$$

$$\text{Тогда } 5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{2}}{14} > 4 \cos \frac{\sqrt{2}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{2}}{14}$$

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{2}}{14} > 4 \cos \frac{\sqrt{2}}{7} - 5 \sin \frac{\sqrt{2}}{14}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Все основания пирамид, у которых ≥ 4 угла лежат в плоскости d . Тогда кол-во пирамид с основаниями $s \geq 4$ углами = $C_7^4 \cdot 5 + C_7^5 \cdot 5 + C_7^6 \cdot 5 + C_7^7 \cdot 5 = 5 \cdot (C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7)$

кол-во способов выбрать 4 точки в d кол-во точек вне d

Любые 4 точки не в 1 плоскости образуют треугольную пирамиду. Тогда всего треугольных пирамид = кол-во способов выбрать 4 точки - кол-во способов выбрать 4 точки (все в d) = $C_{12}^4 - C_7^4$

Тогда всего выпуклых пирамид:

$$C_{12}^4 - C_7^4 + 5 \cdot (C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7) = \frac{12!}{4! \cdot 8!} - \frac{7!}{4! \cdot 3!} + 5 \cdot \left(\frac{7!}{4! \cdot 3!} + \frac{7!}{5! \cdot 2!} + \frac{7!}{6! \cdot 1!} \right)$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4! \cdot 8!} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} + 5 \cdot \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} + \frac{7 \cdot 6}{2} + 7 + 1 \right) = \frac{12!}{4! \cdot 8!} - 35 + 5 \cdot (35 + 21 + 7 + 1)$$

$$= \frac{12!}{4! \cdot 8!} + 5 \cdot (35 + 21 + 1) = \frac{12!}{4! \cdot 8!} + 5 \cdot 57 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!} + 5 \cdot 57 =$$

$$= 99 \cdot 5 + 5 \cdot 57 = 5 \cdot 156 = 780$$

Ответ: 780 выпуклых пирамид.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

Дано:

$SABCFE$ (5-вершинка),

$ABCDEF$ - прав. шестиугольник

$AB = 2$

$AS = BS = CS = DS = ES = FS = 4$

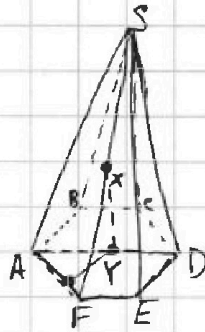
$X \in SF$

$Y \in AD$

$XY \parallel (SAB)$

$\min XY = ?$

Решение:



1) Рассмотрим плоскость, проходящую через XY , ~~параллельную~~ параллельную (SAB)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \text{ min } - ?$$

2
1
8
3
16
5

$f(x,y,z) = 0$
 $f'(x,y,z) = 0$
 $f''(x,y,z) < 0$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + z \ln 8 + z \ln 3 = \ln 2 + \ln 3$$

$$(4x + 3y + 3z) \ln 2 + z \ln 3 = \ln 2 + \ln 3$$

$$z = 1$$

$$4x + 3y + 3 = 1$$

$$4x + 3y = -2$$

$$x = -2 - 3y$$

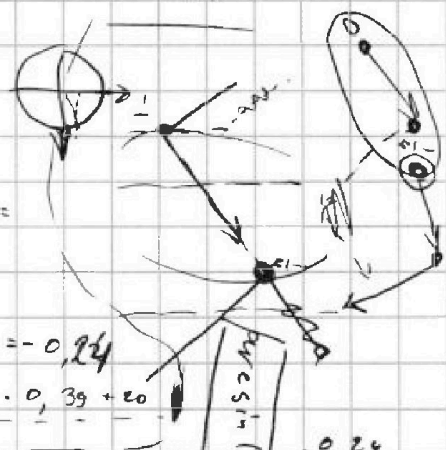
$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 1 = (-2 - 3y)^2 + y^2 + 1 =$$

$$= \frac{4 + 9y^2 + 12y + 16y^2 + 16y^2 + 16y + 16}{16} = \frac{25y^2 + 12y + 20}{16}$$

$$25y^2 + 12y + 20$$

$$D = 4^2 - 9 = 16 - 9 = 7 < 0 \quad y_{\text{верш}} = -\frac{12}{2 \cdot 25} = -\frac{6}{25} = -0,24$$

$$\frac{25}{100} \cdot 12^2 - \frac{12^2}{100} + 20 = 12^2 (0,4 - 0,01) + 20 = 144 \cdot 0,39 + 20$$



$$a_0 = 143$$

$$n \cdot \frac{(143 + 143 + (n-1) \cdot 2)}{2}$$

$$180 \cdot (n-2) - \text{сумма} = 180 \cdot (n-2)$$

$$n \cdot (284 + 2n) = 360n - 720$$

$$284n + 2n^2 = 360n - 720$$

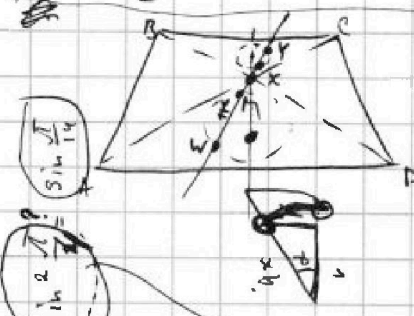
$$n^2 + 142n = 180n - 360$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$n = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 - 4 \cdot 360}}{2} = \frac{38 \pm \sqrt{19^2 - 360}}{2} = 4$$

$$n = \frac{38 \pm 4}{2} = 19 \pm 1 = \{20; 18\}$$

Handwritten calculations for the arithmetic series problem, including the formula for the sum of an arithmetic progression and the quadratic equation solution.



$$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$V_{M1} = ?$$

$$MZ \cdot MY = 5$$

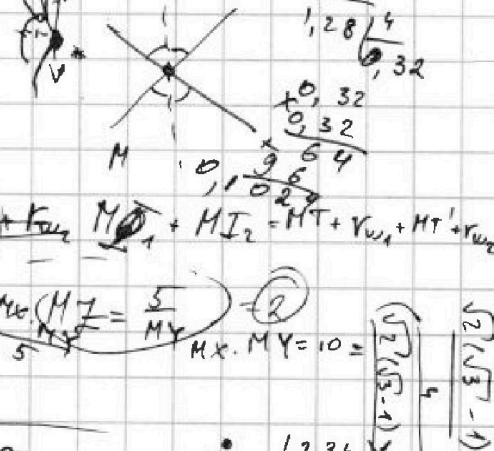
$$I_1 I_2 = \frac{13}{2} = \frac{V_{M1} + V_{M2}}{M I_2} + M I_2 = M I_1 + M I_2 + V_{M1} + M I_2$$

$$\frac{V_{M1}}{V_{M2}} = \frac{BC}{AD} = \frac{MX}{MZ} = \frac{MX}{MZ} = \frac{MX}{MZ} = \frac{5}{MX} \cdot M I_2 = \frac{5}{MY}$$

$$MX \cdot MY = 10$$

Handwritten notes and small diagrams related to the geometry problem, including a small circle and some trigonometric symbols.

$$\frac{C_7^3 \cdot 9}{\text{кол-во повторов}} + (C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7) \cdot 5 = C_4^3 \cdot 4$$



$$\sqrt{13} - 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{2}}{14} > 4 \cos \frac{\sqrt{2}}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$1 - \sin d (16 \sin^2 d + 8 \sin d + 7)$$

(-1/4) - вершина

$$= -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} (2 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) - 7) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \cdot (12 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) - 7) = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \cdot (5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1))$$

$$= -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} - (\sqrt{3}-1)^2 = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) - 4(\sqrt{3}-1)^2}{4}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot (2\sqrt{6} - \sqrt{2} - 4)}{4} < 1$$

$$(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{6} - \sqrt{2} - 4) < 4$$

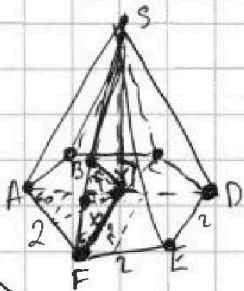
$$8\sqrt{2} - \sqrt{6} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + \sqrt{2} < 0$$

$$7\sqrt{2} - 3\sqrt{6} - 4\sqrt{3} < 0$$

$$7\sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot (3\sqrt{2} + 4) < 0 \quad (\text{гал}) \Rightarrow \text{пр. уменьшен - win}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 156 \\ \times 5 \\ \hline 780 \end{array}$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\sqrt{2}}{14} > 4 \cos \frac{\sqrt{2}}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

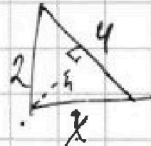


$$(ABS) \parallel (FYS) \Rightarrow FY \parallel AB \Rightarrow Y = FC \cap AD$$

$$FY = \frac{1}{2} FC$$

$$\frac{180 \cdot 4}{6} = 120$$

$$XY = AS = 4$$



$$x^2 = 16 - 4 = 12;$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

$$4h = 2x; h = \frac{x}{2} = \sqrt{3}$$



$$S = \frac{13}{2}$$

$$h = 5$$

$$k = 2$$

$$r_{w1} + MT + k(r_{w1} + MT) = S$$

$$MZ \cdot MY = \frac{1}{k} \cdot \frac{MX \cdot MY}{k} = \frac{1}{k^2} \cdot MT \cdot r_{w1} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{h}{k} = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{h}{k} = \frac{1}{k^4} \cdot h$$

$$r_{w1} + \frac{h}{2kr_{w1}} + kr_{w1} + \frac{h}{r_{w1}} = S$$

$$(k+1)r_{w1} + \frac{h}{r_{w1}} + k r_{w1} + \frac{h}{r_{w1}} = 0$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot h^2 \cdot \frac{(k+1)^2}{k} = \frac{169}{4} - 4 \cdot 100 \cdot \frac{9}{2} =$$

$$= 6 + \frac{5}{6} + 2 + \frac{1}{2} = 9, \dots$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \frac{\pi}{14} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}$$

$$\frac{\pi}{12} \quad \frac{\pi}{15}$$

$$\frac{180}{12} \quad \frac{180}{15}$$

$$\frac{15}{60} \quad \frac{12}{60}$$

$$x \rightarrow 2x$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} < \frac{1}{4}$$

$$2(4-2\sqrt{3}) \stackrel{?}{<} 1$$

$$4-2\sqrt{3} < \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{3} > 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}; \quad \sqrt{3} > \frac{7}{4}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{49}{16} \text{ нет}$$

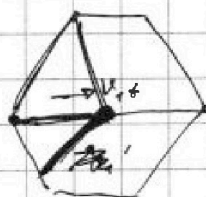
$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} < \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) < 1$$

$$2 \cdot (3+1-2\sqrt{3}) < 1$$

$$8-4\sqrt{3} < 1$$

$$4\sqrt{3} > 7; \quad \sqrt{3} > \frac{7}{4}; \quad \frac{3}{4} > \frac{49}{16} \text{ (нет)}$$

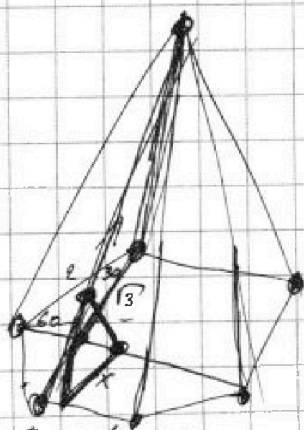
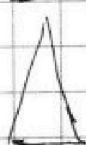
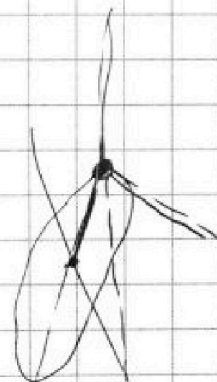
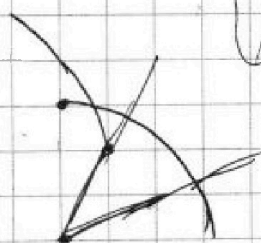
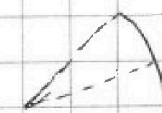
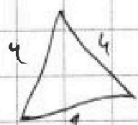
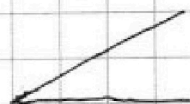


$$16x^2 = x^2 + 1;$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{4};$$

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$



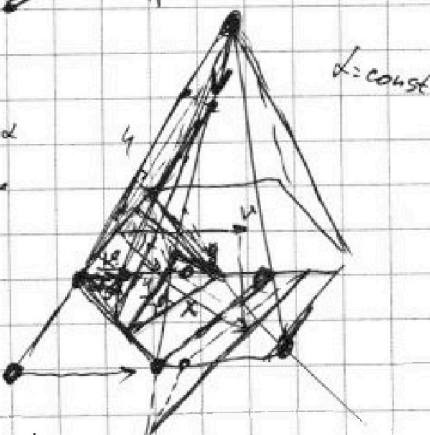
$$L = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$$

$$L=0 = 2x+2y+2xy \sin \alpha$$



$$x \in (0, \sqrt{3})$$

$$x \in (0, 2)$$



$$L = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$$

$$L=0 = 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$-1 = -2 \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 60^\circ$$

$$\cos \alpha = +\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

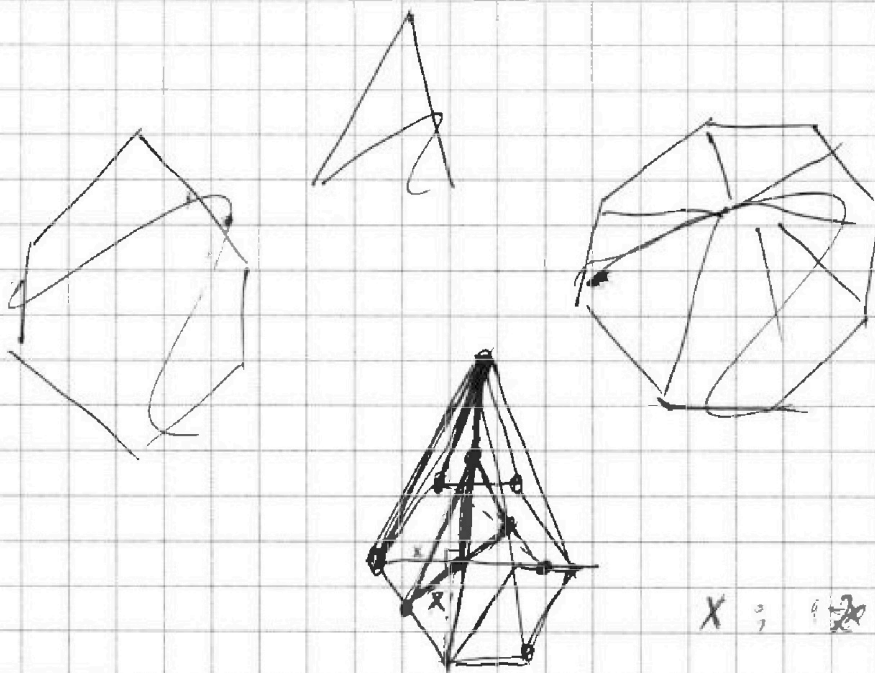
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \quad ? \quad 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$\frac{\pi}{14} = \frac{90}{7} = 12.8 \dots$$

$$\cos 2d = \cos^2 d - \sin^2 d = 1 - 2 \sin^2 d$$

$$5 - 4 \sin 3d \quad \text{и} \quad 4 \cos 2d - 5 \sin d = 4 - 5 \sin d - 8 \sin^2 d$$

$$\begin{aligned} \sin(d+2d) &= \sin 2d \cos d + \sin d \cos 2d = \cos^2 d (2 \sin d + \sin d) \\ &= 2 \sin d \cos^2 d + \sin d \cos^2 d - \sin^3 d = \sin d \cdot (3 \cos^2 d - \sin^2 d) \\ &= \sin d (3 - 4 \sin^2 d) \end{aligned}$$

$$5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d \quad ? \quad 4 - 5 \sin d - 8 \sin^2 d$$

$$1 \quad 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} > \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$? \quad 12 \sin d - 5 \sin d - 8 \sin^2 d - 16 \sin^3 d$$

$$? \quad 7 \sin d - 8 \sin^2 d - 16 \sin^3 d = -\sin d (8 \sin^2 d + 8 \sin d - 7)$$

$$16 \sin^2 d + 8 \sin d - 7$$

$$D = 4^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 4^2 \cdot 7 = 4^3 \cdot (8) = 4^4 \cdot 2$$

$$\sin d = \frac{8 \pm 16\sqrt{2}}{32} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{8} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{8}}; \quad \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4}}{4 \sin^2 \frac{\pi}{8}} = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{8}$$

$$\sin d < \frac{1}{2}$$

$$\sin d \cdot (16 \sin^2 d + 8 \sin d - 7) < \frac{1}{2} \cdot (4 + 4 - 7) = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin d < \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$\frac{(\sqrt{2}(\sqrt{3}-1))^2}{4} + \frac{(\sqrt{2}(\sqrt{3}-1))^3}{4} = \frac{3+1+2\sqrt{3}}{8} + \frac{3+1+2\sqrt{3}}{8} = 1$$

$$\sin d (16 \sin^2 d + 8 \sin d - 7) < \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$p^2 - q^2 = 792 \quad p, q - \text{reciprocal}$$

$$(p-q)(p+q) = 792 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$a_1; a_1+1; a_1+2; \dots; a_1+6$$

$$S_6 = \frac{7 \cdot (a_1 + a_1 + 6)}{2} = 7a_1 + 21$$

$$S_6 = 6a_1 + 21 - k; \quad k \in [0; 67]; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-p \Rightarrow k \in \{3; 5; 6\}$$

$$(6a_1 + 21 - k_1 + 6a_1 + 21 - k_2)(6a_1 + 21 - k_1 - 6a_1 - 21 + k_2) = (12a_1 + 42 - k_1 - k_2) \cdot (k_2 - k_1)$$

$$\cdot (k_2 - k_1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$$

$$k_2 - k_1 = \{6; 9; 2; 4\}$$

$$1) k_2 - k_1 = 6; \quad k_2 = 6; \quad k_1 = 0$$

$$(12a_1 + 42 - 6) \cdot 6 = 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11; \quad 12a_1(2a_1 + 6) = 22; \quad a_1 + 3 = 11; \quad a_1 = 8$$

$$p = 6 \cdot 8 + 21 - 6 = 3$$

$$2) k_2 - k_1 = 3; \quad k_2 = 5; \quad k_1 = 2$$

$$k_2 - k_1 = 2; \quad k_2 = 4; \quad k_1 = 2$$

$$(12a_1 + 42 - 6) \cdot 3 = 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11; \quad 2a_1 + 6 = 66; \quad a_1 + 3 = 33; \quad a_1 = 30$$

$$p = 6 \cdot 30 + 21 - 2/4 = 201 - 2/4 = [199; 197] \text{ га}$$

Handwritten notes on the right side of the page, including a vertical list of numbers and some small diagrams.

