



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $132^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
3. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 1080$ .
4. [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 8$ , а  $MZ \cdot MY = 9$ .
5. [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$  или  $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$ ?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 4 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром  $\sqrt{2}$ . Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Сумма углов  $n$ -угольника:  $S = 180(n-2)$

$$d_1 = 132, d_2 = 134, \dots, d_n = 132 + 2(n-1)$$

$$S = \frac{132 + 132 + 2(n-1)}{2} \cdot n = (132 + (n-1)) \cdot n = n^2 + 131n$$

$$180n - 360 = n^2 + 131n$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = 961 = 31^2$$

$$n_1 = \frac{49 + 31}{2} = 40, \quad n_2 = \frac{49 - 31}{2} = 9$$

Если прогрессия убывающая, то

$$S = (132 - (n-1)) \cdot n = 133n - n^2$$

$$180n - 360 = 133n - n^2$$

$$n^2 + 47n - 360 = 0$$

$$D = 47^2 + 4 \cdot 360 \text{ — не четное, извлекается корень}$$

Ответ: 9





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У3

$a, a+1, a+2, \dots, a+6$

$$S_{\max} = \frac{a+1+a+6}{2} \cdot 6 = (2a+7) \cdot 3 = 6a+21$$

$$S_{\min} = \frac{a+a+5}{2} \cdot 6 = (2a+5) \cdot 3 = 6a+15$$

$p$  и  $q$  могут отличаться не более, чем на 6.  
Пусть  $p - q = n$

$$(q+n)^2 - q^2 = 1080$$

$$q^2 + 2qn + n^2 - q^2 = 1080$$

$$2qn + n^2 = 1080$$

П.к.  $q$  - целое, то  $n$  - чет

$$n=2: 4q+4=1080 \Rightarrow q=269, p=271$$

$$n=4: 8q+16=1080 \Rightarrow q=133; 7 \rightarrow \text{не простое}$$

$$n=6: 12q+36=1080 \Rightarrow q=87, p=93; 87; 3 \rightarrow \text{не простое}$$

$$q=269, p=271$$

То число, которое не входит в  $p$  и число, которое не входит в  $q$ , отличаются на 2

~~$p = 7a+21$~~   ~~$ka = 271$~~ ,  ~~$2q$~~  Пусть в  $p$  не входит число  $a+k$ :  $7a+21 - a - k = 271$

$$6a = 250+k \Rightarrow a = \frac{250+k}{6}, k=0, 1, 2, 3, 4$$

П.к.  $a$  - целое, то  $k=2 \Rightarrow a=42$

Ответ: 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48



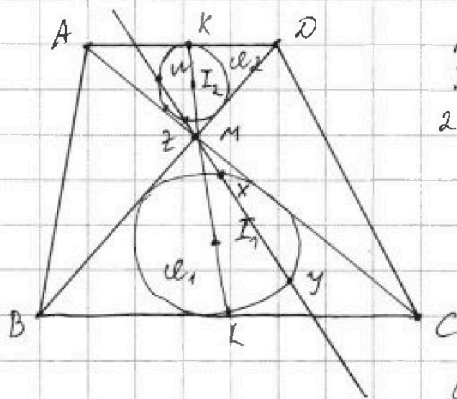
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4



$\triangle ADM \sim \triangle CBM$ ,  $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$   
радиусы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  относятся 2:1.  
Пусть  $2r$  радиус  $\omega_2$ , тогда  $\omega_1$   
 $2r$ .

$$I_1 I_2 = 8 = r + 2r \Rightarrow r = \frac{8}{3}$$

Точки  $I_2, M, I_1 \in$  одной  
прямой, т.к.  $MI_2$  и  $MI_1$   
биссектрисы вертикальных  
углов. Пусть  $I_2 I_1$  пересекает

$AD$  в т.  $K$ ,  $BC$  в т.  $L$ .

$$\frac{KM}{LM} = \frac{1}{2} = \frac{I_2 M + r}{I_1 M + 2r} \Rightarrow 2I_2 M + 2r = I_1 M + 2r$$

$$\left. \begin{array}{l} 2I_2 M = I_1 M \\ I_1 M + I_2 M = I_1 I_2 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_2 M + 2I_2 M = 8 \Rightarrow I_2 M = \frac{8}{3} \\ I_1 M = \frac{16}{3} \end{array}$$

$$\begin{cases} MZ \cdot MW = (MI_2 - r)(MI_2 + r) & \text{- степеня т. М отн. } \omega_2 \\ MX \cdot MY = (MI_1 - 2r)(MI_1 + 2r) & \text{- степеня т. М отн. } \omega_1 \end{cases}$$

$$MZ \cdot MW = \frac{64}{9} - r^2 \quad / \cdot 4$$

$$MX \cdot MY = \frac{256}{9} - 4r^2$$

$$4MZ \cdot MW = MX \cdot MY \quad \text{т.к. } \triangle ADM \sim \triangle CBM$$

$$2MZ \cdot MW - 4MZ \cdot MW = \frac{256}{9} =$$

$$\text{Из } \triangle ADM \sim \triangle CBM \Rightarrow \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} \Rightarrow MW \cdot MX = MY \cdot MZ = 9$$

$$\begin{cases} 4MZ \cdot MW = \frac{256}{9} - 4r^2 \\ MX \cdot MY = \frac{256}{9} - 4r^2 \end{cases} \quad (*)$$

$$4 \cdot MZ \cdot MY \cdot MW \cdot MX = \left( \frac{256}{9} - 4r^2 \right)^2$$

$$4 \cdot 81 = \left( \frac{256}{9} - 4r^2 \right)^2 \Rightarrow \frac{256}{9} - 4r^2 = 2 \cdot 9$$

$$4r^2 = \frac{256}{9} - 18 = \frac{94}{9} \Rightarrow r^2 = \frac{94}{9 \cdot 4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{94}}{6}$$

$$\text{Ответ: } 2r = \frac{\sqrt{94}}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Д5

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}$$

Пусть  $\alpha = \frac{3\pi}{14}$

$$5 - 4 \sin 3\alpha > 3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha$$

$$5 - 4(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) > 3 \sin \alpha - 4(1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$5 - 12 \sin \alpha + 16 \sin^3 \alpha > 3 \sin \alpha - 4 + 8 \sin^2 \alpha$$

$$16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 15 \sin \alpha + 9 > 0$$

Пусть  $x = \sin \alpha$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 > 0$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 = 0$$

$$16x(x^2 - 1) + x + 8(1 - x^2) + 1 = 0$$

$$x^2 \cdot 16x(x+1)(x-1) - 8(x+1)(x-1) + (x+1) = 0$$

$$(x+1)(16x(x-1) - 8(x-1) + 1) = 0$$

$$(x+1)(16x^2 - 24x + 9) = 0$$

$$(x+1)(4x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x = \frac{3}{4}$$



4. При  $x > -1$  левая часть больше

$$\sin \alpha > -1$$

$$\sin \frac{3\pi}{14} > -1 \text{ - верно}$$

Ответ:  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

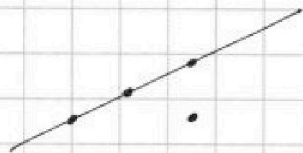
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

1) Предположим, что среди точек, расположенных вне плоскости  $\alpha$ , есть 3 точки, лежащие на одной прямой. Тогда



Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой проходит плоскость. Тогда  $\exists$  плоскость, проходящая

Тогда, если 4-ая точка вне плоскости  $\alpha$  не лежит на этой прямой, то через

эти 4 точки проходит плоскость  $\Rightarrow$  против-сл.

А если 4-ая точка лежит на этой прямой, то все точки тоже лежат в одной плоскости, этой прямой.

Получается  $\forall$  3 точки образуют  $\Delta$ .

2) найдем кол-во треугольных пирамид. Если все вершины основания пирамиды  $\in \alpha$ , то  $\exists C_8^3$  способов выбрать основание пирамиды, ~~если~~ и 4 способа выбрать ей вершину. Если только 2 вершины из  $\alpha$  попадают в пирамиду, то возможных оснований  $C_8^2 \cdot C_4^2$ . Если одна вершина из  $\alpha$ , то пирамид  $C_8^1 \cdot C_4^3$

$$C_8^3 \cdot 4 + C_8^2 \cdot C_4^2 + C_8^1 \cdot C_4^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 4 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 8 \cdot 4 =$$

$$= 32 \cdot 4 + 24 \cdot 7 + 32 = 32 \cdot 8 + 24 \cdot 7 = 256 + 168 = 424$$

3) найдем кол-во ~~базис~~ пирамид, у которых более 3 вершин в основании. Из плоскости  $\alpha$  выберем 4 вершины  $C_8^4$ , оставшиеся вершины можно либо выбрать, либо не выбрать в основании  $2^4$ . А вершиной можно сделать  $\forall$  из точек  $\notin \alpha$ , т.е. 4 способами

$$C_8^4 \cdot 4 \cdot 2^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 4 \cdot 2^4 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2^4 = 128 \cdot 35 = 4480$$

4) Всего пирамид  $424 + 4480 = 4904$

Ответ: 4904.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

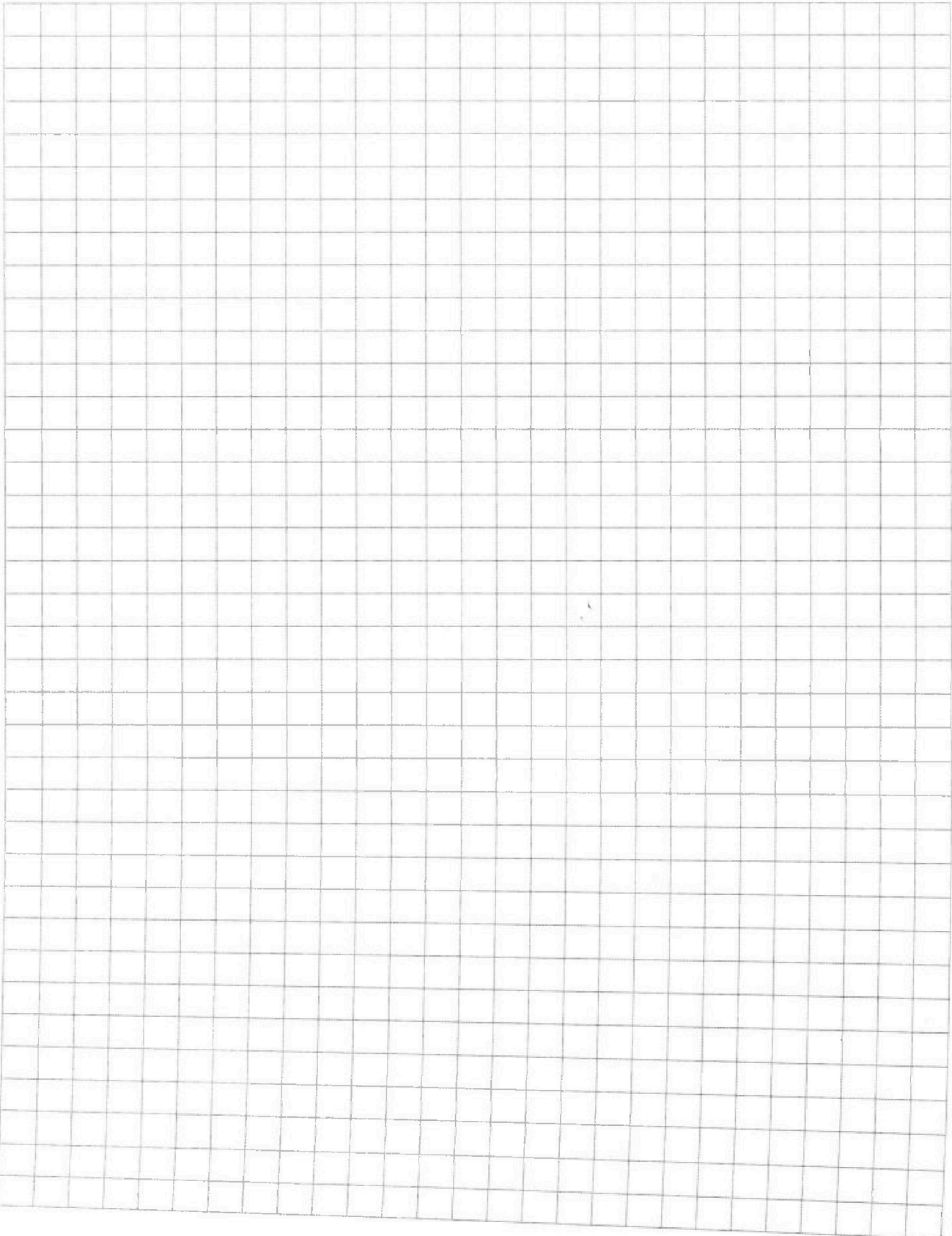
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

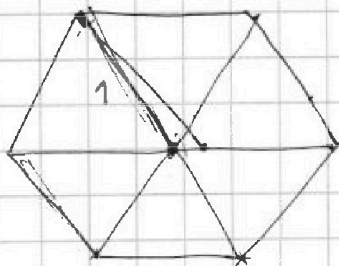
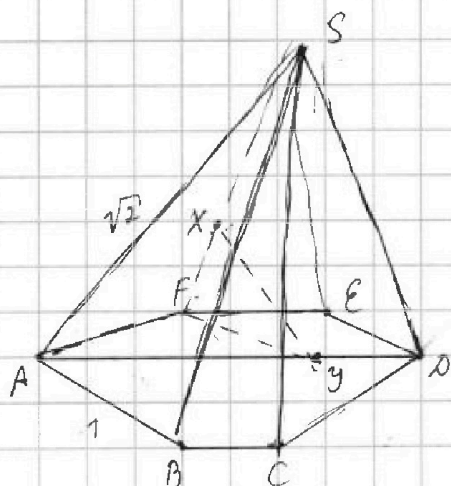
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 9 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 162 \\ \hline 94 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 7 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 20 \\ \hline 420 \\ + 256 \\ \hline 676 \end{array}$$





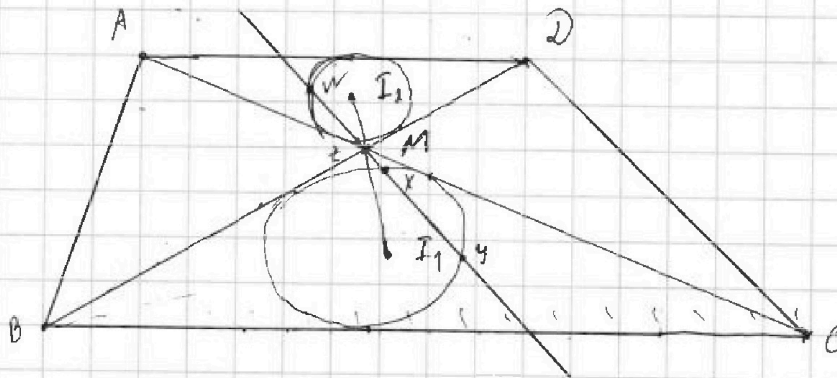
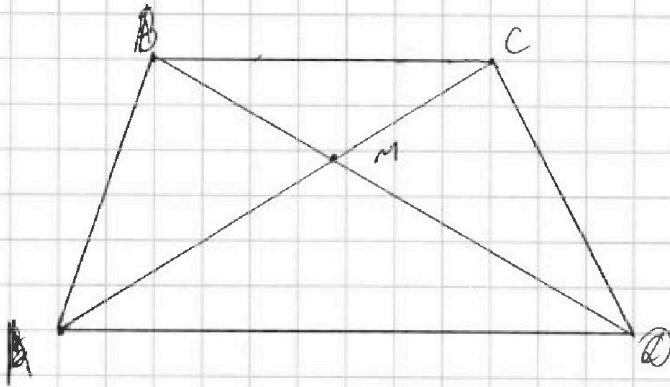


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



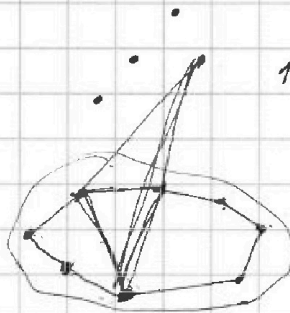
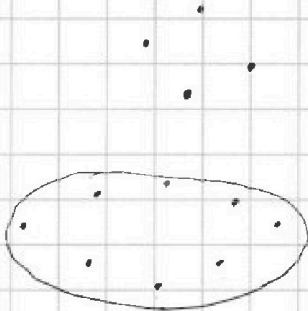


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

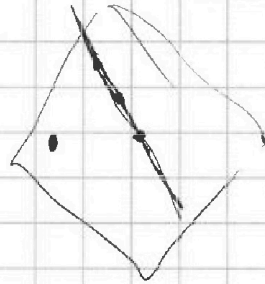
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



12



$$\frac{C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8}{C_8^3 \cdot 2^5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{8} \cdot 2^5 = 56 \cdot 2^5 = 56 \cdot 32$$

$$C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 990$$

более, чем треугольные

$$4 \cdot C_8^4 \cdot 2^4 = 4 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 2^4 = 35 \cdot 2^5 \cdot 2^2 = 35 \cdot 2^7$$

$$C_8^3 \cdot 4 + C_8^2 \cdot C_4^2 + C_8^1 \cdot C_4^3 =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{8} \cdot 4 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 8 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} =$$

$$= 32 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 32 = 32 \cdot 8 + 24 \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} +24 \\ \times 7 \\ \hline 168 \\ +256 \\ \hline 424 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 128 \\ \hline 35 \\ \hline +640 \\ 384 \\ \hline +4480 \\ 424 \\ \hline 4904 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n=6 \quad p=93 \quad q=87 \quad p=6a+21=93$$

$$6a=72 \Rightarrow a=12$$

$$\frac{93}{21} = \frac{3}{1}$$

12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

$$\frac{87}{27} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{93}{87} = \frac{3}{1}$$

$$5 - 4\sin \frac{9\pi}{14}$$

$$3\sin \frac{3\pi}{14} - 4\cos \frac{3\pi}{14}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{14}$$

$$5 - 4\sin 3\alpha \quad \vee \quad 3\sin \alpha - 4\cos 2\alpha$$

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha =$$

$$= \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\cos^2 \alpha \sin \alpha = \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) =$$

$$= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$5 - 4(3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha) \quad \vee \quad 3\sin \alpha - 4(1 - 2\sin^2 \alpha)$$

$$5 - 12\sin \alpha + 16\sin^3 \alpha \quad \vee \quad 3\sin \alpha - 4 + 8\sin^2 \alpha$$

$$16\sin^3 \alpha - 8\sin^2 \alpha - 15\sin \alpha + 9 \quad \neq 0$$

$$1: \quad 16 - 8 - 15 + 9 = 1 + 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2^3 \\ 3 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$-1 \quad -16 - 8 + 15 + 9 = -1 + 1 = 0$$

$$\sin \alpha = x$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 = 0$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 =$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 \quad | \quad x+1$$

$$= 16x(x^2 - 1) + x + 8(1 - x^2) + 1 =$$

$$= 16x(x+1)(x-1) + 8(x+1)(x-1) + x+1 =$$

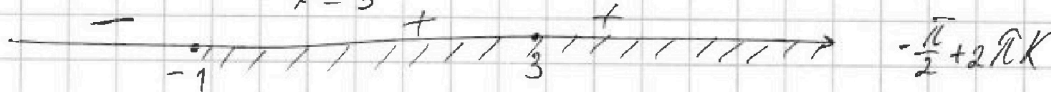
$$= (x+1)(16x(x-1) - 8(x-1) + 1) = (x+1)(16x^2 - 24x + 9)$$

$$16x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 9$$

$$(x-3)^2 = 16x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3x + 9$$

$$x = 3$$



$$\sin x = 1$$

$$x \geq -1$$

$$4x - 3 = 0$$

$$\sin \alpha \geq -1$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{14}$$

$$\frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{14}$$

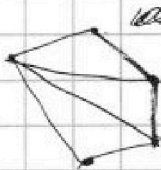


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$n$ -угольник

$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

$$132 + 134 + 136 + \dots +$$

$$n \quad d=2$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 132 + 2(n-1)$$

$$(n-2) \cdot 180 = 132n + 2n(n-1)$$

$$180n - 360 = 132n + 2n^2 - 2n$$

$$178n = 130 + 360$$

$$178n = 490$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{132 + 132 + 2(n-1)}{2} \cdot n = (132 + (n-1))n$$

$$(n-2) \cdot 180 = (132 + (n-1))n$$

$$180n - 360 = 132n + n^2 - n$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = 561$$

$$29(20 \cdot 1)^2 = 900 - 2 \cdot 30 + 1 =$$

$$(n-2) \cdot 180 = 132 + 132 + (132 - (n-1))n$$

$$180n - 360 = 132n - n^2 + n$$

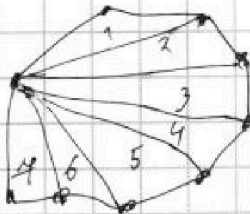
$$n^2 + 47n - 360 = 0$$

$$a_1 = 132 \quad a_n = 132 - 2(n-1)$$

$$S = \frac{132 + 132 - 2(n-1)}{2} \cdot n = 132n - n + 1 = 133n - n$$

$$180n - 360 = 133n - n^2$$

$$n^2 - 47n - 360 = 0$$



$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ + 31 \\ \hline 93 \\ \hline 961 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ + 329 \\ \hline 188 \\ \hline 2209 \\ + 1440 \\ \hline 3649 \end{array}$$

$$3 \cdot 3 = 9$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ - 71 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 360 \\ + 130 \\ \hline 490 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 34 \\ - 180 \\ \hline 134 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 49 \\ + 441 \\ \hline 2401 \\ - 1440 \\ \hline 961 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 60 \\ 60 \\ \hline 1440 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 29 \\ \hline 180 \\ - 133 \\ \hline 47 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ + 329 \\ \hline 188 \\ \hline 2209 \\ + 1440 \\ \hline 3649 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 63 \\ 63 \\ + 189 \\ \hline 378 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 57 \\ 57 \\ + 399 \\ \hline 285 \\ \hline 3249 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x \ln 25 + y \ln 45 + z \ln 125 &= \ln 45 \\ x \ln 25 + y \ln 25 \cdot 3 + z \ln 25 \cdot 5 &= \ln 45 \\ \ln 25 + \ln 3 &= \ln 25 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 108 \cancel{4} \\ 8 \cancel{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} x \ln 25 + y \ln 25 + y \ln 3 + z \ln 25 + z \ln 5 &= \ln 45 \\ \ln 25 \ln 25 (x + y + z) &= \ln 45 - 2 \ln 5 - y \ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 108 \cancel{2} \\ 10 \cancel{5} \\ 8 \cancel{4} \\ \hline \end{array}$$

~~a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>~~ a<sub>1</sub> a

$$a \quad a+1 \quad a+2 \quad a+3 \quad \dots \quad a+6$$

$$\begin{array}{r} 139 \cancel{7} \\ 9 \cancel{1} \\ \hline 633 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1076 \cancel{4} \\ 8 \cancel{2} \\ \hline 27 \\ 24 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$p^2 - q^2 = 1080$$

$$S_{\max} = \frac{a+a+6}{2} \cdot 4 = (a+3) \cdot 4 = 4a+12$$

$$S_{\max} = \frac{a+1+a+6}{2} \cdot 6 = (2a+7) \cdot 3 = 6a+21$$

$$S_{\min} = \frac{a+a+5}{2} \cdot 6 = (2a+5) \cdot 3 = 6a+15$$

$$\begin{array}{r} 1080 \\ 16 \\ \hline 1064 \cancel{18} \\ 8 \cancel{1} \\ \hline 26 \\ 24 \\ \hline 24 \\ 24 \end{array}$$

a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6

$$S_{\max} = \frac{a+a+5}{2} \quad S_{\max} = \frac{a+1+a+6}{2} \cdot 6 = (2a+7) \cdot 3 = 6a+21$$

$$S_{\min} = \frac{a+a+5}{2} \cdot 6 = (2a+5) \cdot 3 = 6a+15$$

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 &= (p-q)(q+p) = 1080 = 108 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 54 \cdot 2 \cdot 5 = \\ &= 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \end{aligned}$$

$$p = q + 1$$

$$(q+n)^2 - q^2 = q^2 + 2nq + n^2 - q^2 = 2nq + n^2$$

$$2nq + n^2 \quad n = 1, 2, \dots, 6$$

$$n=1: \quad 2q+1=1080$$

$$n=2: \quad 4q+4=1080 \Rightarrow q=269 \quad p=271$$

$$n=3: \quad 6q+9=1080$$

$$n=4: \quad 8q+16=1080 \Rightarrow q=133 \quad p=137$$

$$n=6: \quad 12q+36=1080 \Rightarrow q=87 \quad p=93$$

$$\begin{array}{r} 271 \cancel{11} \\ 14 \cancel{1} \\ \hline 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1080 \\ 36 \\ \hline 1044 \cancel{12} \\ 96 \\ \hline 84 \\ 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 269 \cancel{17} \\ 17 \cancel{1} \\ \hline 99 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 14 \\ 179 \\ 14 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 269 \cancel{17} \\ 21 \cancel{1} \\ \hline 59 \end{array} \quad \begin{array}{r} 269 \cancel{17} \\ 22 \cancel{1} \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 269 \cancel{17} \\ 22 \cancel{1} \\ \hline 49 \end{array} \quad \begin{array}{r} 271 \cancel{7} \\ 21 \cancel{3} \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 12 \\ \hline 60 \\ 12 \\ \hline 72 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$a + a + 1$~~

$$6a + 21 = 269$$

$$\frac{a + a + 6}{2} \cdot 7 = (a + 3) \cdot 7 = 7a + 21$$

$$7a + 21 - 6a = 271$$

$$a(7 - 6) = 250$$

$$a = \frac{250}{7 - 6}$$

$$k = 7, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$7a + 21 - a - k = 271$$

$$6a = 250 + k$$

$$a = \frac{250 + k}{6}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ \times 45 \\ \hline 175 \\ 315 \\ \hline 45 \\ \hline 270 \end{array}$$

~~$\frac{48 + 42}{2} \cdot 7 = 25 \cdot 7 = 175$~~

$$45 \cdot 7$$



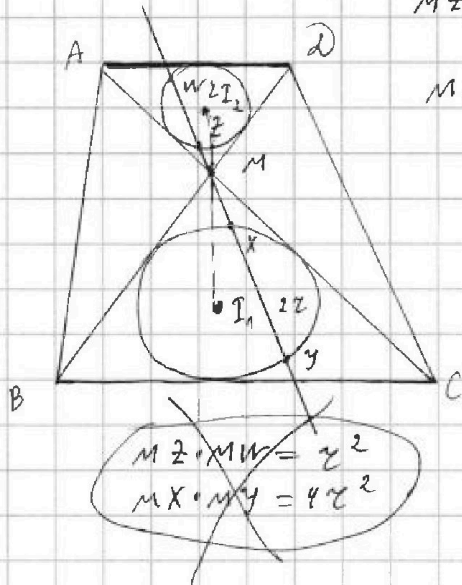


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$MZ \cdot MW = (MI_2 - r)(MI_2 + r)$$

$$MX \cdot MY = (MI_1 - 2r)(MI_1 + 2r)$$

$$I_1 I_2 = I_2 M + MI_1$$

$$\begin{cases} MZ \cdot MW = MI_2^2 - r^2 \\ MX \cdot MY = MI_1^2 - 4r^2 \\ I_1 I_2 = I_2 M + MI_1 \end{cases}$$

~~$$\begin{aligned} MZ \cdot MW &= r^2 \\ MX \cdot MY &= 4r^2 \end{aligned}$$~~

$$\begin{aligned} 2MZ \cdot MW &= MI_2^2 \\ 2MX \cdot MY &= MI_1^2 \end{aligned} \downarrow \ominus$$

$$2(MZ \cdot MW - MX \cdot MY) = 8(I_2 M - I_1 M)$$

$$4 \cdot 9 \cdot MW \cdot MX = MI_1^2 \cdot MI_2^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{16 \cdot 8}{9}$$

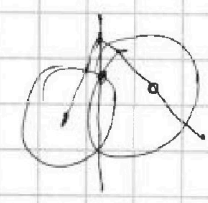
$$\begin{aligned} 2MI_2 + 2r &= MI_1 + 2r \\ MI_1 &= 2MI_2 \end{aligned}$$

$$8 = 2x + x = 3x \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} MZ \cdot MW &= \left(\frac{16}{3}\right)^2 - r^2 \\ MX \cdot MY &= \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4r^2 \end{aligned}$$

$$MW \cdot MX = \frac{16 \cdot 8 \cdot 2}{4 \cdot 9^2} = \frac{32}{81}$$

$$\begin{aligned} 4r^4 &= \frac{32}{81} \cdot 9 = \frac{32}{9} \\ r^4 &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$



$$\frac{MZ}{MW} = \frac{MX}{MY}$$

$$2MZ \cdot MW = MX \cdot MY$$

$$\underline{MZ \cdot MY = MX \cdot MW}$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 2 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ + 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 162 \\ \hline 94 \\ \phantom{0} 24 \\ - 8 \\ \hline 14 \end{array}$$