МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x-2|$ и $|x^2+3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x+1|$. Найдите x.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2-y^2+z^2$.

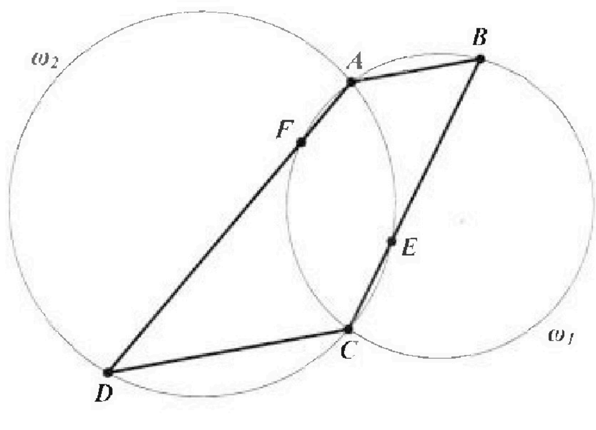
3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a\in\mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81\cdot 10^{2024}$.

4. [5 баллов] Решите неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}.$$

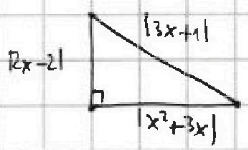
5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1=6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.

6. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases}x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0,\\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0.\end{cases}$$

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB<CD$). Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE, если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1:2$.



По теореме Пифагора:



$$(|2x-2|)^2+(|x^2+3x|)=(|3x+1|)^2$$

$$4x^2-8x+4+x^4+6x^3+9x^2=9x^2+6x+1.$$

$$x^4+6x^3+4x^2-14x+3=0$$

Сумма коэффициентов равна 0, значит $x=1$. Разделим многочлен на $x-1$

$$x^4+6x^3+4x^2-14x+3 \mid x-1$$
$$-\ x^4-x^3 \qquad \mid x^3+7x^2+11x-3$$
$$7x^3+4x^2$$
$$-\ 7x^3-7x^2$$
$$11x^2-14x$$
$$-\ 11x^2-11x$$
$$-3x+3$$
$$-\ -3x+3$$
$$0$$

Получили: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^3+7x^2+11x-3=0. \quad (1) \end{array}\right.$

Рассмотрев (1), ~~что~~ если корень целый, то он ~~[illegible]~~ является делителем числа 3. Методом подбора заметим, что подходит $x=-3$, повторим деление:

$$x^3+7x^2+11x-3 \mid x+3$$
$$-\ x^3+3x^2 \qquad \mid x^2+4x-1$$
$$4x^2+11x$$
$$-\ 4x^2+12x$$
$$-x-3$$
$$-\ -x-3$$
$$0.$$

Получаем: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \\ x^2+4x-1 \quad (2) \end{array}\right.$

Найдем корни (2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2+4x-1=0$

$D=16+4=20$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-4-2\sqrt{5}}{2}=-2-\sqrt{5} \\ x=-2+\sqrt{5} \end{array}\right.$$

~~[illegible]~~. Подставив 4 получившихся ответа в качестве катетов и гипотенуз,

если $x=-3$, то $|x^2+3x|=0$, если $x=1$, то $|2x-2|=0$, значит, эти варианты не подходят.

Ответ: $-2-\sqrt{5}$; $-2+\sqrt{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}=2\sqrt{8}+2\sqrt{29}.$

Заметим, что множитель $\sqrt{18}$ не присутствует нигде, кроме $y\sqrt{18}$. Т.к. переменные целые числа, $y=0$.

Тогда имеем $x\sqrt{8}+z\sqrt{29}=2\sqrt{8}+2\sqrt{29}$. В целых числах уравнение $\sqrt{8}(x-2)+\sqrt{29}(z-2)=0$ имеет

одно решение: $y=2; z=2$. Значит наименьшее $x^2+y^2+z^2=4$.

Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Возьмём разность двух хороших чисел a и b:

$$a(a+1)-b(b+1)=a^2-b^2+a-b=(a-b)(a+b)+a-b=(a-b)(a+b+1)=N=81\cdot 10^{2024}$$

Заметим, что независимо от чётности a и b один из множителей N ($a-b$ или $a+b+1$) всегда чётный, другой – нечётный. $81\cdot 10^{2024}=3^4\cdot 5^{2024}\cdot 2^{2024}$. Если одна из скобок всегда нечётная, значит, все 2024 двойки находятся либо в $(a-b)$, либо в $(a+b+1)$. Значит, если ~~одно~~ один из множителей принимает вид $2^{2024}\cdot 3^n\cdot 5^m$, $n, m\in\mathbb{Z}$; $0\le n\le 4$; $0\le m\le 2024$. Второй равен $\dfrac{N}{2^{2024}\cdot 3^n\cdot 5^m}$. Отметим, что больший множитель всегда равен $a+b+1$, т.к. при $a\in\mathbb{N}$ и $b\in\mathbb{N}$ $a-b<a+b+1$. Перебирая n и m, получим $5\cdot 2025=10125$ вариантов.

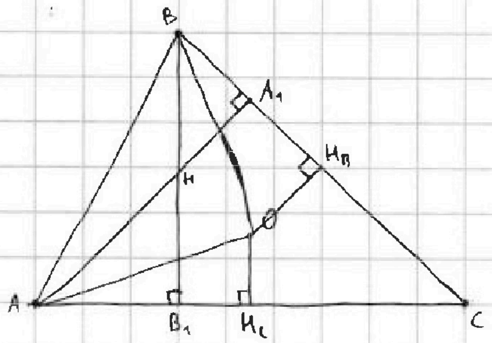
Ответ: 10125.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$ - остроугольный, AA_1, BB_1 - высоты

O - центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

$OH_c \perp AC$; $H_c \in AC$

$OH_B \perp BC$; $H_B \in BC$.

$AA_1 \cap BB_1 = H$.

$AB_1 = 6$; $S_{OBA_1} = 6$.

Найти: OH_c.

Решение.

1) $\angle ABB_1 = \angle CBO$; $\angle CAO = \angle BAA_1$, т.к. основание высот из вершины треугольника изогонально центру описанной окружности.

2) Из п.1: $\triangle AA_1B \sim \triangle AH_cO$; $\triangle BB_1A \sim \triangle BH_BO$ по двум углам, значит

$\frac{AB_1}{OH_B} = \frac{AB}{OB}$; $\frac{A_1B}{OH_c} = \frac{AB}{OA}$. $OA = OB = R_{\triangle ABC}$, значит, ~~подставив равенства, получим~~ $\frac{AB_1}{OH_B} = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{OA} = \frac{A_1B}{OH_c}$, отсюда $OH_c = \frac{A_1B \cdot OH_B}{AB_1} =$

$= \frac{S_{OBA_1}}{AB_1} = 1$.

Ответ: 1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$+\begin{cases} x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0 \quad (1) \\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0 \quad (2) \end{cases}$$

$x^2+x(2-3y)+\cancel{}2y^2-3y+1=0$

Решим относительно $\underline{x}$.

$D=(3y-2)^2-4(2y^2-3y+1)=9y^2-12y+4-8y^2+12y-4=y^2$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{3y-2+y}{2} \\ x=\frac{3y-2-y}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2y-1 \\ x=y-1 \end{array}\right.$$

Подставим $x=y-1$ в (1)

$y^2-2y+1-2y^2+2y+y^3-3y^2-1=y^3-4y^2=0.$

получаем $\{y=0;\ x=-1\}$ и $\{y=4;\ x=3\}$.

Подставим ~~у~~ $x=2y-1$ в (1).

$4y^2-4y+1-4y^2+2y+y^3-3y^2-1=y^3-3y^2-2y=0.$

откуда $y=0$ или $y^2-3y-2=0$.

$D=9+8=17$

$y=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

получаем $\{x=-1;\ y=0\}$, $\{y=\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ x=2+\sqrt{17}\}$ и $\{y=\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ x=2-\sqrt{17}\}$.

Ответ: $(-1;0)$; $(3;4)$; $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};2+\sqrt{17}\right)$; $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};2-\sqrt{17}\right)$.

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \le \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} 4x-x^2-3 \ge 0 & x\in[1;3],\ \text{т.к. } 4x-x^2-3=-(x-1)(x-3) \\ 2x-x^2\ge 0 & x\in[1;2],\ \text{т.к. } -x^2+2x=-x(x-2) \\ x^2+x-2\ge 0 & x\in(-\infty;-2]\cup(1;+\infty)\ \text{т.к. } x^2+x-2=(x-1)(x+2) \\ \sqrt{4x-x^2-3}-3\ne 0 & \\ \sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}\ne 0 \ (1) & \end{cases}$$

$\sqrt{4x-x^2-3}-3\ne 0$ – недостижимо, т.к. максимум $-x^2+4x-3$ достигается в вершине при $x_в=2; y_в=1$. значит $\sqrt{4x-x^2-3}-3\le -2<0$

рассмотрим (1): $2x-x^2 \ne x^2+x-2$

$2x^2-x-2\ne 0$

$D=17$

$x\ne \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

Получаем ОДЗ: $\begin{cases} x\in[1;2] \\ x\ne \frac{1+\sqrt{17}}{4}\end{cases}$

Т.к. $\sqrt{4x-x^2-3}-3<0$, левая часть неравенства всегда меньше нуля, ~~а~~ а именно, меньше или равна -2.

На промежутке $[1;2]$ $2x-x^2$ убывает, а x^2+x-2 возрастает, значит максимум выражения $\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}$ достигается при $x=1$, минимум – при $x=2$. Максимум: $\sqrt{2-1}-\sqrt{1+1-2}=1$.

Минимум: $\sqrt{4-4}-\sqrt{4+2-2}=-2$. Значит $-2\le \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}\le 0$ при $x\ne\frac{1+\sqrt{17}}{4}$, но если $\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}-3}\le -2$, то данное нам неравенство выполняется при любом x на промежутке $[1;2]$, где $x\ne \frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

Ответ: $\left[1;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};2\right]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}$

$\sqrt{8}(x-2)+\sqrt{29}(z-2)=-y\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{29}$

$\to 18y^2$

$8(x-2)^2+29(z-2)^2+\sqrt{29\cdot 8}(x-2)(z-2)$

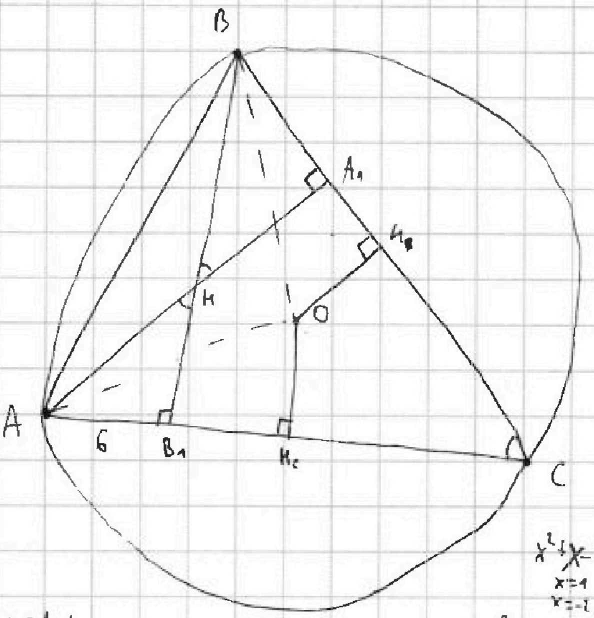
$8x^2-32x+32+29z^2$

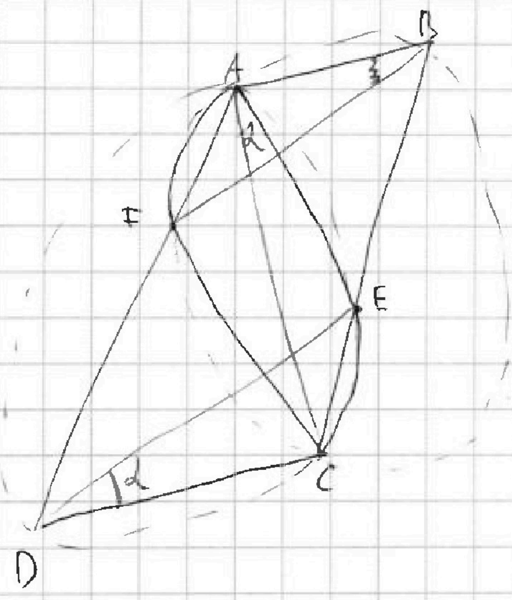
$(a-b)(a+b+1)=81\cdot 5^{2024}\cdot 2^{2024}$

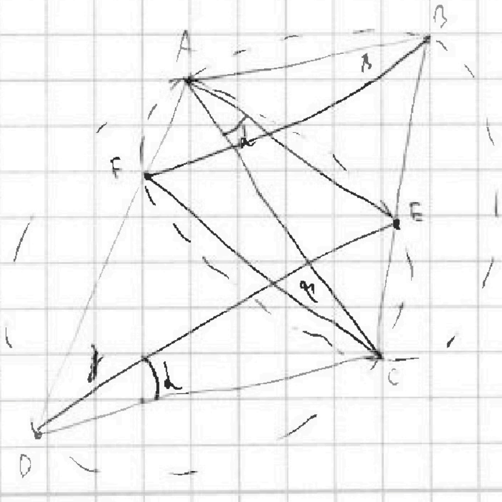
$a-b=1$

$a+b+1=2^{2024}\cdot 5^{2024}\cdot 81$

$2a=$







$\triangle CA_1A$

$\triangle CB_1B$

$\triangle HA_1B$

$\triangle HB_1A$

$\triangle AOH_c$

$\triangle AOH_B$

$\triangle AOH_c$

$\triangle ABA_1$

$\triangle AOH_BB$

$\triangle AB_1B$

$\triangle OH_cA$

$\triangle OA_1A$

$OH_B\cdot A_1B=6$

$AB_1=6$

$\frac{AB_1}{A_1B}=\frac{6}{A_1B}=$

$OH_c\cdot AH_c$

$\frac{AO}{AB}=\frac{OH_c}{A_1B}$

$\frac{OB}{AB}=\frac{OH_B}{AB_1}$

$1=\frac{OH_c\cdot AB_1}{A_1B\cdot OH_B}$

$OH_c=\frac{A_1B\cdot OH_B}{AB_1}=1.$

x^2+x-2

$x=1$

$x=-2.$

x^2-4x+3

$x=1$

$x=3$ $[1;2]$

$[0;2]$

$\sqrt{4x-x^2-3}\geq 0$ $[1;3]$

$-x^2+4x-3\neq 9$ всегда <0.

$x^2-4x+12=0$

$D=16-48.$

$\sqrt{2x-x^2}$ $2x-x^2-x$

$-x^2+2x+0$

$-1+2=1$

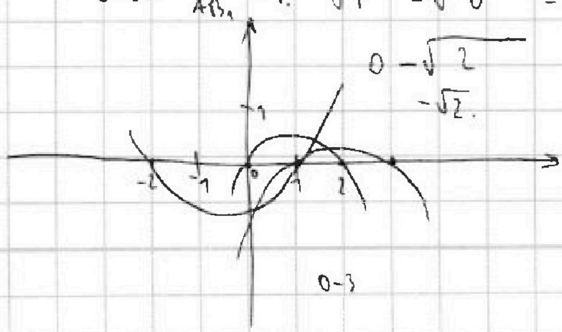
$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1.$

$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}$

$\sqrt{1}-\sqrt{0}=1.$

$0-\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}.$



0-3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$y^3-3y^2+(y-1)^3-2y(y-1)-1=y^3-3y^2+y^3-2y+1-2y^2+2y-1=y^3-4y^2-4y=0$

$y=0$

$y^2-4y-4=0$

$D=16+16=32$

$y=2-2\sqrt{2}$

$x=1-2\sqrt{2}$

$4y-2-2y^2+y-y^3+5y^2-3y+2$

y^2+3y+2

$2(2y-1)-(y-1)y-y^3+5y^2-3y+2=0$

$4y-2-2y^2+y-y^3+5y^2-3y+2=0$

$-y^3+3y^2+2y=0$

y^2-3y-2

$\frac{1}{\sqrt{-(x-1)(x-3)}-3} \le \frac{1}{\sqrt{-x(x-2)}-\sqrt{(x-1)(x+2)}}$

ОДЗ: $x\in[1;3]$

$x\in[0;2]$ $[1;2]$

$x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$

$-(x-1)(x-3)=9$

$x^2-4x+12=0$

$-x(x-2)=(x-1)(x+2)$

$2x^2-x-2=0$

$D=1+16=17$

$x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

$\begin{cases} x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0 \\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0 \end{cases}$

$x^2-3xy+2y^2-3y+1=0$

$D=9y^2-8y^2+12y-4=y^2+12y-4$

$D=(2-3y)^2$

$9y^2-12y+4-8y^2+12y-4=y^2$

$x=\frac{3y-2+y}{2}=2y-1$

$x=\frac{3y-2-y}{2}=y-1$

$a-b=2^{2024}$

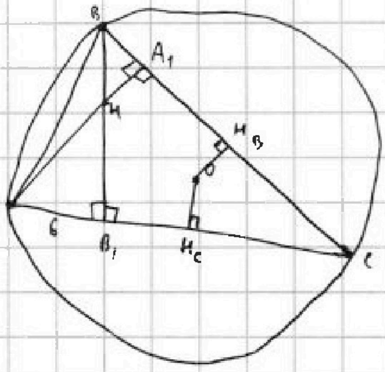
$a=b+2^{2024}$

$a+b+1=2b+2^{2024}+1$

$b=\frac{31\cdot5^{2024}-1-2^{2024}}{2}$

$a+b+1=5$

$2b+1=5$



$HA_1\cdot A_1B=12$, $HA_1=\frac{12}{A_1B}$

$\frac{HA_1}{A_1B}=\frac{HB_1}{6}$

$OH_B\cdot A_1B=6$

$AB_1=6$

$OH_C\cdot AB_1=6\,OH_C$

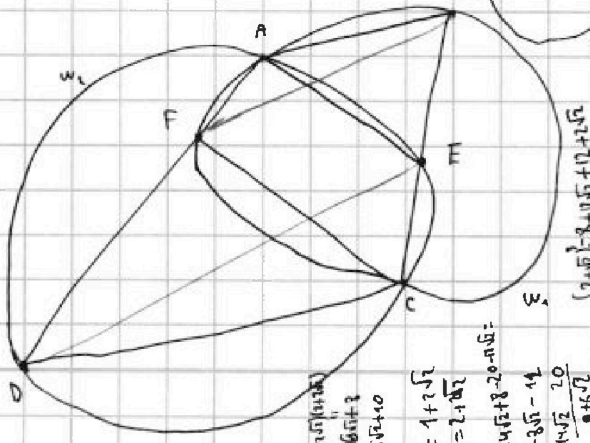
$a=k-b-1$

$a-b=k-2b-1$

$\frac{AC}{\sin B}=2r_1$

$\frac{DE}{\sin B}=4r_1$

$2AC=DE$



$-2y(y-1)=-2y^2+2y$

$2y(2y-1)=4y^2-2y$

$y^2-3y-2=0$

$D=9+8=17$

$x=1+2\sqrt{2}$

$y=2+2\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☒	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Возьмем два хороших числа $a(a+1)$ и $b(b+1)$, где $a>b$. Рассмотрим их разность:

~~$a^2+a-b^2-b = (a-b)(a+b)+a-b = (a-b)(a+b+1)$. Заметим, что независимо от чётности a и b, одна из скобок~~

~~Тогда ... равна ... 2^{2024}, т.к. $81\cdot10^{2024}=81\cdot5^{2024}\cdot2^{2024}$ пусть $2^{2024}=k$~~

~~Если $a-b=k$, то $a+b+1=2b+k+1$. Тогда $k^2+2bk+k=81\cdot10^{2024}$. Отсюда единственное $b=\frac{81\cdot10^{2024}-k^2-k}{2k}$~~

~~Если $a+b+1=k$, то $a-b=k-2b-1$. Тогда $-2bk+k^2-k=81\cdot10^{2024}$. Отсюда $b=\frac{-81\cdot10^{2024}+k^2-k}{2k}$~~

больше или равна 2^{2024}, другая меньше или равна $81\cdot5^{2024}$. ~~Значит, множитель $(a-b)$ может~~

Значит, один из множителей может быть равен 2^{2024}, $2^{2024}\cdot3$, $2^{2024}\cdot9$, $2^{2024}\cdot27$, $2^{2024}\cdot81$, $2^{2024}\cdot81\cdot5$, $2^{2024}\cdot81\cdot5^2$, ..., $2^{2024}\cdot81\cdot5^{2024}$. Но $a-b<a+b+1$. Учитывая, что один множитель имеет вид

$A=2^{2024}\cdot3^n\cdot5^m$, где $n\in Z; m\in Z; 0\le n\le4; 0\le m\le2024$, а второй $-\frac{81\cdot10^{2024}}{A}=B$, если $A<B$, то $A=(a-b)$

$B=a+b+1$; если $A>B$, то $A=a+b+1$; $B=a-b$ ($A=B$ невозможно т.к. они разной чётности). Тогда имеем

$5\cdot2025=10125$ таких чисел (перебрав все сочетания n и m).

Ответ: 10125.